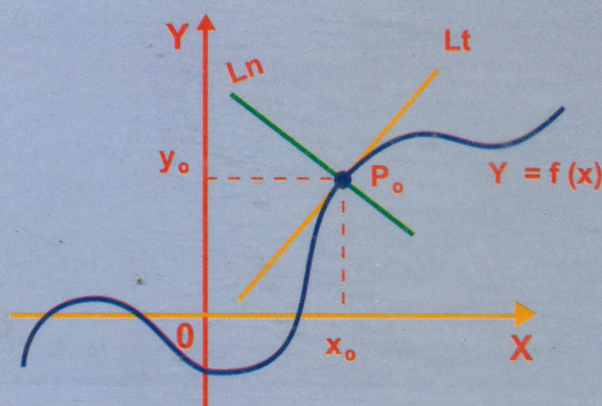
I Análisis Matemático

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERIA



Eduardo Espinoza Ramos

Lima - Perú

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIA E INGENIERÍA
(TERCERA EDICION)

- SISTEMA DE NUMEROS REALES
- RELACIONES Y FUNCIONES
- LIMITES Y CONTINUIDAD
- DERIVADAS
- APLICACIONES DE LA DERIVADA
- DIFERENCIALES

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA – PERÚ

IMPRESO EN EL PERÚ
20 - 03 - 2002

3º EDICIÓN

RUC	Nº 10070440607
Ley de Derechos del Autor	Nº 13714
Registro comercial	Nº 10716
Escritura Publica	Nº 4484

PRESENTACION

Eduardo Espinoza Ramos, catedrático en la especialidad de matemática pura, me hace el honor de pedirme la presentación de su obra Análisis Matemático I para Estudiantes de Ciencia e Ingeniería.

El objeto principal de la presente obra Análisis Matemático I, es precisamente llenar el vacío que existe para su fácil y mejor aprendizaje, desarrollando y analizando los conceptos básicos necesarios y su aplicación hacia las especialidades de Ingeniería, de tal manera que permita a los estudiantes disponer de una herramienta de trabajo práctico y comprensible.

El método didáctico empleado en todo el libro consta de cinco capítulos: Sistema de Números Reales; Relaciones y Funciones; Límites y Continuidad; Derivadas y sus Aplicaciones y Diferenciales.

Para orientación del estudiante, el trabajo llevado a cabo por el autor, en esta obra, es digno de elogio. Su lenguaje sencillo y desarrollo al alcance del estudiante, producto de sus años de experiencia como docente Universitario le permiten tratar rigurosamente estos, desde el punto de vista científico en forma didáctica y amena.

Los ejercicios y/o problemas cuidadosamente seleccionados complementan los propósitos y métodos empleados en la teoría.

Finalmente, expreso mi felicitación al autor de la obra EDUARDO ESPINOZA RAMOS, quien ya se suma a la legión de autores nacionales que tienen más conocimiento de nuestra realidad Universitaria.

ING. EDUARDO BULNES SAMAME

JEFE DE DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD RICARDO PALMA.

EX-SECRETARIO ACADEMICO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

PROLOGO

En la presente obra Intitulada "Análisis Matemático I para Estudiantes de Ciencia e Ingeniería" en su 3ra. Edición, hemos aprovechado de los numerosos y valiosos comentarios y sugerencias de mis colegas que elaboran en las diversas universidades de la capital, motivo por el cual se ha ampliado la demostración de propiedades así como los conceptos básicos teóricos e incluyendo propiedades y teorema de acuerdo a las exigencias de la nueva curricula. Al igual que su 2da edición se expone en forma teórica y práctica, los conceptos de sistemas de números reales, relaciones y funciones, límites y continuidad, derivadas y sus aplicaciones, así como la regla de L'Hospital, las funciones hiperbólicas y la diferencial con sus aplicaciones, así mismo se ha incluido algunos teorema en cuanto corresponde a las aplicaciones de las derivadas antes de los Teoremas de Rolle y del Valor Medio, también se han incluido mas ejercicios desarrollados y propuestos en las practicas y exámenes de las diversas universidades de la capital proporcionados por mis colegas y en especiales de los coordinadores de área académica.

La parte teórica se desarrolla de manera metódica y con especial cuidado, tratando de no perder el rigor matemático pero tratando de no caer en el excesivo formulismo que confunde al lector.

La lectura provechosa del presente trabajo requiere del conocimiento previo del álgebra elemental, geometría plana y trigonometría.

La presente obra es recomendable para estudiante de ciencias matemáticas, física, ingeniería, economía y para toda persona interesada en fundamentar sólidamente sus conocimientos matemáticos del análisis real.

Por último deseo agradecer y expresar mi aprecio a las siguientes personas por sus valiosos comentarios y sugerencias.

- **DOCTOR PEDRO CONTRERAS CHAMORRO**
  Ex-Director de la Escuela Profesional de Matemática Pura de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
  Catedrático Principal en Pos-Grado de la Facultad de Matemática Pura de la UNMSM
  Miembro Fundador de la Academia Nacional de Ciencia y tecnología del Perú.
  Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma.
- **DOCTOR EUGENIO CABANILLAS LAPA**
  Doctor en matemática Pura, Universidad Federal de Río de Janeiro – Brasil.
  Director de Pos-Grado en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
  Catedrático de la Universidad Nacional del Callao.
- **LIC. ANTONIO CALDERON LEANDRO**
  Ex-Jefe de Departamento Académico de la Facultad de Ing. Pesquera y Alimentos de la Universidad Nacional del Callao.
  Jefe de Departamento Académico de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.
  Coordinador del Area de Matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Ricardo Palma.
- **LIC. SERGIO LEYVA HARO**
  Ex Jefe del Centro de Computo de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao.
  Catedrático en la Facultad de Ingeniería Ambiental y de Recursos Naturales de la Universidad Nacional del Callao.
- **LIC. JUAN BERNUI BARROS**
  Director del Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.
  Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- **LIC. PALERMO SOTO SOTO**
  Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
  Catedrático de la Universidad Particular Ricardo Palma.
- **Mg. JOSE QUIKE BRONCANO**
  Catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
  Coordinador del área de matemática en la Facultad de Ciencias Matemáticas Puras.
- **Lic. GUILLERMO MAS AZAHUANCHE**
  Catedrático de la Universidad Nacional del Callao
  Catedrático de la Universidad Nacional de Ingeniería.
  Catedrático de la Universidad Ricardo Palma.

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos **RONALD, JORGE** y **DIANA**, que Dios ilumine sus caminos para que

INDICE

CAPITULO I

1. SISTEMAS DE NUMEROS REALES

CAPITULO II

2. RELACIONES Y FUNCIONES

CAPITULO III

3. LIMITES Y CONTINUIDAD

CAPITULO IV

4. LA DERIVADA

CAPITULO V

5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

CAPITULO I

1. SISTEMA DE NÚMEROS REALES.-

1.1 INTRODUCCION.-

El sistema de los números reales de los cuales ahora disponemos, es el resultado de una enorme cantidad de reflexión por parte del hombre.

Los enteros positivos, es decir: 1,2,3,..., pueden encontrarse desde el comienzo de nuestra civilización. Los enteros tan grandes como 100,000 se usaban en Egipto en fechas tan tempranas como es 300 A.C.

Los antiguos Egipcios y Babilonios desarrollaron una aritmética con los enteros positivos con los cuales podían efectuarse las operaciones de adición y multiplicación, aunque la división no se desarrolló por completo.

Estos antiguos pueblos usaron ciertas fracciones, tenemos pues, que los números racionales aparecieron también en una temprana etapa de nuestra civilización (un número racional es cociente de dos enteros).

Los Babilonios fueron los que más éxito tuvieron en el desarrollo del aritmética y el álgebra por que tenían una notación para los números muy superior a la de los Egipcios. Esta notación en principio, análoga a nuestro sistema decimal, excepto por el hecho de que su base es 60 en lugar de 10. Una buena notación es el pre-requisito para el desarrollo de los matemáticos.

Nuestro sistema decimal con los números llamados arábigos fue inventado por los Hindúes e introducido en Europa occidental en el siglo XII a través de las traducciones de textos Arabes. Sin embargo, la aceptación generalizada de esta notación demoró mucho en llegar.

La espera fue aun mayor para la aceptación de los números negativos, incluso hasta finales del siglo XVI se descartaban las raíces negativas de las ecuaciones.

La aritmética y el álgebra se desarrollaron bajo él estimulo de problemas prácticos en contradicción de la geometría que desarrollaron los griegos solamente para su satisfacción intelectual y en un modelo del sistema lógico.

Sin embargo, con el desarrollo del cálculo, los números reales especialmente los números irracionales tales como $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{5}$, tuvieron que sustentarse sobre una firme fundamentación lógica, esto se logro en la ultima parte del siglo XIX.

Disponemos ahora de un sistema de axiomas que describen completamente los números reales partiendo de estos axiomas podemos derivar todas las propiedades de los números reales.

Esto es el método usado en la geometría Euclidiana, se acepta un cierto número de proposiciones, a las que se llama axiomas o postulados o hipótesis y basándose en esas axiomas se prueban todos los teoremas de la geometría.

1.2 DEFINICION.-

Llamaremos sistema de los números reales a un conjunto R, provisto de dos operaciones adición (+) y multiplicación (.) (leyes de composición interna) y una relación de orden denotado por "<", es decir:

1° LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA:

$$+: R \times R \longrightarrow R$$

$$(a,b) \longrightarrow +(a,b) = a + b$$

Además debe cumplirse los axiomas siguientes:

A_0 Cerradura: $\forall\ a, b \in R \Rightarrow a + b \in R$

A_1 Conmutatividad: $a + b = b + a\ ,\ \forall\ a,b \in R$

A_2 Asociatividad: $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall\ a,b,c \in R$

A_3 Identidad aditiva: $\forall$ a $\in$ R, $\exists$ 0 $\in$ R / a + 0 = 0 + a = a

A_4 Opuesto Aditivo: $\forall$ a $\in$ R, $\exists$ - a $\in$ R, y es único, tal que: a + (-a) = (-a) + a = 0

2° LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA: $\bullet : R \times R \longrightarrow R$

Además debe cumplirse los axiomas siguientes:

M_0 Cerradura: $\forall$ a, b $\in$ R $\Rightarrow$ a.b $\in$ R

M_1 Conmutativa: a.b = b.a, $\forall$ a,b $\in$ R

M_2 Asociativa: (a.b).c = a.(b.c), $\forall$ a,b,c $\in$ R

M_3 Identidad Multiplicativa: $\forall$ a $\in$ R, $\exists$ 1 $\neq$ 0, 1 $\in$ R, tal que: 1.a = a

M_4 Inverso Multiplicativo: $\forall$ a $\neq$ 0, $\exists$ a^{-1} $\in$ R, tal que: $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

3° RELACIÓN DE ORDEN:

O_1 $\forall$ a,b $\in$ R una y solamente una de las relaciones se cumple a < b, a = b, b < a (ley de tricotomía).

O_2 Sí a < b y b < c entonces a < c (transitiva).

O_3 Si a < b $\Rightarrow$ a + c < b+ c, $\forall$ a,b,c $\in$ R.

O_4 Sí a < b, c > 0 entonces a.c < b.c

OBSERVACIÓN:

i) A los números a y b los llamaremos sumando, y al número a + b suma de a y b.

ii) En a.b; a los números a y b los llamaremos factores y al número a.b producto de a y b.

iii) El opuesto es único, así mismo cuando existe el inverso es único.

1.3 AXIOMA DE SUSTITUCION.-

Si a y b pertenecen a un conjunto B y si a = b, entonces en toda relación se puede sustituir al elemento a por el elemento b sin que altere el significado de la relación.

1.4 AXIOMAS DISTRIBUTIVAS.-

a) $a.(b + c) = a.b + a.c, \ \forall a, b, c \in R$ distributiva a izquierda

b) $(a + b).c = a.c + b.c, \ \forall a, b, c \in R$ distributiva a derecha

1.5 TEOREMA DE IGUALDAD PARA LA ADICION.-

Sí $a = b$ entonces $a + c = b + c$, para todo $a, b, c \in R$

Demostración

1° $a = b$. por hipótesis.

2° $a + c = a + c$, propiedad reflexiva.

3° $a + c = b + c$, 1°, 2° y axioma 1.3

1.6 TEOREMA DE IGUALDAD PARA LA MULTIPLICACION.-

Si $a = b$ entonces $a.c = b.c$, para todo $a, b, c \in R$

Demostración

1° $a = b$ por hipótesis.

2° $a.c = a.c$, propiedad reflexiva.

3° $a.c = b.c$, 1°, 2° y axioma 1.3

1.7 TEOREMA DE CANCELACION PARA LA ADICION.-

Sean $a,b,c \in R$; Sí $a + c = b + c$ entonces $a = b$

Demostración

1° $a + c = b + c$. por hipótesis.

2° $a + c + (-c) = b + c + (-c)$, 1° y teorema 1.4

3° $a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$, 2° y A_2

4° $a + 0 = b + 0$, 3° axioma A_4

5° $a = b$, 4°, axioma A_3

1.8 TEOREMA DE CANCELACION PARA LA MULTIPLICACION.-

Sean $a,b,c \in R$; Sí $a.c = b.c$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$

Demostración

1° $a.c = b.c$, ... por hipótesis.

2° $c \neq 0$, ... por hipótesis

3° $\exists\ \frac{1}{c} \in R \,/\, (a.c).\frac{1}{c} = (b.c).\frac{1}{c}$, ... 2°, 1° y axioma M_4

4° $a.(c.\frac{1}{c}) = b.(c.\frac{1}{c})$, ... 3° y axioma M_2

5° $a.1 = b.1$, ... 4° y axioma M_4

6° $a = b$, ... 5° y axioma M_3

1.9 SUSTRACCION DE NÚMEROS REALES.-

DEFINICION.- Para cualquier números reales $a,b \in R$, definiremos a la sustracción de números reales por:

$$a - b = a + (-b)$$

1.10 DIVISION DE NÚMEROS REALES.-

DEFINICION.- Para cualquier números reales $a,b \in R$, donde $b \neq 0$, definiremos al cociente de números reales por:

$$\frac{a}{b} = a b^{-1}$$

1.11 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Para cada número real a ∈ R, demostrar que a + a = 2a

Demostración

1° a = a.1 ... Por M_3

2° a + a = a.1 + a.1 ... 1° y axioma 1.4

3° a + a = a.(1+1) ... 2° y axioma 1.3.a

4° a + a = a.2 ... 3° y por M_3

5° a + a = 2a ... 4° y por M_3

② Para cada número real a ∈ R, demostrar que a.0 = 0

Demostración

1° a.0 = a.0 + 0 ... Por A_3

2° a.0 = a.0 + (a + (-a)) ... 1° y por A_4

3° a.0 = (a.0 + a) + (-a) ... 2° y por A_2

4° a.0 = (a.0 + a.1) + (-a) ... 3° y por M_3

5° a.0 = a(0 + 1) + (-a) ... 4° y por axioma 1.3.a

6° a.0 = a.1 + (-a) ... 5° y por A_3

7° a.0 = a + (-a) ... 6° y por M_3

8° a.0 = 0 ... 7° y por A_4

③ Para cada número real a ∈ R, demostrar que: -a = (-1).a

Demostración

Basta demostrar que a + (-1)a = 0, porque (-1).a, y –a son inversos aditivos de a por A_4

Luego a + (-1)a = 1.a + (-1)a, … por axioma 1.3

a + (-1)a = (1 + (-1))a, … por axioma 1.3.b.

a + (-1)a = 0.a, … por A_4

a + (-1)a = 0, … por ejercicio 2.

∴ -a = (-1)a

(4) Para cada número real a ∈ R, demostrar que -(-a) = a

Demostración

1° a + (-a) = 0 … por A_4

2° (-a) + (-(-a)) = 0 … por A_4

3° (-a) + (-(-a)) = a + (-a) … 1°, 2°

4° -(-a) = a … 3° y por teorema 1.6

(5) Para cada número real a,b ∈ R, demostrar que (-a).(-b) = a.b

Demostración

1° (-a).(-b) = [(-1)a][(-1)b] … por el ejercicio 3

2° (-a).(-b) = (-1)[a((-1)b)] … 1° y M_2

3° (-a).(-b) = (-1)[(-1)a].b … 2° y M_1, M_2

4° (-a).(-b) = (-1)[(-a)].b … 3° y ejercicio 3

5° (-a).(-b) = [(-1)(-a)].b … 4° y M_2

6° (-a).(-b)=a.b … 5° y ejercicio 4

(6) ∀ a,b ∈ R, demostrar que a.(-b) = -(a.b)

Demostración

1° a.(-b) = a.((-1).b) … por ejercicio 3

2° a.(-b) = (a.(-1)).b ... 1° y por M_2

3° a.(-b) = ((-1)a).b ... 2° y por M_1

4° a.(-b) = (-1)(a.b) ... 3° y por M_2

5° a.(-b) = -(a.b) ... 4° y ejercicio 3

6° -(a-b) = (-1)(a.b) ... Por el ejercicio 3

7° -(ab) = ((-1)a).b ... 6° y por M_2

8° -(ab) = (-a).b ... 7° y ejercicio 3.

9° a(-b) = -(ab) = (-a).b ... 5° y 8°

⑦ ∀ a,b ∈ R, demostrar que a.(b - c) = a.b – a.c

Demostración

1° a.(b - c) = a.(b + (-c)) ... definición de sustracción

2° a.(b - c) = a.b + a.(-c) ... 1° y axioma 1.3.a

3° a.(b - c) = a.b + (-(a.c)) ... 2° ejercicio 6

4° a.(b - c) = a.b – a.c ... 3° definición de sustracción

⑧ Para a ∈ R, demostrar sí a ≠ 0, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Demostración

1° $a^{-1} = (a^{-1}).1$ ... por M_3

2° $a^{-1} = 1.(a^{-1})$ ... 1° y M_1

3° $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ... 2° definición de división

(9) $\forall$ a,b $\in$ R, a.b $\neq$ 0, demostrar que $(a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$

Demostración

1° $(a.b).\dfrac{1}{(ab)} = 1$ ... por M_4

2° $(a.b).(a.b)^{-1} = 1$ ... 1° y definición de división

3° $(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = (a).(a)^{-1}.(b).(b^{-1})$ ... por M_2

4° $(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = (a.\dfrac{1}{a}).(b.\dfrac{1}{b})$ ... 3°, M_2 y definición de división.

5° $(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = (1)(1) = 1$ ... 4° y M_4

6° $(a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = 1$ ... de 5°

7° $(a.b).(a.b)^{-1} = (a.b)(a^{-1}.b^{-1})$ ... de 2° y 6°

8° $(a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$ ... 7° y teorema 1.7

(10) $\forall$ a,b,c,d $\in$ R, b $\neq$ 0, d $\neq$ 0, demostrar que: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a.d + b.c}{b.d}$

Demostración

1° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = a.b^{-1} + c.d^{-1}$ ... por definición de división

2° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = (a.b^{-1}).(d.\dfrac{1}{d}) + (c.d^{-1}).(b.\dfrac{1}{b})$ ... 1° y por M_4

3° $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = (a.b^{-1}).(d.d^{-1}) + (c.d^{-1}).(b.b^{-1})$ ... 2° y definición por división.

4° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d).(b^{-1}.d^{-1})+(b.c).(b^{-1}.d^{-1})$ ... 3°, M_2

5° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d).(b.d)^{-1}+(b.c).(b.d)^{-1}$ ... 4° y ejercicio 9

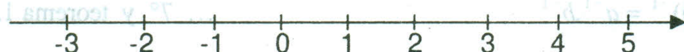
6° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a.d+b.c).(bd)^{-1}$ ... de 5° y axioma 1.3.b.

7° $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+b.c}{bd}$ ... 6° y definición de división

1.12 REPRESENTACION DE LOS NÚMEROS REALES.-

Entre los números reales y los puntos de una recta existe una correspondencia, es decir:

Si sobre una recta se fija su origen "O", una unidad, y un sentido positivo, entonces, a cada punto de una recta le corresponde un número real y recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, al número real correspondiente a un punto de la recta se le llama abscisa del punto.



NOTACION PARA LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS.-

N: Conjunto de los números naturales.

Z: Conjunto de los números enteros.

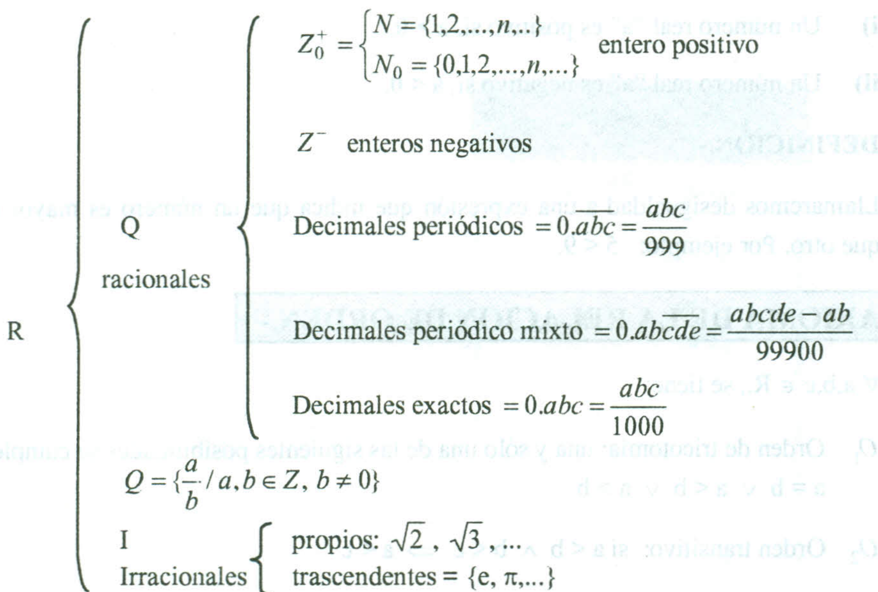
Q: Conjunto de los números racionales.

I: Conjunto de los números irracionales.

R: Conjunto de los números reales.

C: Conjunto de los números complejos.

CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES



1.13 DESIGUALDADES.-

La correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta pueden usarse para dar una interpretación geométrica de la relación de orden entre los números reales.

La relación $a < b$ significa que sobre una recta numérica el punto A corresponde al número "a", que se encuentra a la izquierda del punto B correspondiente al número "b".



El símbolo < se lee "Es menor que". También usaremos los símbolos siguientes:

>, que se lee "Es mayor que".

≤, que se lee "Es menor o igual que".

≥, que se lee "Es mayor o igual que".

1.13.a DEFINICIÓN.-

i) Un número real "a" es positivo sí, $a > 0$.

ii) Un número real "a" es negativo sí, $a < 0$.

1.13.b DEFINICIÓN.-

Llamaremos desigualdad a una expresión que indica que un número es mayor ó menor que otro. Por ejemplo: $5 < 9$.

1.14 AXIOMA DE LA RELACION DE ORDEN.-

$\forall$ a,b,c $\in$ R., se tiene:

O_1 Orden de tricotomía: una y sólo una de las siguientes posibilidades se cumple:
$a = b \vee a < b \vee a > b$

O_2 Orden transitivo: sí $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

O_3 Orden de adición: sí $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O_4 Orden Multiplicativo: sí $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$

En base a estos axiomas daremos las siguientes definiciones:

1.15 DEFINICION.-

i) $a < b \Leftrightarrow b - a$ es positivo. **ii)** $a > b \Leftrightarrow a - b$ es positivo.

iii) $a \leq b \Leftrightarrow a = b \vee a < b$ **iv)** $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

1.16 TEOREMA.-

$\forall$ a,b,c,d $\in$ R; Sí $a < c \wedge b < d \Leftrightarrow a + b < c + d$

Demostración

1° $a < c$ por hipótesis

2° $a + b < b + c$ 1° y O_3.

3°	$b < d$	por hipótesis
4°	$b + c < c + d$	3° y O_3
5°	$a + b < c + d$	2°, 4° y O_2

1.17 TEOREMA.-

Para $a,b \in R$, si $a < b \Rightarrow -a > -b$

Demostración

1°	$a < b$	por hipótesis
2°	$b - a > 0$	1° y definición 1.14 i.
3°	$(b - a) + (-b) > 0 + (-b)$	2° y O_3
4°	$-a + (b + (-b)) > -b$	3°, A_2 y A_3
5°	$-a + 0 > -b$	4° y A_4
6°	$-a > -b$	5° y A_3

1.18 TEOREMA.-

Sí $a, b, c \in R$, donde $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

Demostración

1°	$a < b$	por hipótesis
2°	$c < 0$	por hipótesis
3°	$-c > 0$	2° y definición 1.14.i)
4°	$- a.c < -b.c$	1°, 3° y O_4 y ejercicio 6
5°	$a.c > b.c$	4° y teorema 1.16

1.19 TEOREMA.-

Para $a \in R$, $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Demostración

1°	$a \neq 0$	por hipótesis
2°	$a > 0 \vee a < 0$	1° y O_1
3°	sí $a > 0 \Rightarrow a.a > 0.a$	2° y O_4
4°	$a^2 > 0$	3° y ejercicio 2
5°	sí $a < 0 \Rightarrow -a > 0$	2° y definición 1.15i
6°	$(-a)(-a) > 0. (-a)$	5° y O_4
7°	$a^2 > 0$	6°, ejercicio 2 y 5

1.20 TEOREMA.-

Para $a \in R$, $a \neq 0$ entonces a^{-1} tiene el mismo signo que "a" es decir:

i) Sí $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$ **ii)** Sí $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

Demostración

i)

1°	$a > 0$	por hipótesis
2°	$a^{-1} < 0$	hipótesis auxiliar
3°	$a.a^{-1} < 0$	1°, 2° y teorema 1.18
4°	$1 < 0$	3° y M_4 es absurdo
5°	$a^{-1} > 0$,	por 2° y 4°
6°	Sí $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$	1° y 5°

ii) Su demostración es en forma similar.

1.21 TEOREMA.-

Para a,b $\in$ R, donde a y b tienen el mismo signo, sí $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

Demostración

Como a y b tienen el mismo signo entonces se tiene dos casos:

i) $a > 0 \wedge b > 0$ **ii)** $a < 0 \wedge b < 0$

i)

1°	$a < b$	por hipótesis
2°	$a > 0 \wedge b > 0$	por hipótesis
3°	$a^{-1} > 0 \wedge b^{-1} > 0$	2°, teorema 1.20
4°	$a.a^{-1} < b.a^{-1}$	3° y 1°; O_4
5°	$(a.a^{-1})b^{-1} < (b.a^{-1})b^{-1}$	3° y 4°; O_4
6°	$(a.a^{-1})b^{-1} < (b.b^{-1})a^{-1}$	5° y M_2
7°	$1.b^{-1} < 1.a^{-1}$	6° y M_4
8°	$b^{-1} < a^{-1}$	7° y M_3
9°	sí $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$	1° y 8°

ii) Su demostración es en forma similar.

1.22 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Si $a \geq b \geq 0$, Demostrar que: $a^2 \geq b^2$, donde a,b $\in$ R.

Demostración

Por hipótesis se tiene $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$

Como $a \geq b \Rightarrow a + b \geq 2b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$ ... **(α)**

$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$ ... **(β)**

de (α) y (β) se tiene: $(a + b)(a - b) \geq 0.(a - b)$

de donde $a^2 - b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$ $\therefore$ Sí $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b^2$

(2) Sí $a,b > 0$ y $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

Demostración

Por hipótesis se tiene $a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$ de donde $(a + b)(a - b) > 0$ **... (α)**

como $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0$, de donde $\frac{1}{a+b} > 0$ **... (β)**

de (α) y (β) se tiene $\frac{(a+b)(a-b)}{a+b} > 0$, de donde $a - b > 0$ entonces $a > b$.

(3) Si $b > a > 0$ y $c > 0$. Demostrar: $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

Demostración

Como $b > a > 0 \Rightarrow a.b > 0$ **... (1)**

$b > a$ y $c > 0 \Rightarrow b.c > a.c$ **... (2)**

en (2) sumando $a.b > 0$ en ambos lados. $a.b + b.c > a.b + a.c$

$b.(a + c) > a.(b + c)$, de donde: $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

(4) Si $a,b,c,d > 0$ y $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ Demostrar $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

Demostración

Como $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, donde $b,d > 0 \Rightarrow a.d > b.c$ **... (1)**

Además $c > 0$, $d > 0$ entonces $c.d > 0$

Sumando $c.d > 0$, a ambos miembros en **(1)**: $a.d + c.d > b.c + c.d$

d.(a + c) > c.(b + d), de donde: $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

(5) Para a,b,c números reales. Demostrar que $a^2+b^2+c^2 \geq a.b+a.c+b.c$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} \forall\ a,b \in R,\ (a-b)^2 \geq 0 \\ \forall\ a,c \in R,\ (a-c)^2 \geq 0 \\ \forall\ b,c \in R,\ (b-c)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2+b^2-2a.b \geq 0 \\ a^2+c^2-2a.c \geq 0 \\ b^2+c^2-2b.c \geq 0 \end{array}$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(a.b+a.c+b.c) \geq 0$$

de donde $a^2+b^2+c^2 \geq a.b+a.c+b.c$

(6) $\forall$ a,b $\in R^+$, demostrar que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

Solución

Como a,b $\in R^+ \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} \in$ R

Sí $\sqrt{a}-\sqrt{b} \in$ R $\Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, de donde $a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$$

(7) Demostrar que sí a < b, Entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

Demostración

Como $a < b \Rightarrow a+a < a+b \Rightarrow 2a < a+b$ **... (1)**

$a < b \Rightarrow a+b < b+b \Rightarrow a+b < 2b$ **... (2)**

de (1) y (2) por transitividad se tiene: $2a < a+b < 2b$ $\therefore\ a < \frac{a+b}{2} < b$

(8) Demostrar que si, $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, entonces: $1 \geq$ a.c + b.d, para a,b,c,d $\in$ R

Demostración

$\forall$ a,c $\in$ R, $(a-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+c^2 \geq 2a.c$ **... (1)**

$\forall$ b,d $\in$ R, $(b-d)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2+d^2 \geq 2b.d$ **... (2)**

sumando (1) y (2) se tiene: $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 2(a.c+b.d)$

$2 \geq 2(a.c+b.d) \quad \therefore \quad 1 \geq a.c+b.d$

9 $\forall$ a,b,c,d $\in R^+$ y n $\in Z^+$, demostrar que: $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4(abcd)^{n/2}$

Demostración

a,b $\in R^+ \Rightarrow a^n, b^n \in R^+$, pero $a^n-b^n \in$ R, entonces:

$(a^n-b^n)^2 \geq 0 \Rightarrow a^{2n}+b^{2n} \geq 2a^nb^n$ **... (1)**

c,d $\in R^+ \Rightarrow c^n, d^n \in R^+$, pero $c^n-d^n \in$ R, entonces:

$(c^n-d^n)^2 \geq 0 \Rightarrow c^{2n}+d^{2n} \geq 2c^nd^n$ **... (2)**

Sumando (1) y (2) se tiene: $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 2(a^nb^n+c^nd^n)$ **... (3)**

$(\sqrt{a^nb^n}-\sqrt{c^nd^n})^2 \geq 0 \Rightarrow a^nb^n+c^nd^n \geq 2\sqrt{a^nb^nc^nd^n}$ **... (4)**

$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4\sqrt{a^nb^nc^nd^n}$

$\therefore \quad a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n} \geq 4(abcd)^{n/2}$

10 Si a + b + c = 1, donde a,b,c > 0, Demostrar que (1 – a)(1 – b)(1 – c) ≥ 8abc

Demostración

Como a,b,c > 0 $\Rightarrow \sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} > 0$ entonces:

$$\begin{cases} \sqrt{b}-\sqrt{c} \in R \\ \sqrt{a}-\sqrt{c} \in R \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ a+c \geq 2\sqrt{ac} \\ a+b \geq 2\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$\overline{(b + c)(a + c)(a + b) \geq 8abc} \qquad \textbf{... (1)}$$

Pero sí $a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-a=b+c \\ 1-b=a+c \\ 1-c+a+b \end{cases}$ **... (2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8abc$

(11) Si $a,b,c,d \in R^+$, Demostrar que: $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$

Demostración

Como $a,b,c,d \in R^+ \Rightarrow ab \geq 0,\ cd \geq 0,\ ac \geq 0,\ bd \geq 0$

De donde $\sqrt{ab}-\sqrt{cd} \in R$, y $\sqrt{ac}-\sqrt{bd} \in R$, entonces:

$$\begin{cases} (\sqrt{ab}-\sqrt{cd})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{ac}-\sqrt{bd})^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab+cd \geq 2\sqrt{abcd} \\ ac+bd \geq 2\sqrt{abcd} \end{cases}$$

multiplicando se tiene: $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$

(12) Sean $a,b,c,d \in R^+$ tal que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, demostrar que: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Demostración

Como $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow a.d < b.c$ por que $b,d \in R^+$ $a.d < b.c$, sumando a.b, a ambos miembros $ad + ab < bc + ab$, factorizando

$a(b + d) < b(a + c)$, de donde $\boxed{\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}}$ **... (1)**

En $ad < bc$ sumando cd, a ambos miembros $ad + cd < bc + cd$,

Factorizando d(a + c) < c(b + d), de donde: $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ ... (2)

De (1) y (2) se tiene: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \wedge \frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

De donde por transitividad se tiene: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

(13) Si a,b,c y d, son números reales cualesquiera. Demostrar que: $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd$

Demostración

Como a,b,c,d ∈ R ⇒ a^2,b^2,c^2,d^2 ∈ R, además:

$$\begin{cases} a^2-b^2 \in R \\ c^2-d^2 \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (a^2-b^2)^2 \geq 0 \\ (c^2-d^2)^2 \geq 0 \end{matrix}$$

de donde al efectuar se tiene: $a^4+b^4 \geq 2a^2b^2$ ... (1)

$c^4+d^4 \geq 2c^2d^2$ ... (2)

Sumando (1) y (2) miembro a miembro se tiene:

$a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 2(a^2b^2+c^2d^2)$ ... (3)

Como ab, cd ∈ R ⇒ ab − cd ∈ R, entonces: $(ab-cd)^2 \geq 0$ de donde

$a^2b^2+c^2d^2 \geq 2abcd \Rightarrow 2(a^2b^2+c^2d^2) \geq 4abcd$ ... (4)

de (3) y (4) por transitividad se tiene: $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd$

(14) Si a > 0, a ∈ R, demostrar que: $a+\frac{1}{a} \geq 2$

Demostración

Como a > 0 ⇒ $\sqrt{a}>0$, de donde $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$ ∈ R por lo tanto

$(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}})^2 \geq 0$, desarrollando se tiene: $a-2+\frac{1}{a}\geq 0$ de donde $a+\frac{1}{a}\geq 2$

(15) Si a,b,c, $\in R^+$, demostrar que: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

Demostración

Por hipótesis se tiene que a,b,c > 0, entonces

$\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{c}>0$, $\frac{a}{c}>0$ entonces aplicando el ejercicio 14).

Se tiene: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ **... (1)**

Ahora a (1) multiplicamos por c,a,b respectivamente.

$$\begin{cases} \frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geq 2c \\ \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}\geq 2a \\ \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b \end{cases} \Rightarrow 2\frac{ac}{b}+2\frac{bc}{a}+2\frac{ab}{c}\geq 2c+2a+2b$$

$2(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})\geq 2(a+b+c)$ $\therefore$ $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

(16) Si a ≥ 0, b ≥ 0, demostrar que: $\frac{a+b}{a+b+1}\leq \frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}$

Demostración

Como a ≥ 0, b ≥ 0, entonces a + 1 ≥ 1, b + 1 ≥ 1 luego se tiene:

$$\begin{cases} a+1\geq 1 \\ b+1\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+1\geq b+1 \\ a+b+1\geq a+1 \end{cases}$$

ahora invirtiendo cada una de las desigualdades: $\frac{1}{a+b+1}\leq \frac{1}{b+1}$ y $\frac{1}{a+b+1}\leq \frac{1}{a+1}$

multiplicando a las desigualdades por a y b respectivamente.

$$\frac{a}{a+b+1} \le \frac{a}{b+1} \quad y \quad \frac{b}{a+b+1} \le \frac{b}{a+1}$$

Sumado estas dos desigualdades se tiene: $\frac{a+b}{a+b+1} \le \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}$

(17) Si a,b $\in$ R, b $\neq$ 0, demostrar que: $\frac{1}{a^2+ab+b^2} \le \frac{4}{3b^2}$

Demostración

Completando cuadrado en a^2+ab+b^2 se tiene: $a^2+ab+b^2 = (a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}$ ... **(1)**

Como a,b $\in$ R $\Rightarrow$ $a+\frac{b}{2} \in$ R, de donde $(a+\frac{b}{2})^2 \ge 0$

Sumando $\frac{3b^2}{4}$ se tiene: $(a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \ge \frac{3b^2}{4}$ ... **(2)**

Ahora de (1) y (2) se tiene.

$a^2+ab+b^2 \ge \frac{3b^2}{4}$ como b $\neq$ 0 invertimos $\frac{1}{a^2+ab+b^2} \le \frac{4}{3b^2}$

(18) Si a > 0 y b < 0, Demostrar que: $\frac{b+1}{a} < \frac{1}{a}$

Demostración

Como a > 0, b < 0 $\Rightarrow$ ab < 0, sumando "a" a ambos miembros se tiene:

a + b.a < a, de donde a(b + 1) < a ... **(1)**

Como a > 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{a^2} > 0$, ahora multiplicamos a (1) por $\frac{1}{a^2}$

Obteniéndose $\frac{a(b+1)}{a^2} < \frac{a}{a^2}$ simplificando $\therefore \frac{b+1}{a} < \frac{1}{a}$

(19) Si a > 0, b > 0 tal que a + b = 1, demostrar que: $ab \le \frac{1}{4}$

Demostración

Como a > 0, b > 0 $\Rightarrow$ a – b $\in$ R, de donde:

$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$ sumando 4ab.

$a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab$ de donde: $(a+b)^2 \ge 4ab$

pero como a + b = 1, se tiene 1 ≥ 4ab, por lo tanto $ab \le \frac{1}{4}$

(20) Si a > 0, b > 0, 3a ≠ 5b, demostrar que: $\frac{3a}{5b} + \frac{5b}{3a} > 2$

Demostración

Como 3a ≠ 5b $\Rightarrow$ 3a - 5b ≠ 0 y 3a – 5b $\in$ R entonces $(3a-5b)^2 > 0$

Desarrollando se tiene: $9a^2 - 30ab + 25b^2 > 0$

Sumando 30ab, a ambos miembros: $9a^2 + 25b^2 > 30ab$ multiplicando por $\frac{1}{15ab}$

$\frac{9a^2 + 25b^2}{15ab} > \frac{30ab}{15ab}$, de donde: $\frac{3a}{5b} + \frac{5b}{3a} > 2$

1.23 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Si a y b son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a+b) \ge 4$

(2) Si a,b,c son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(a+b+c) \ge 9$

(3) Si a,b,c,d son números reales positivos, demostrar que: $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d})(a+b+c+d) \ge 16$

(4) Si a y b dos números reales positivos tal que a ≥ b, demostrar que: $\frac{a}{b}+\frac{3b}{a}\geq\frac{b^2}{a^2}+3$

(5) $\forall$ a $\in$ R, a ≠ 0, demostrar que: $a^2+\frac{9}{a^2}\geq 6$

(6) Si a,b,c $\in R^+$, demostrar que: (b + c)(a + c)(a + b) ≥ 8abc

(7) Si a,b $\in$ R, demostrar que: $a^3b+ab^3\leq a^4+b^4$

(8) Si a,b,c $\in$ R, demostrar que: $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$

(9) Si 0 < a < 1, demostrar que $a^2 < a$

(10) Si a,b,c son números reales positivos y $\frac{d}{a}<\frac{e}{b}<\frac{f}{c}$. Demostrar que: $\frac{d}{a}<\frac{d+e+f}{a+b+c}<\frac{f}{c}$

(11) Demostrar que si a,b,c son números positivos y no iguales entre si, entonces: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$

(12) Si a,b,c son números positivos y no iguales entre si. Demostrar que: $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})>9$

(13) Si a y b son números reales diferentes de cero. Demostrar que: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{16b^2}{a^2}+24\geq\frac{8a}{b}+\frac{32b}{a}$

(14) Si $a^2+b^2=1$. Demostrar que: $-\sqrt{2}\leq a+b\leq\sqrt{2}$

Sug. $(x-y)^2\geq 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$

(15) Si a + b = c, a > 0, b > 0, demostrar que: $a^{2/3}+b^{2/3}>c^{2/3}$

(16) Si a + b ≥ c > 0, demostrar que: $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\geq\frac{c}{1+c}$

(17) Si a,b,c ≥ 0, demostrar que: $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$

(18) Si c > 0, d > 0, 2d ≠ 3c, demostrar que: $\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d}$

(19) Si a > 0, b > 0, a ≠ b, demostrar que: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} > 2$

(20) Si a,b,c ∈ R, demostrar que: $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$

(21) Sea a + b = 2, donde a y b son números reales, demostrar que: $a^4 + b^4 \geq 2$

(22) Si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, demostrar que: $ax + by + cz \leq 1$

(23) Si a > 0, b >0, demostrar que: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(24) Si 0 < a < 1, demostrar que: $a^2 < a$

(25) Si a,b > 0, demostrar que: $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

(26) Si a > 0, b > 0, demostrar que: $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^3$

(27) Si a > 0, a ≠ 1, demostrar que: $a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2}$

(28) Si a > 0 y b > 0, demostrar que: $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$

(29) Si a y b son números reales, demostrar que: $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

(30) Si a,b,c ∈ R^+, demostrar que: $(a+b+c)^3 \geq 27abc$

(31) Si a,b,c y d son números reales cualesquiera. Demostrar $(ab+cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$

(32) Si a,b ∈ R, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4$

(33) Si a > 0 y b > 0, demostrar que: $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{1}{2}(\frac{(a+b)^2+4}{a+b})^2$

(34) Si a > 0, b > 0 tal que a + b = 1, demostrar que: $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$

(35) Si a,b,c,d ∈ R, demostrar que: $ac+bd \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

(36) Si a,b ∈ R tal que a + b = 1, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$

(37) Si a,b ∈ R tal que a + b = 3, demostrar que: $a^4+b^4 \geq \frac{81}{8}$

(38) Si a,b,c,d ∈ R^+, demostrar que: $\frac{1}{4}(a+b+c+d) \geq \sqrt[4]{abcd}$

(39) Si $a_1,a_2,...,a_n$, $b_1,b_2,...,b_n$ ∈R tal que: $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=1$, $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2=1$, demostrar que: $a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \leq 1$

(40) Demostrar que si -1 < a < 0 entonces $a^3 > a$

(41) Si –a > 0 y $(a-b)^2 > (a+b)^2$, entonces b >0

(42) Si a, b ∈ R, tal que 2a +4b = 1, Demostrar que: $a^2+b^2 \geq \frac{1}{20}$

(43) Si a > 0, b > 0 ⇒ $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$

(44) Si $x_1,x_2,...,x_n$ ∈ R y si $\beta=\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}$ y $\alpha=\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$, demostrar que: β ≤ α.

(45) Si a,b,c,m,n,p ∈ R / m > 0, n > 0, p > 0: $\frac{a}{m}<\frac{b}{n}<\frac{c}{p}$ entonces: $\frac{a}{m}<\frac{b+a+c}{m+n+p}<\frac{c}{p}$

(46) Probar que si $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ entonces $a_1 < \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < a_n$

(47) Demostrar que si $0 < a < b < c$ entonces: $\dfrac{a^3 - b^3}{3c(b-a)} < a + b + c$

(48) Probar que: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4|abcd|$ para a,b,c,d $\in$ R

(49) Si a,b,c > 0, demostrar que: $2(a^3 + b^3 + c^3) > bc(b+c) + ac(c+a) + ab(a+b)$

(50) Demostrar que: $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a+b+c)$ $\forall$ a,b,c $\in$ R

(51) $\forall$ x $\in$ R y n par, demostrar que: $\dfrac{x^n}{x^{2n}+1} \leq \dfrac{1}{2}$

(52) Demostrar que si $r > 0$ y $a < b$ entonces a $a < \dfrac{a + br}{1 + r} < b$

(53) Si a y b son números positivos y distintos, demostrar que: $\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2} > \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

(54) Consideremos x, y, z, w números reales, demostrar que:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq \frac{2}{3}(xy + xz + xw + yz + yw + zw)$$

(55) Si a y b son números desiguales positivos demostrar que: $a + b < \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$

(56) Si a,b y c son números positivos distintos. Demostrar que: $(a+b+c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$

(57) Si a y b son números positivos distintos, demostrar que: $(a^3 + b^3)(a+b) > (a^2 + b^2)^2$

(58) Si x,y son números distintos, demostrar que: $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2) > (x^3 + y^3)^2$

(59) Si x,y,z son números positivos distintos, demostrar que:

xy(x + y) + yz(y + z) + xz(x + z) > 6xyz

(60) Demostrar que: $a \leq b < 1 \Rightarrow \frac{a-2}{a-1} \leq \frac{b-2}{b-1}$

(61) Sean a,b,c,x,y,z números positivos distintos, demostrar que:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) > (ax+by+cz)^2$

(62) Demostrar que: $0 < d < c \Rightarrow \frac{c^3}{3} - \frac{d^3}{3} > d^2(c-d)$

(63) Sí $0 \leq d < c \Rightarrow d^3(c-d) < \frac{c^4}{4} - \frac{d^3}{3} < c^2(c-d)$

(64) Si $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, demostrar que:

a) $xyz = 1 \Rightarrow x+y+z \geq 3$

b) $xyz = 1 \wedge x+y+z = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

(65) Demostrar que: $x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3$ (sug: $\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x} = 1$ y ejercicio 64)

(66) Demostrar para todo a y b real $\sqrt[3]{ab} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{a^2+b^2}$

(67) Si x e y ∈ R, demuestre que: $|x| + |y| \geq |x + y|$

(68) Si $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^+$ tal que $x_1 . x_2 .. x_n = 1$. Entonces $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 1$

(69) Si a,b ∈ R, demostrar que: $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$

(70) Si $a > 0$, probar que: $\frac{x^2+1+a}{\sqrt{x^2+a}} \geq a+1$

(71) Si a,b,c $\in R^+$,y si $a^2+b^2+c^2 = 8$, demostrar que: $a^3+b^3+c^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}$

(72) Si $a > 0$, $b > 0$, demostrar que: $(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})(a^2+b^2) \geq 4$

(73) Demostrar que sí a,b,c nos números reales positivos entonces $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

(74) Sí $\forall$ a,b$\in$ R tal que $a \geq 0 \wedge b > 0$ y $a \leq x^2 < b \Rightarrow \sqrt{a} \leq x < \sqrt{b} \vee -\sqrt{b} < x \leq -\sqrt{a}$

(75) Si $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, tal que $x_1.x_2...x_n = 1$. Demostrar que $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$

(76) Si $a, b \in R^+$, Demostrar que $(a^2+b^2)(a+b)^2 \geq 8a^2b^2$

(77) Si a + b + c = 0, Demostrar que: $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

(78) Si $a, b \in R^+$, Demostrar que $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$

1.24 INECUACIONES.-

1.24.1 DEFINICION.- Una inecuación es una desigualdad en las que hay una o más cantidades desconocidas (incógnita) y que sólo se verifica para determinados valores de la incógnita o incógnitas.

Ejemplo.- La desigualdad: 2x + 1 > x + 5, es una inecuación por que tiene una incógnita "x" que se verifica para valores mayores que 4.

1.24.2 INTERVALOS.- Los intervalos son sub-conjuntos de los números reales que sirven para expresar la solución de las inecuaciones, estos intervalos sé representan gráficamente en la recta numérica real.

Consideremos los siguientes tipos de intervalos:

a) Intervalo cerrado.- $a \leq b$

$[a,b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$



b) Intervalo abierto.- $a < b$

$<a,b> = \{x \in R / a < x < b\}$



c) Intervalo cerrado en a y abierto en b.-

$[a,b> = \{x \in R / a \leq x < b\}$



d) Intervalo abierto en a y cerrado en b.-

$<a,b] = \{x \in R / a < x \leq b\}$



e) Intervalo infinitos.-



$[a,+\infty> = \{x \in R / x \geq a\}$

$<a,+\infty> = \{x \in R / x > a\}$



$<-\infty,b] = \{x \in R / x \leq b\}$



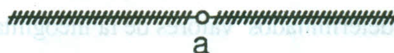
$<-\infty,b> = \{x \in R / x < b\}$



$<-\infty,+\infty> = \{x/x \in R\}$



$<-\infty, a> \cup <a,+\infty> = \{x \in R / x \neq a\}$



Nota.- (1) Si $x \in [a,b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$

Ejemplo.- Demostrar que: sí $x \in [2,4]$ entonces $2x + 3 \in [7,11]$

Solución

$x \in [2,4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$, multiplicando por 2

$4 \leq 2x \leq 8$, sumando 3

$7 \leq 2x + 3 \leq 11$

Sí $7 \leq 2x + 3 \leq 11 \Rightarrow 2x + 3 \in [7,11]$

Por lo tanto, sí $x \in [2,4] \Rightarrow 2x + 3 \in [7,11]$

② $\boxed{\text{Si } x \in <a,b> \;\Leftrightarrow\; a < x < b}$

Ejemplo.- Demostrar que: Sí $2x - 6 \in <-4,4> \;\Rightarrow\; x \in <1,5>$

Solución

$2x - 6 \in <-4,4> \;\Rightarrow\; -4 < 2x - 6 < 4$, sumando 6

$2 < 2x < 10$ dividiendo entre 2

$1 < x < 5$, entonces $x \in <1,5>$

Por lo tanto, sí $2x - 6 \in <-4,4> \;\Rightarrow\; x \in <1,5>$

1.25 CONJUNTO SOLUCION DE UNA INECUACION.-

Se llama conjunto solución de una inecuación a todos los números reales que la verifiquen, es decir, que dichos números reales dan la desigualdad en el sentido prefijado.

1.26 RESOLUCION DE UNA INECUACION.-

El resolver una inecuación consiste en hallar un conjunto solución; es decir, encontrar el intervalo donde están los valores que puede tomar la incógnita para que verifique la inecuación.

1.27 INECUACION DE PRIMER GRADO EN UNA INCOGNITA.-

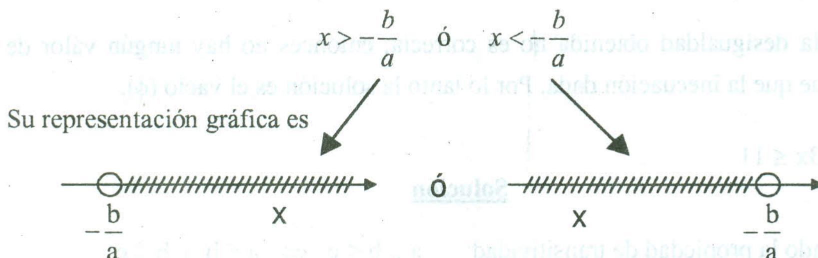
Las inecuaciones de primer grado en una incógnita, son de la forma:

$$\boxed{ax + b > 0 \quad \text{o} \quad ax + b < 0\,,\; a \neq 0}$$

Para resolver estas inecuaciones se debe considerar a > 0, es decir, sí a > 0, entonces:

$$x > -\frac{b}{a} \quad \text{ó} \quad x < -\frac{b}{a}$$

Su representación gráfica es



Luego la solución es dado en la forma: $x \in \langle -\frac{b}{a},+\infty \rangle$ ó $x \in \langle -\infty,-\frac{b}{a} \rangle$

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones.

① $3x - 4 < x + 6$

Solución

Las inecuaciones de primer grado en una incógnita, se resuelve, expresando la inecuación en la forma:

En un sólo miembro se pone la incógnita, en el otro miembro los números, es decir:

$3x - x < 6 + 4$, simplificando se tiene: $x < 5$, es decir: $x \in \langle -\infty,5 \rangle$



La solución es: $x \in \langle -\infty,5 \rangle$

② $3(x - 4) + 4x < 7x + 2$

Solución

Poniendo en un sólo miembro la incógnita y en el otro miembro los números:

$3x - 12 + 4x < 7x + 2 \Rightarrow 3x + 4x - 7x < 2 + 12$ simplificando $0 < 14$

esta desigualdad obtenida es cierta, entonces la solución de la inecuación dada, es el conjunto de todos los números reales ($x \in R$).

③ $5x - 4(x + 5) < x - 24$

Solución

En forma análoga a los ejemplos anteriores en un sólo miembro ponemos las incógnitas y en el otro miembro los números: $5x - 4x - x < -24 + 20$ simplificando $0 < -4$

Como la desigualdad obtenida no es correcta, entonces no hay ningún valor de x, que verifique que la inecuación dada. Por lo tanto la solución es el vacío (ϕ).

④ $2 \le 5 - 3x \le 11$

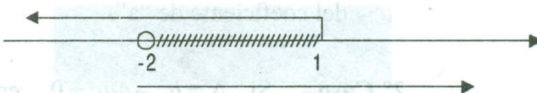
Solución

Aplicando la propiedad de transitividad: $a \le b < c \Leftrightarrow a \le b \wedge b < c$

$2 \le 5-3x < 11 \iff 2 \le 5-3x \wedge 5-3x < 11$

$\iff 3x \le 5-2 \wedge 5-11 < 3x$

$\iff x \le 1 \wedge -2 < x$



La solución es: $x \in \langle -2, 1]$

1.28 INECUACION DE SEGUNDO GRADO EN UNA INCOGNITA.-

Las inecuaciones de segundo grado en una incógnita son de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ó \quad ax^2 + bx + c < 0 \;,\; a \neq 0$$

donde a,b,c $\in$ R, siendo $a \neq 0$, la solución de estas inecuaciones, se obtiene mediante las propiedades de los números reales ó también por medio de la naturaleza de las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c = 0$.

a) CARÁCTER DE LAS RAICES DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.

Consideremos el trinomio de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{, con } a > 0 \qquad \ldots (1)$$

al analizar el valor numérico de la ecuación (1) dando valores reales a x se presentan tres casos:

1° Caso.- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces hay dos valores diferentes $r_1 < r_2$ que anulan el trinomio $ax^2 + bx + c = 0$.

Es decir: $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$, si se hace variar x a lo largo de la recta real resulta:

i) Cuando x toma valores menores que r_1, los factores $(x - r_1)$ y $(x - r_2)$ son negativos, luego el trinomio $ax^2 + bx + c$, tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

ii) Cuando x toma valores intermedio entre r_1 y r_2; entonces el factor $(x - r_1)$ es positivo y el factor $(x - r_2)$ es negativo, luego el trinomio $ax^2 + bx + c$, tiene signo opuesto del coeficiente de "a".

iii) Cuando x toma valores mayores que r_2, entonces los factores $(x-r_1)$, $(x-r_2)$ son positivos, luego el trinomio ax^2+bx+c, tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

2° Caso.- Si $\Delta = b^2-4ac=0$, entonces hay un solo valor real $r_1=r_2=r$, que anulan el trinomio ax^2+bx+c, luego como $(x-r)^2$ es positivo, el signo del trinomio ax^2+bx+c es el mismo del coeficiente de "a".

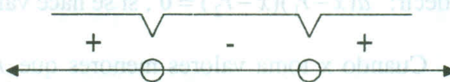
3° Caso.- Si $\Delta = b^2-4ac<0$, entonces se tiene dos valores no reales $r_1=\alpha+\beta i$ y $r_2=\alpha-\beta i$ que anulan el trinomio ax^2+bx+c, y para cualquier valor de x, el trinomio: ax^2+bx+c tiene el mismo signo del coeficiente de "a".

NOTA.- Si $ax^2+bx+c=0$ entonces $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

b) RESOLUCION DE UNA INECUACION DE SEGUNDO GRADO.-

Para resolver una inecuación cuadrática de las formas $ax^2+bx+c>0$ ó $ax^2+bx+c<0$, donde a,b,c $\in$ R, a $\neq$ 0, por medio de la naturaleza de las raíces primero se resuelve la ecuación $ax^2+bx+c=0$, y de acuerdo a la naturaleza de las raíces se presenta tres casos:

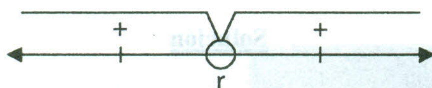
1° Caso.- Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$, tiene dos raíces reales diferentes $r_1<r_2$.



i) Si la inecuación es de la forma $ax^2+bx+c>0$, con a > 0, la solución es todos los valores de x que pertenecen al intervalo $<-\infty, r_1>$ U $<r_1, +\infty>$.

ii) Si la inecuación es de la forma $ax^2+bx+c<0$ con a > 0, la solución es todos lo valores de x que pertenece al intervalo $<r_1, r_2>$.

2° Caso.- Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$, tiene una raíz real única $r_1=r_2=r$.



i) Si la inecuación es de la forma: $ax^2+bx+c>0$, con a > 0.

La solución es todos los valores de x ≠ r, es decir: x ∈ <-∞,r> U <r,+∞>

ii) Si la inecuación es de la forma: $ax^2+bx+c<0$, con a > 0.

No se verifica para ningún valor real de x.

3° Caso.- Si la ecuación $ax^2+bx+c=0$, tiene dos raíces no reales.

i) Si la inecuación es de la forma: $ax^2+bx+c>0$, con a > 0.

La solución es todos los valores reales de x.

ii) Si la inecuación es de la forma: $ax^2+bx+c<0$, con a > 0.

No se verifica para ningún valor real de x.

RESUMIENDO EN EL SIGUIENTE CUADRO.

Forma de la Inecuación	Raíces de la Ecuación $ax^2+bx+c=0$	Conjunto Solución
$ax^2+bx+c>0$, a > 0	Raíces diferentes $r_1<r_2$	$<-\infty,r_1> U <r_2,+\infty>$
	Raíz Real Unica r	R – {r}
	Raíces no reales	R
$ax^2+bx+c<0$, a > 0	Raíces diferentes $r_1<r_2$	$<r_1,r_2>$
	Raíz Real Unica	φ
	Raíces no reales	φ

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones.

① $2x^2 - x - 10 > 0$

Solución

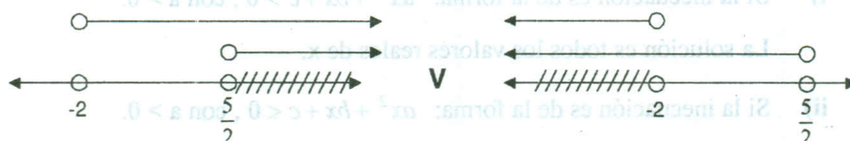
Resolveremos la inecuación usando propiedades de los números reales:

$$a.b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$2x^2 - x - 10 > 0 \Rightarrow (x + 2)(2x - 5) > 0$

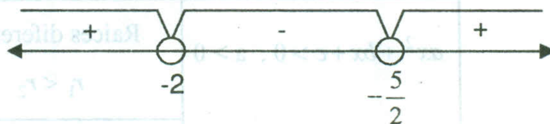
$(x + 2)(2x - 5) > 0 \Leftrightarrow (x + 2 > 0 \wedge 2x - 5 > 0) \vee (x + 2 < 0 \wedge 2x - 5 < 0)$

$\Leftrightarrow (x > -2 \wedge x > 5/2) \vee (x < -2 \wedge x < 5/2)$



La solución es: $x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle \frac{5}{2}, +\infty \rangle$

Otra forma de resolver esta inecuación, es por la naturaleza de sus raíces de la ecuación $2x^2 - x - 10 = 0$, de donde $r_1 = -2$, $r_2 = \frac{5}{2}$, luego $r_1 < r_2$ y como $2x^2 - x - 10 > 0$, de acuerdo al cuadro la solución es:



$x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle \frac{5}{2}, +\infty \rangle$

② $x^2 + 8x - 65 < 0$

Solución

Usando propiedades de los números reales.

$$a^2 < b, \; b > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$$

completando cuadrados en $x^2 + 8x - 65 < 0$, se tiene:

$x^2+8x+16<65+16 \Rightarrow (x+4)^2<81$, aplicando la propiedad

$$(x+4)^2<81 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{81}<x+4<\sqrt{81}$$

$$\Leftrightarrow \quad -9<x+4<9 \quad \Leftrightarrow \quad -13<x<5$$

La solución es $x \in \langle -13,5\rangle$

Ahora resolveremos la inecuación por medio de la naturaleza de las raíces de $x^2+8x-65=0$, es decir: $(x+13)(x-5)=0$ de donde $r_1=-13$, $r_2=5$

de acuerdo al cuadro es: $x \in \langle -13,5\rangle$



③ $x^2+20x+100>0$

Solución

Mediante propiedad de los números reales se tiene:

$x^2+20x+100>0 \Rightarrow (x+10)^2>0$ entonces:

$\forall$ x $\in$ R; x $\neq$ -10, $(x+10)^2>0$, por lo tanto la solución es; $x \in R-\{-10\}$

Ahora veremos de acuerdo a la naturaleza de las raíces: $x^2+20x+100=0 \Rightarrow r=-10$, multiplicidad 2, y como $x^2+20x+100>0$, de acuerdo al cuadro de solución es:

$$x \in R-\{-10\}$$

④ $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0$

Solución

Aplicando la propiedad de los números reales: $\forall$ x $\in$ R, $x^2 \geq 0$

luego $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0 \Rightarrow (x+\frac{3}{10})^2<0$ pero $(x+\frac{3}{10})^2 \geq 0$, entonces no existe ningún valor real para x que verifique a la inecuación, es decir: ϕ.

Ahora resolvemos mediante la naturaleza de las raíces de la ecuación $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}=0$,

de donde $r=-\frac{3}{10}$ de multiplicidad dos, pero se tiene que $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{9}{100}<0$ y de acuerdo al cuadro la solución es: ϕ.

1.29 INECUACIONES POLINOMICAS.-

Una inecuación polinómica en una incógnita, es de la forma siguiente:

$$P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0>0 \quad ó \quad P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0<0$$

donde $a_0,a_1,...,a_n$ son constantes y $a_n\neq 0$, $n\in Z^+$

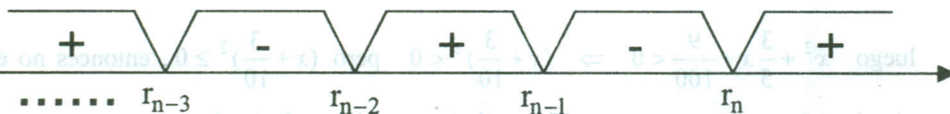
a) RESOLUCION DE UNA INECUACION POLINOMICAS.-

Una inecuación polinómicas de la forma P(x) > 0 ó P(x) < 0, se resuelve de acuerdo a la naturaleza de sus raíces de la ecuación polinómica P(x) = 0, en una forma sencilla y rápida, considerando $a_n>0$.

Para esto hallaremos primero las raíces del polinomio $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0=0$, y como éste polinomio es de grado n entonces tiene n raíces, lo cual pueden ser reales diferentes, reales de multiplicidad y no reales.

1° Caso.- Cuando las raíces de la ecuación polinómica p(x) = 0, son reales diferentes. Es decir: $r_1<r_2<...<r_{n-1}<r_n$

a) En los intervalos consecutivos determinados por las raíces del polinomio P(x) = 0, se alternan los signos "+" y "–" reemplazando por asignar el signo (+) al intervalo $<r_n,\infty>$.



b) Si la inecuación polinómica es de la forma: $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 > 0$, $a_n > 0$; al conjunto solución será la unión de los intervalos a los cuales se le ha asignado el signo "+".

c) Si la inecuación polinómica es de la forma: $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 < 0$, $a_n > 0$; el conjunto solución, será la unión de los intervalos a los cuales se le ha asignado el signo "-".

NOTA.- Explicar el método de Ruffini

Ejemplo: Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 > 0$

Solución

Expresamos el 1° miembro de la inecuación en forma factorizada

(x + 3)(x + 2)(x – 1)(x + 1)(x – 2) = 0

1	3	-5	-15	4	12	1
	1	4	-1	-16	-12	
1	4	-1	-16	-12	0	2
	2	12	22	12		
1	6	11	6	0		-1
	-1	-5	-6			
1	5	6	0			-2
	-2	-6				
1	3	0				-3
	-3					
1	0					

Luego las raíces son: $r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = -1$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$



Como P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+).

Es decir: x ∈ <-3,-2> U <-1,1> U <2,+∞>

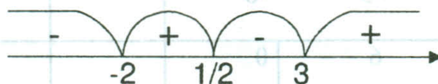
(2) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 < 0$

Solución

Hallaremos las raíces de la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

2	-3	-11	6	-2
	-4	14	-6	
2	-7	3	0	3
	6	-3		
2	-1	0		½
	1			
2	0			

Luego las raíces del polinomio son: $r_1 = -2$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $r_3 = 3$



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-). Es decir: $x \in < -\infty,-2 > U < \frac{1}{2},3 >$

2° Caso.- Si algunas de las raíces del polinomio P(x) = 0 son reales de multiplicidad de orden mayor que 1 se tiene:

a) Cuando el orden de la multiplicidad de una de las raíces del polinomio P(x) = 0 es par, en este caso a la raíz no se considera para la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo proceso del 1° caso.

b) Cuando el orden de la multiplicidad de una de las raíces del polinomio P(x) = 0, es impar, en este caso a la raíz se considera para la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo proceso del 1° caso.

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes.

① $(x-1)^2(x+2)(x+4)>0$

Solución

Resolviendo la ecuación $(x-1)^2(x+2)(x+4)=0$, de donde $r_1=-4$, $r_2=-2$, y $r_3=1$, de multiplicidad 2.

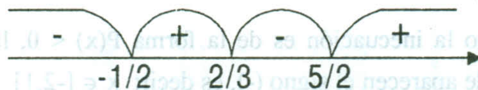


Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: x ∈ <-∞,-4> U <-2,+∞> - {1}

② $(2x+1)(3x-2)^3(2x-5)<0$

Solución

Resolviendo la ecuación $(2x+1)(3x-2)^3(2x-5)=0$, de donde $r_1=-\frac{1}{2}$, $r_2=\frac{2}{3}$ de multiplicidad 3, $r_3=\frac{5}{2}$



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-). Es decir: $x \in \, <-\infty,-\frac{1}{2}> U <\frac{2}{3},\frac{5}{2}>$

3° Caso.- Cuando alguna de las raíces del polinomio P(x) = 0 no son reales, en este caso a estas raíces no se consideran en la determinación de los intervalos y para dar la solución se sigue el mismo procedimiento de los casos anteriores.

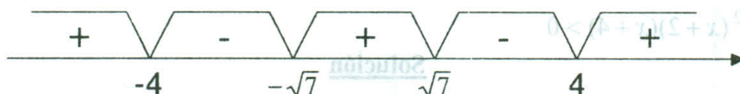
Ejemplo.- Resolver las siguientes inecuaciones.

(1) $(x^2-7)(x^2+16)(x^2-16)(x^2+1)<0$

Solución

Resolviendo la ecuación: $(x^2-7)(x^2+16)(x^2-16)(x^2+1)=0$, de donde

$r_1=-4$, $r_2=-\sqrt{7}$, $r_3=\sqrt{7}$, $r_4=4$, $r_5=-4i$, $r_6=4i$, $r_7=i$, $r_8=-i$



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es de la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in <-4,-\sqrt{7}> U <\sqrt{7},4>$

(2) $(1+x+x^2)(2-x-x^2)\geq 0$

Solución

La inecuación la expresaremos así: $(x^2+x+1)(x^2+x-2)\leq 0$

ahora resolviendo la ecuación $(x^2+x+1)(x^2+x-2)=0$ de donde: $r_1=-2$, $r_2=1$,

$r_3=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $r_4=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: x ∈ [-2,1]

1.30 INECUACIONES FRACCIONARIAS.-

Una inecuación fraccionaria en una incógnita es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \quad \text{ó} \quad \frac{P(x)}{Q(x)}<0, \quad Q(x)\neq 0$$

donde P(x) y Q(x) son monomios o polinomios diferente de cero.

Para resolver una inecuación fraccionaria debe tenerse en cuenta que las inecuaciones:

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ó $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, son equivalentes a las inecuaciones

P(x).Q(x) > 0 ó P(x).Q(x) < 0 es decir: Si $Q(x) \neq 0 \Rightarrow Q^2(x) > 0$, de donde se tiene:

$$\text{Si } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Rightarrow \frac{P(x).Q^2(x)}{Q(x)} > 0.Q^2(x) \Rightarrow P(x).Q(x) > 0$$

$$\text{Si } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Rightarrow \frac{P(x).Q^2(x)}{Q(x)} < 0.Q^2(x) \Rightarrow P(x).Q(x) < 0$$

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)} > 0$

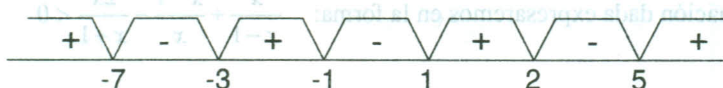
Solución

La inecuación $\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)} > 0$, es equivalente a la siguiente inecuación.

$(x^2-1)(x+3)(x-2)(x-5)(x+7) > 0$, para $x \neq -7, 5$

ahora hallaremos las raíces de la ecuación $(x^2-1)(x+3)(x-2)(x-5)(x+7) = 0$.

De donde $r_1 = -7$, $r_2 = -3$, $r_3 = -1$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$, $r_6 = 5$, que son reales diferentes.



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es decir: $x \in \langle -\infty,-7\rangle \cup \langle -3,-1\rangle \cup \langle 1,2\rangle \cup \langle 5,+\infty\rangle$

(2) $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

Solución

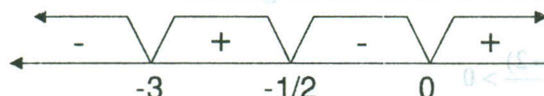
La inecuación dada se expresa en la forma, mayor que cero o menor que cero, es decir:

$$\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+1}{x}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)}<0 \text{, de donde:}$$

$$\frac{-6x-3}{x(x+3)}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+1}{x(x+3)}>0 \text{, que es equivalente a:}$$

x(2x + 1)(x + 3)x > 0, para x ≠ -3,0 ahora encontramos las raíces de la ecuación.

(2x + 1)(x + 3)x = 0, de donde $r_1=-3$, $r_2=-\frac{1}{2}$, $r_3=0$



Como la inecuación es de la forma: (2x + 1)(x + 3)x > 0,

la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in \ <-3,\frac{1}{2}> U <0,+\infty>$$

(3) $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}<\frac{2x}{x+1}$

Solución

La inecuación dada expresaremos en la forma: $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}-\frac{2x}{x+1}<0$

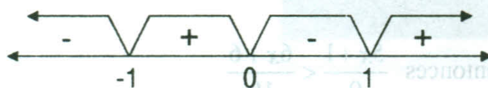
$$\frac{x^2(x+1)+(x-1)(x-1)(x+1)-2x^2(x-1)}{(x-1)x(x+1)}<0 \text{, simplificando}$$

$$\frac{2x^2-x+1}{(x-1)x(x+1)}<0 \text{, que es equivalente a la inecuación.}$$

$(2x^2-x+1)(x-1)x(x+1)<0$, para x ≠ -1,0,1

ahora encontramos las raíces de $(2x^2-x+1)(x-1)x(x+1)=0$, de donde sus raíces son:

$r_1=-1,\ r_2=0,\ r_3=1,\ r_4=\dfrac{1+\sqrt{7}i}{4},\ r_5=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{4}$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: x ∈ <-∞,-1> U <0, 1>

1.31 INECUACIONES EXPONENCIALES.-

Las inecuaciones exponenciales en una incógnita son de la forma:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \vee \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

donde f(x) y g(x) son expresiones en x, a $\in R^+$, a ≠ 1.

Para resolver estas inecuaciones, se consideran dos casos:

1° Caso.- Si a > 1, entonces los exponentes de la inecuación dada son desiguales en el mismo sentido prefijado, es decir:

$$\text{Si } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$
$$\text{Si } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

2° Caso.- Si 0 < a < 1, entonces los exponentes de la inecuación dada son desiguales en sentido contrario al prefijado, es decir:

$$\text{Si } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$
$$\text{Si } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones:

(1) $\sqrt[3]{3^{(5x-1)/3}} < \sqrt{9^{3(x+1)/5}}$

Solución

La inecuación dada es equivalente a: $3^{\frac{5x+1}{9}} < 9^{\frac{3(x+1)}{10}} \Rightarrow 3^{\frac{5x+1}{9}} < 3^{\frac{6x+6}{10}}$

como a $= 3 > 1$ entonces $\frac{5x+1}{9} < \frac{6x+6}{10}$

$50x+10 < 54x+54 \Rightarrow -44 < 4x \Rightarrow x > -11 \Rightarrow x \in \langle -11,+\infty \rangle$

$\therefore$ La solución es: $x \in \langle -11,+\infty \rangle$

(2) $[(0,2)^{(x+1)(x-2)}]^{\frac{1}{x-3}} > \frac{(0.0128)^{3x-1}}{8^{3x-1}}$

Solución

La inecuación dada se puede escribir en la forma:

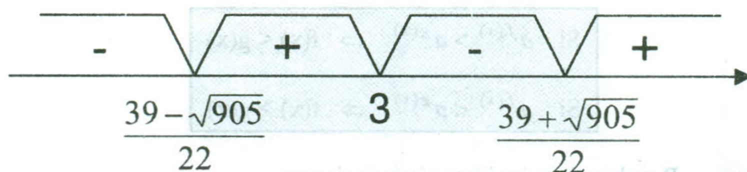
$(0,2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > (\frac{0.0128}{8})^{3x-1}$ de donde: $(0,2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > (0,2)^{12x-4}$,

como a = 0.2 < 1, se tiene: $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} < 12-4 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x-3} - 12x + 4 < 0$

efectuando operaciones y simplificando tenemos: $\frac{11x^2 - 39x + 14}{x-3} > 0$, esta inecuación es equivalente a: $(11x^2 - 39x + 14)(x-3) > 0$ para $x \neq 3$.

Ahora hallando las raíces de : $(11x^2 - 39x + 14)(x-3) = 0$, de donde:

$r_1 = \frac{39-\sqrt{905}}{22}$, $r_2 = 3$, $r_3 = \frac{39+\sqrt{905}}{22}$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+) es decir: $x \in <\frac{39-\sqrt{905}}{22}, 3> U <\frac{39+\sqrt{905}}{22}, +\infty>$

1.32 INECUACIONES IRRACIONALES.-

Las inecuaciones irracionales en una incógnita son de la forma:

$$F(x, \sqrt{P_2(x)}, \sqrt[3]{P_3(x)}, \ldots, \sqrt[n]{P_n(x)}) > 0 \text{ ó } F(x, \sqrt{P_2(x)}, \sqrt[3]{P_3(x)}, \ldots, \sqrt[n]{P_n(x)}) < 0$$

donde $P_2(x), P_3(x), \ldots, P_n(x)$ son monomios o polinomios diferentes de cero.

Para que la solución de la inecuación sea valida debe resolverse antes la condición $P_i(x) \geq 0$, i = 2,3,…,n en las expresiones con una radical par, cuyo conjunto solución constituirá el universo o dentro del cual se resuelve la inecuación dada. Debe observarse que $\sqrt{P(x)}$, quiere decir, $(+\sqrt{P(x)})$ y si se desea la raíz negativa se escribirá expresamente como $(-\sqrt{P(x)})$; es decir:

i) $\forall\ P(x) \geq 0 \quad , \quad \sqrt{P(x)} \geq 0$ **ii)** $\sqrt{P(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$

para resolver las inecuaciones radicales se debe tener en cuenta las siguientes propiedades:

① $0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ ② $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} < \sqrt{y}$

③ $0 \leq x < y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{y}$

④ **i)** Si n es un entero positivo par.

$a_1)\ \forall\ P(x) \geq 0 \ \therefore\ \sqrt[n]{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0$

$a_2)\ \sqrt[n]{P(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$

$a_3)\ \sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) \leq Q(x)$

ii) Si n es entero positivo impar.

$b_1)$ $\sqrt[n]{P(x)} \geq 0 \iff P(x) \geq 0$

$b_2)$ $\sqrt[n]{P(x)} < 0 \iff P(x) < 0$

$b_3)$ $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) \leq Q(x)$

Las propiedades $b_1)$, $b_2)$ indican que $\sqrt[n]{P(x)}$ tienen el mismo signo que P(x) si n es impar.

OBSERVACION.- Cuando en una expresión existen k radicales par entonces se calculan los universos relativos $U_1, U_2, ..., U_k$ para cada radical y el universo general será $U = U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k$.

Daremos algunos ejemplos de ilustración de estas propiedades, para después estudiar las diversas formas de inecuaciones irracionales.

Ejemplos.- Resolver las siguientes inecuaciones

① $\sqrt{x+5} > -2$

Solución

Como $\sqrt{x+5} > -2$ es valida para todo x tal que $x \in U$: $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$ $\Rightarrow U = [-5,+\infty>$, luego el conjunto solución es $[-5,+\infty>$

② $\sqrt{x+7} > 0$

Solución

Como $\sqrt{x+7} > 0$ entonces el conjunto universal es $x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7 \Rightarrow U = [-7,+\infty>$

Además $\sqrt{x+7} > 0 \iff x + 7 > 0 \Rightarrow x \in <-7,+\infty>$.

Luego el conjunto solución es $x \in [-7,+\infty> \wedge <-7,+\infty>$ $\therefore$ $x \in <-7,+\infty>$

③ $\sqrt{x-5} \leq 0$

Solución

Como $\sqrt{x-5} \leq 0$, el conjunto universal es $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow U = [5,+\infty>$ y como $0 \leq \sqrt{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 0 \Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow x = 5 \in U$, luego el conjunto solución es $\{5\}$.

④ $\sqrt{x-8} < 0$

Solución

Como $\sqrt{x-8} < 0$ es absurdo entonces la solución es ϕ.

⑤ $\sqrt{x+9} \geq 0$

Solución

Como $\sqrt{x+9} \geq 0$ es verdadero $\forall\ x \in U$: $x + 9 \geq 0$ es decir $U = [-9,+\infty>$, luego el conjunto solución es $x \in [-9,+\infty>$.

⑥ $\sqrt{8-2x} < \sqrt{13}$

Solución

El conjunto universal es $8 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ de donde $U = <-\infty,4]$.

$\sqrt{8-2x} < \sqrt{13} \Leftrightarrow 8 - 2x < 13 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$ de donde $x \in [-\frac{5}{2},+\infty>$. Luego el conjunto solución es: $U \cap [-\frac{5}{2},+\infty> = [-\frac{5}{2},4]$

⑦ $\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} > -3$

Solución

Calculando los universos relativos.

U_1: $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3,+\infty>$

U_2: $4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow x \in <-\infty,4]$

$U = U_1 \cap U_2 = [-3,+\infty> \cap <-\infty,4] = [-3,4]$

como la suma de dos positivos es siempre mayor que un negativo.

$\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} > -3$ es valido $\forall\ x \in U = [-3,4]$.

(8) $\sqrt{x-7} > 3$

Solución

Sea U: $x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow x \in [7,+\infty>$

$\sqrt{x-7} > 3 \Leftrightarrow x-7 > 9 \Rightarrow x > 16 \Rightarrow x \in <16,+\infty>$

el conjunto solución es $x \in U \cap <16,+\infty> = <16,+\infty>$

(9) $-\sqrt{x-5} > 0$

Solución

$-\sqrt{x-5} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} < 0$ el conjunto solución es ϕ.

(10) $\sqrt{x^2-x-12} \leq \sqrt{x^2-6x+5}$

Solución

Calculando los universos relativos.

$U_1: \ x^2-x-12 \geq 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) \geq 0$

+ -3 - 4 +

$U_1 = <-\infty,-3] \ U \ [4,+\infty>$

$U_2: \ x^2-6x+5 \geq 0 \Rightarrow (x-5)(x-1) \geq 0$

+ 1 - 5 +

$U_2 = <-\infty,1] \ U \ [5,+\infty>$

$U = U_1 \cap U_2 = <-\infty-3] \ U \ [5,+\infty>$

$\sqrt{x^2-x-12} \leq \sqrt{x^2-6x+5} \Leftrightarrow x^2-x-12 \leq x^2-6x+5$

de donde $5x \leq 17 \Rightarrow x \leq \frac{17}{5} \Rightarrow x \in <-\infty,\frac{17}{5}]$

Luego el conjunto solución es: $x \in U \ \Lambda \ <-\infty,\frac{17}{5}] = <-\infty,-3]$

(11) $\frac{\sqrt[3]{x^2-4}(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)^3(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$

Solución

Como $\sqrt[3]{x^2-4}$ tiene el mismo signo que x^2-4 y $(x+4)^3$ tiene el mismo signo que x + 4 entonces la inecuación dada es equivalente.

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-4}(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)^3(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-4)(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$$

Como $\forall$ x $\in$ R, $(x-2)^2 \geq 0$ entonces

$$\frac{(x^2-4)(x-2)^2(x^3-13x+12)}{(x+4)(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-4)(x^3-13x+12)}{(x+4)(x^3+8x^2+4x-48)} \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(x-1)(x^2+x-12)}{(x+4)(x-2)(x+6)(x+4)} \geq 0, \text{ para } x \neq 2, -4$$

$$\frac{(x+2)(x-1)(x+4)(x-3)}{(x+6)} \geq 0, \text{ para } x \neq 2, -4$$



Luego el conjunto solución es: x $\in$ <-6,-4] U [-2,1] U [3,+∞>

(12) $$\frac{\sqrt[5]{x+7}(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}\sqrt[4]{10-x}}{\sqrt[6]{x+9}(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)} \leq 0$$

Solución

Los radicales pares nos da el universo U. $10-x \geq 0 \wedge x+9>0 \Rightarrow x \leq 10 \wedge x > -9$

x $\in$ <-9,10] $\Rightarrow$ U = <-9,10]

(no se incluye el –9 por que anula al denominador)

como los radicales pares son positivos la inecuación es equivalente a:

$$\frac{\sqrt[5]{x+7}\,(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}\,\sqrt[4]{10-x}}{\sqrt[6]{x+9}\,(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[5]{x+7}\,(x+2)^4(x+3)\sqrt[3]{x^2-7x+12}}{(x-8)^3(x^3-27)(x^2-14x+48)}\le 0$$

como los radicales impares tienen el mismo signo que las cantidades subradicales entonces:

$$\frac{(x+7)(x+2)^4(x+3)(x^2-7x+12)}{(x-8)^3(x-3)(x^2+3x+9)(x-6)(x-8)}\le 0\text{ , como para todo x} \in R \quad (x+2)^4\ge 0$$

$$\frac{(x+7)(x+3)(x-3)(x-4)}{(x-8)^3(x-3)(x-6)(x-8)}\le 0\text{ , para } x\neq 3,8 \text{ simplificando tenemos}$$

$$\frac{(x+7)(x+3)(x-4)}{x-6}\le 0\text{ ,} \quad x\neq 3,8$$

+ -7 - -3 + 4 - 6 +

x ∈ [-7,-3] U [4,6> luego el conjunto solución es: x ∈ U ∩ ([-7,-3] U [4,6>)

∴ x ∈ [-7,-3] U [4,6>

ahora veremos como resolver diversas formas de la inecuación con radicales aplicando criterios de acuerdo a cada tipo de inecuación irracional.

1° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)}>Q(x)$. La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)}>Q(x)\Leftrightarrow (P(x)\ge 0\ \Lambda\ [Q(x)\le 0\ \text{V}\ (P(x)\ge 0\ \Lambda\ P(x)>Q^2(x))])$$

b) $\sqrt{P(x)}\ge Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)}\ge Q(x)\ \Leftrightarrow [P(x)\ge 0\ \Lambda\ (Q(x)\le 0\ \text{V}\ [P(x)\ge 0\ \Lambda\ P(x)\ge Q^2(x)])]$$

2° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)}<Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)}<Q(x)\quad\Leftrightarrow\quad [(P(x)\ge 0\ \Lambda\ (Q(x)>0\ \Lambda\ P(x)<Q^2(x))]$$

b) $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \geq 0 \ \wedge \ [Q(x) \geq 0 \ \wedge \ P(x) \leq Q^2(x)]$$

3° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

a) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) > 0 \ \wedge \ Q(x) > 0$$

b) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) \geq 0 \ \wedge \ Q(x) \geq 0$$

4° Para la inecuación irracional de la forma:

$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K$, $K > 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K \quad \Rightarrow \quad [(P(x) \geq 0 \ \wedge \ Q(x) \geq 0) \ \wedge \ P(x) \geq (k - \sqrt{Q(x)})^2]$$

5° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = 0 \ \wedge \ Q(x) = 0$$

OBSERVACION.-

Consideremos otros casos más generales.

1° Caso.- Si n es impar positivo mayor que uno.

a) $$\frac{P(x)\sqrt[n]{Q(x)}}{R(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(x).Q(x)}{R(x)} \geq 0$$

b) $$\frac{P(x)}{R(x)\sqrt[n]{Q(x)}} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(x)}{R(x)Q(x)} \leq 0$$

c) $\sqrt[n]{P(x)} \le \sqrt[n]{Q(x)} \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \le Q(x)$

2° Caso.- Si n es par positivo

a) $\sqrt[n]{P(x)}Q(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \ge 0 \;\; \wedge \;\; Q(x) \ge 0$

b) $\sqrt[n]{P(x)}Q(x) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \ge 0 \;\; \wedge \;\; Q(x) \le 0$

c) $\dfrac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}R(x)} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(x) > 0 \;\; \wedge \;\; \dfrac{P(x)}{R(x)} \ge 0$

d) $\dfrac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}R(x)} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(x) > 0 \;\; \wedge \;\; \dfrac{P(x)}{R(x)} \le 0$

e) $\sqrt[n]{P(x)} \ge Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \ge 0 \wedge [Q(x) \le 0 \vee (P(x) \ge 0 \wedge Q(x) \ge 0 \wedge P(x) \ge Q^n(x))]$

f) $\sqrt[n]{P(x)} \le Q(x) \Leftrightarrow P(x) \ge 0 \wedge [Q(x) \ge 0) \wedge P(x) \le Q^n(x)]$

Ejemplo.- Resolver las siguientes inecuaciones

(1) $\sqrt{x^2 - 14x + 13} \ge x - 3$

Solución

$$\sqrt{x^2 - 14x + 13} \ge x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 13 \ge 0 \wedge [x - 3 \le 0 \vee$$

$$(x^2 - 14x + 13 \ge 0 \wedge x^2 - 14x + 13 \ge (x-3)^2)]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 13 \ge 0 \wedge [x \le 3 \vee (x^2 - 14x + 13 \ge 0 \wedge x \le \frac{1}{2})]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 13 \ge 0 \wedge [x \le 3 \vee x \in \langle -\infty, 1] \cup [13, \infty\rangle \wedge x \le \frac{1}{2}]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 13 \ge 0 \wedge [x \le 3 \vee x \le \frac{1}{2}]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 13 \ge 0 \wedge x \le 3$$

$\Leftrightarrow\ (x-13)(x-1)\geq 0 \ \wedge \ x\leq 3$

$\Leftrightarrow\ x\in \langle -\infty,1] \cup [13,+\infty\rangle \ \wedge \ x\leq 3$ $\quad\therefore\ x\in \langle -\infty,1]$

(2) $\sqrt{x^2-14x+13} < x+1$

Solución

Aplicando la parte b) del 1° caso:

$$\sqrt{x^2-14x+13} < x+1 \Leftrightarrow (x^2-14x+13\geq 0 \ \wedge \ [x+1>0) \ \wedge \ (x^2-14x+13<(x+1)^2])$$

$$\Leftrightarrow ((x-13)(x-1)\geq 0 \ \wedge [x>-1) \ \wedge \ ((x-13)(x-1)<(x+1)^2])$$

$$\Leftrightarrow ((x-13)(x-1)\geq 0 \ \wedge \ [x>-1) \ \wedge \ x>\frac{3}{4}]$$

$$\Leftrightarrow x\in \langle -1,1] \cup [13,+\infty\rangle \ \wedge \ x>\frac{3}{4}]$$

$$\Leftrightarrow x\in \langle \frac{3}{4},1] \cup [13,+\infty\rangle$$

(3) $\sqrt{\dfrac{2x-8}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{5-x}{x+3}}\geq 0$

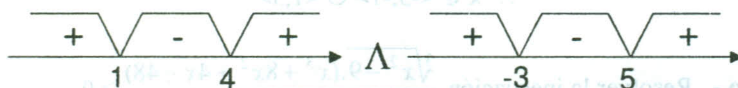
Solución

Aplicando la parte b), del 3° caso: $\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}\geq 0 \ \Leftrightarrow \ P(x)\geq 0 \ \wedge \ Q(x)\geq 0$

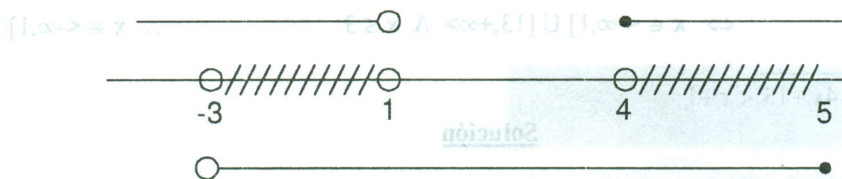
$$\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}}+\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}\geq 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{2x-8}{x-1}\geq 0 \ \wedge \ \frac{5-x}{x+3}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ (x-4)(x-1)\geq 0,\ x\neq 1 \ \wedge \ (5-x)(x+3)\geq 0,\ x\neq 3$$

$$\Leftrightarrow \ (x-4)(x-1)\geq 0,\ x\neq 1 \ \wedge \ (x-5)(x+3)\leq 0,\ x\neq -3$$



x ∈ <-∞,1> U [4,∞> Λ x ∈ <-3,5]



La solución es: x ∈ <-3,1> U [4,5]

OBSERVACION.- Si n es un numero positivo impar, entonces:

① $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \leq Q(x)$ ② $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) < Q(x)$

③ $\sqrt[n]{P(x)} \geq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \geq Q(x)$ ④ $\sqrt[n]{P(x)} > \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) > Q(x)$

Ejemplo.- Resolver la inecuación $\frac{\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[4]{x^2-1}\sqrt[5]{x+5}} > 0$

Solución

El conjunto de referencia o conjunto universal se obtiene del radical par y diferente de cero: $x^2-1>0$, dé donde $x^2>1 \Rightarrow x>1 \vee x<-1 \therefore x \in$ <-∞,-1> ∪ <1,+∞> luego el radical par resulta positivo y puede simplificar quedando la inecuación $\frac{\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt[3]{x+5}} > 0$, que de acuerdo a las observaciones, las expresiones del subradical tiene el mismo signo $\frac{3-x}{x+5} > 0$, de donde $\frac{x-3}{x+5} < 0$

+ -5 - 3 +

x ∈ <-5,3>

Luego la solución de la inecuación es: x ∈ <-5,3> ∩ (<-∞,-1> ∪ <1,+∞>)

∴ x ∈ <-5,-1> ∪ <1,3>

Ejemplo.- Resolver la inecuación $\frac{\sqrt[3]{x^2-9}.(x^3+8x^2+4x-48)}{(x+4)^5(x^3-13x+12)} \geq 0$

Solución

De acuerdo a las observaciones indicadas se tiene que $\sqrt[3]{x^2-9}$ tiene el mismo signo que x^2-9 y que $(x+4)^5$ tiene el mismo signo que x + 4, por lo tanto la inecuación dada resulta equivalente a la inecuación:

$$\frac{(x^2-9)(x^3+8x^2+4x-48)}{(x+4)(x^3-13x+12)} \geq 0 \quad \text{factorizando el numerador y el denominador}$$

$$\frac{(x+3)(x-3)(x-2)(x+6)(x+4)}{(x+4)(x-1)(x+4)(x-3)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+3)(x-2)(x+6)(x+4)}{(x+4)^2(x-1)} \geq 0\,,\ x \neq 3$$

$$\frac{(x+3)(x-2)(x+6)(x+4)}{x-1} \geq 0$$

- + - + - +

-6 -4 -3 1 2

$\therefore$ x $\cup$ [-6,-4] $\cup$ [-3,1> $\cup$ [2,+∞> - {3}

OBSERVACION.- Si n es un numero positivo par, entonces:

① $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) \leq Q(x)$ ② $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) < Q(x)$

Ejemplo.- $\sqrt{\dfrac{32-2x}{x+2}} \geq \sqrt{x}$

Solución

Aplicando la observación a) se tiene:

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{\frac{32-2x}{x+2}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{32-2x}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \ \wedge \ x \leq \frac{32-2x}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \ \wedge \ x - \frac{32-2x}{x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^2+4x-32}{x+2} \leq 0$$

$\Leftrightarrow\ x \geq 0 \ \wedge\ \dfrac{(x+8)(x-4)}{x+2} \leq 0$

- + - +
-8 -2 4

$\Leftrightarrow\ x \geq 0 \ \wedge\ x \in \langle -\infty,-8] \cup \langle -2,4]$ $\qquad \therefore\ x \in [0,4]$

1.33 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Resolver la inecuación cuadrática: $-4x^2 + 4x + 3 > 0$

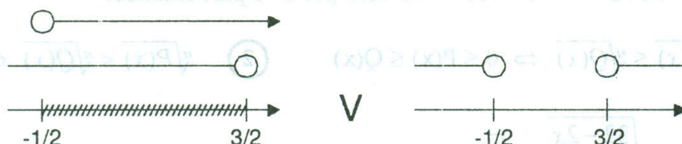
Solución

La inecuación dada expresaremos en la forma: $4x^2 - 4x - 3 < 0$

factorizando $(2x + 1)(2x - 3) < 0$, aplicando la propiedad de números reales:

$(2x + 1)(2x - 3) < 0 \Leftrightarrow (2x + 1 > 0 \ \wedge\ 2x - 3 < 0) \ \vee\ (2x + 1 < 0 \ \wedge\ 2x - 3 > 0)$

$$\Leftrightarrow\ (x > -\frac{1}{2} \ \wedge\ x < \frac{3}{2}) \ \vee\ (x < -\frac{1}{2} \ \wedge\ x > \frac{3}{2})$$



La solución es: $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$

Ahora resolvemos mediante la naturaleza de las raíces la ecuación $4x^2 - 4x - 3 = 0$, de donde $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{3}{2}$



Como la inecuación es de la forma $4x^2 - 4x - 3 < 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$

(2) $x^5 + 8x^4 + 12x^3 - x^2 - 8x - 12 > 0$

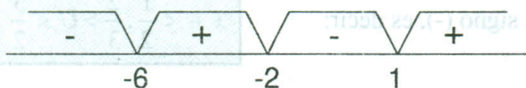
Solución

Aplicaremos el criterio de las raíces de la ecuación: $x^5+8x^4+12x^3-x^2-8x-12=0$

1	8	12	-1	-8	-12	1
	1	9	21	20	12	
1	9	21	20	12	0	-2
	-2	-14	-14	-12		
1	7	7	6	0		-6
	-6	-6	-6			
1	1	1	0			

La ecuación que queda es: $x^2+x+1=0$, cuyas raíces son:

$r=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. Luego las raíces reales son: $r_1=-6$, $r_2=-2$, $r_3=1$



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+), es decir: $x \in \langle -6,-2\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$

(3) $12x^4-56x^3+89x^2-56x+12<0$

Solución

Encontrando las raíces de la ecuación

$12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$ dividiendo entre x^2

$$12x^2-56x+89-\frac{56}{x}+\frac{12}{x^2}=0 \Rightarrow 12(x^2+\frac{1}{x^2})-56(x+\frac{1}{x})+89=0 \quad \ldots (1)$$

Sea $z=x+\dfrac{1}{x} \Rightarrow z^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2 \Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=z^2-2$

Reemplazando en la ecuación **(1)** se tiene:

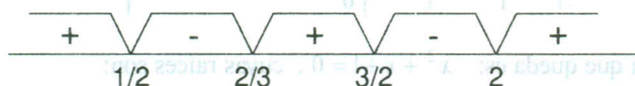
$12(z^2-2)-56z+89=0$, entonces: $12z^2-56z+65=0 \Rightarrow (6z-13)(2z-5)=0$

de donde $z=\frac{13}{6}$, $z=\frac{5}{2}$

para $z=\frac{13}{6} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6} \Rightarrow 6x^2-13x+6=0$, de donde $r_1=\frac{3}{2}$, $r_2=\frac{2}{3}$

para $z=\frac{5}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0$, de donde $r_3=\frac{1}{2}$, $r_4=2$

ordenando las raíces en la recta numérica



Como la inecuación es de la forma P(x) < 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in <\frac{1}{2},\frac{2}{3}> U <\frac{3}{2},2>$

4 x(2x + 1)(x – 2)(2x – 3) > 63

Solución

Hallaremos las raíces de la ecuación:

x(2x + 1)(x – 2)(2x – 3) – 63 = 0, entonces x(2x – 3)(2x + 1)(x – 2) – 63 = 0

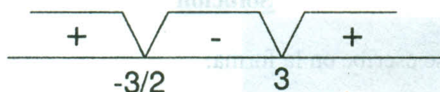
$(2x^2-3x)(2x^2-3x-2)-63=0$

Sea $z=2x^2-3x \Rightarrow z(z-2)-63=0$

$z^2-2z-63=0 \Rightarrow (z-9)(z+7)=0$, de donde z = 9, z = -7, entonces:

Para $z=9 \Rightarrow 9=2x^2-3x \Rightarrow 2x^2-3x-9=0$, de donde: $r_1=-\frac{3}{2}$, $r_2=3$

Para z = -7 ⇒ $-7 = 2x^2 - 3x$ ⇒ $2x^2 - 3x + 7 = 0$, de donde: $r = \frac{3 \pm \sqrt{47}i}{4}$



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -\frac{3}{2} \rangle U \langle 3, +\infty \rangle$

(5) $\frac{x}{1-x} \le \frac{x-3}{2-x}$

Solución

La inecuación dada se escribe en la forma:

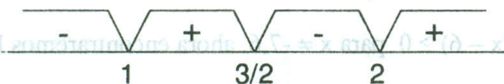
$$\frac{x}{1-x} - \frac{x-3}{2-x} \le 0 \Rightarrow \frac{x(2-x)-(x-3)(1-x)}{(1-x)(2-x)} \le 0$$, simplificando

$$\frac{-2x+3}{(1-x)(2-x)} \le 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \ge 0$$, entonces la inecuación

$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \ge 0$, es equivalente a la inecuación

$(2x-3)(x-1)(x-2) \ge 0$ para $x \ne 1,2$ encontrando las raíces de la ecuación

$(2x-3)(x-1)(x-2) = 0$, se tiene: $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{3}{2}$, $r_3 = 2$



como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle 1, \frac{3}{2}] U \langle 2, +\infty \rangle$

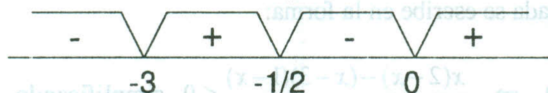
(6) $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

Solución

La inecuación dada se escribe en la forma:

$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)} < 0$, simplificando

$\frac{-6x-3}{x(x+3)} < 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+3)} > 0$, entonces la inecuación $\frac{2x+1}{x(x+3)} > 0$ es equivalente a la inecuación (2x + 1)x(x + 3) > 0, para $x \neq -3,0$, ahora encontraremos las raíces de la ecuación: (2x + 1)(x + 3)x = 0, de donde $r_1 = -3$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, $r_3 = 0$.



Como la inecuación P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es decir: $x \in <-3,\frac{1}{2}> U <0,+\infty>$

(7) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0$

Solución

$\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x+7)(x-6)} \geq 0$, esta inecuación es equivalente a:

(x–2)(x–3)(x + 7)(x – 6) ≥ 0 para $x \neq -7,6$, ahora encontraremos las raíces de la ecuación.

(x – 2)(x – 3)(x + 7)(x – 6) = 0, donde $r_1 = -7$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 6$.



Como la ecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup [2,3] \cup \langle 6, +\infty\rangle$

(8) $\frac{-x^3 + x^2 + 22x - 40}{x(x+7)} \geq 0$

Solución

La inecuación dada escribiremos en la forma:

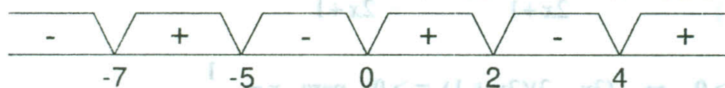
$$\frac{x^3 - x^2 - 22x + 40}{x(x+7)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)(x+5)}{x(x+7)} \leq 0$$

La inecuación $\frac{(x-2)(x-4)(x+5)}{x(x+7)} \leq 0$, es equivalente a:

$(x-2)(x-4)(x+5)x(x+7) \leq 0$, para $x \neq -7, 0$

ahora encontramos las raíces de la ecuación

$(x-2)(x-4)(x+5)x(x+7) = 0$ de donde: $r_1 = -7$, $r_2 = -5$, $r_3 = 0$, $r_4 = 2$, $r_5 = 4$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup [-5, 0\rangle \cup [2,4]$

(9) $1 + \frac{24 - 4x}{x^2 - 2x - 15} > 0$

Solución

La inecuación dada escribiremos en la forma: $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 15} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{(x-5)(x+3)} > 0$

pero $(x-3)^2 > 0$, $x \neq 3$, entonces: $\dfrac{(x-3)^2}{(x-5)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-5)(x+3)} > 0$ para $x \neq 3$

$\dfrac{1}{(x-5)(x+3)} > 0$, $x \neq -3, 5 \Leftrightarrow (x-5)(x+3) > 0$, para $x \neq -3, 5$.

ahora encontraremos las raíces de $(x-5)(x+3) = 0$, de donde $r_1 = -3$, $r_2 = 5$.



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 5, \infty \rangle - \{3\}$

⑩ $\dfrac{3x+5}{2x+1} \leq 3$

Solución

A la inecuación dada escribiremos en la forma:

$$\frac{3x+5}{2x+1} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+2}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{2x+1} \geq 0$$

$$\frac{3x-2}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow (3x-2)(2x+1) = \geq 0, \text{ para } x \neq -\frac{1}{2}$$

ahora encontramos las raíces de: $(3x-2)(2x+1) = 0$, donde $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{2}{3}$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle \cup [\frac{2}{3}, +\infty \rangle$

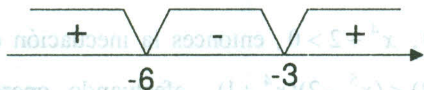
(11) $\dfrac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6} \geq 0$

Solución

$$\frac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6} \geq 0 \iff \frac{2(x-2)^2(x+3)}{x+6} \geq 0, \ (x-2)^2 \geq 0, \ \forall \, x \in R$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x+6} \geq 0 \iff (x+3)(x+6) \geq 0, \text{ para } x \neq -6$$

Luego las raíces de $(x + 3)(x + 6) = 0$ son $r_1 = -6$, $r_2 = -3$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -6\rangle \cup [-3, +\infty\rangle$

(12) $\dfrac{(1-x-x^2)(2-x-x^2)}{(3-x)(2-x)} \geq 0$

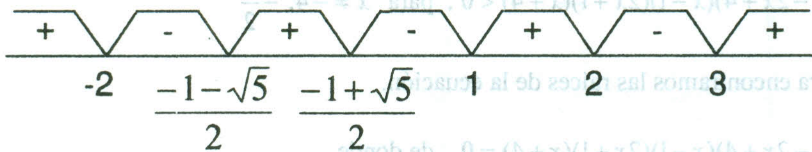
Solución

$$\frac{(1-x-x^2)(2-x-x^2)}{(3-x)(2-x)} \geq 0 \iff \frac{(x^2+x-1)(x^2+x-2)}{(x-3)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2+x-1)(x^2+x-2)}{(x-3)(x-2)} \geq 0 \iff (x^2+x-1)(x^2+x-2)(x-3)(x-2) \geq 0, \text{ para } x \neq 2,3$$

ahora encontramos las raíces de: $(x^2+x-1)(x^2+x-2)(x-3)(x-2) = 0$, dé donde

$r_1 = -2$, $r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $r_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$, $r_6 = 3$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

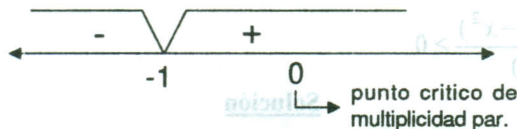
$$x \in \langle -\infty,-2] U [\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}] U [1,2\rangle U \langle 3,+\infty\rangle$$

(13) $\frac{x^5-1}{x^4+1} < \frac{x^5-2}{x^4+2}$

Solución

$\forall$ x $\in$ R, $x^4+1>0$, $x^4+2>0$, entonces la inecuación dada se puede escribir en la forma: $(x^5-1)(x^4+2)<(x^5-2)(x^4+1)$, efectuando operaciones y simplificando se tiene: $x^4(x+1)<0$, luego encontrando las raíces de

$x^4(x+1)=0$ se tiene $r_1=-1$, $r_2=0$, multiplicidad 4.



Como la inecuación es de la forma p(x) < 0, la solución es: $x \in \langle -\infty,-1\rangle$

(14) $\frac{(x^2-2x+4)(x-1)}{(2x+1)(x+4)} < 0$

Solución

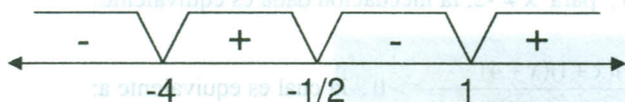
La inecuación $\frac{(x^2-2x+4)(x-1)}{(2x+1)(x+4)} < 0$, es equivalente a:

$(x^2-2x+4)(x-1)(2x+1)(x+4) < 0$, para $x \neq -4, -\frac{1}{2}$

ahora encontramos las raíces de la ecuación.

$(x^2-2x+4)(x-1)(2x+1)(x+4)=0$, de donde.

$r_1 = -4\ ,\ r_2 = -\dfrac{1}{2}\ ,\ r_3 = 1\ ,\ r_4 = 1+\sqrt{3}i\ ,\ r_5 = 1-\sqrt{3}i$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in <-\infty,-4> U <-\dfrac{1}{2},1>$

(15) $\dfrac{x+5}{x-6} \le \dfrac{x-1}{x-3}$

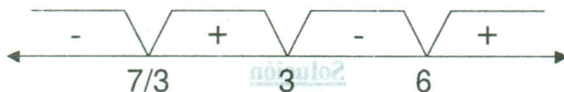
Solución

$\dfrac{x+5}{x-6} \le \dfrac{x-1}{x-3} \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x-6} - \dfrac{x-1}{x-3} \le 0$, efectuando operaciones se tiene:

$\dfrac{3x-7}{(x-6)(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow (3x-7)(x-6)(x-3) \le 0,\ x \ne 3,6$

ahora encontramos las raíces de la ecuación

$(3x-7)(x-6)(x-3)=0$, de donde $r_1 = \dfrac{7}{3}\ ,\ r_2 = 3\ ,\ r_3 = 6$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \le 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-), es decir: $x \in <-\infty,\dfrac{7}{3}]\ U <3,6>$

(16) $\dfrac{(x-3)(x+2)^2(x+1)(x-4)}{x(x+2)(x^2-3)(x+3)} > 0$

Solución

$(x+2)^2 > 0$, para $x \neq -2$, la inecuación dada es equivalente.

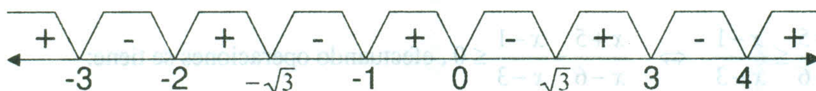
$$\frac{(x-3)(x+1)(x+4)}{(x+2)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} > 0\text{, la cual es equivalente a:}$$

$$(x-3)(x+1)(x-4)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2) > 0\ ,\ x \neq 0, -3, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

ahora encontramos las raíces de la ecuación,

$$(x+2)(x-3)(x+1)(x-4)x(x+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0\text{, de donde}$$

$r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = -\sqrt{3}$, $r_4 = -1$, $r_5 = 0$, $r_6 = \sqrt{3}$, $r_7 = 3$, $r_8 = 4$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle \sqrt{3}, 3 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$$

(17) $\frac{x-2}{x+2} < \frac{x^2}{x^2+2}$

Solución

$$\frac{x-2}{x+2} < \frac{x^2}{x^2+2} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} - \frac{x^2}{x^2+2} < 0\text{, de donde}$$

$$\frac{-4x^2+2x-4}{(x+2)(x^2+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x+2}{(x+2)(x^2+2)} > 0$$

$\forall$ x$\in$R, $2x^2 - x + 2 > 0$ y $x^2 + 2 > 0$, entonces se simplifica la inecuación $\frac{1}{x+2} > 0$

Luego $\frac{1}{x+2} > 0 \iff x+2>0$, para $x \neq -2$. La solución es: $x \in \langle -2, +\infty \rangle$

(18) $\frac{x+4}{x-7} > \frac{x}{x+1}$

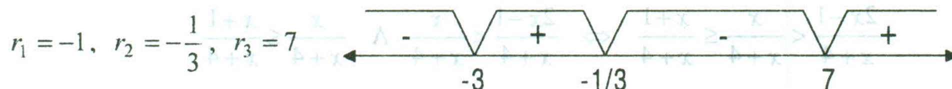
Solución

$\frac{x+4}{x-7} > \frac{x}{x+1} \iff \frac{x+4}{x-7} - \frac{x}{x+1} > 0$, de donde

$\frac{12x+4}{(x-7)(x+1)} > 0 \iff (3x+1)(x-7)(x+1) > 0$, para $x \neq -1, 7$

ahora encontramos las raíces de la ecuación $(3x+1)(x-7)(x+1) = 0$, de donde

$r_1 = -1,\ r_2 = -\frac{1}{3},\ r_3 = 7$



Como la solución es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen los intervalos donde aparece el signo (+), es decir:

$$x \in \langle -1, -\frac{1}{3} \rangle \cup \langle 7, +\infty \rangle$$

(19) $\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4} > 1$

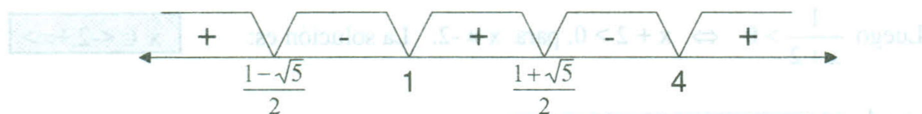
Solución

$\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4} > 1 \iff \frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4} - 1 > 0$, de donde

$\frac{x^2-x-1}{x^2-5x+4} > 0 \iff (x^2-x-1)(x^2-5x+4) > 0$ para $x \neq 1, 4$;

ahora hallaremos las raíces de la ecuación.

$(x^2-x-1)(x^2-5x+4) = 0$, de donde $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ r_2 = 1,\ r_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ r_4 = 4$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x\in\langle-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\rangle U\langle 1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\rangle U\langle 4,+\infty\rangle$

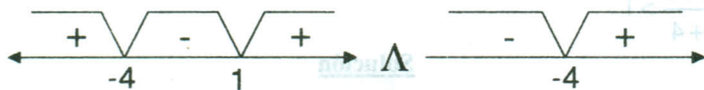
(20) $\frac{2x-1}{x+4}<\frac{x}{x+4}\leq\frac{x+1}{x+4}$

Solución

$$\frac{2x-1}{x+4}<\frac{x}{x+4}\leq\frac{x+1}{x+4} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+4}<\frac{x}{x+4} \wedge \frac{x}{x+4}\leq\frac{x+1}{x+4}$$

$\frac{2x-1}{x+4}-\frac{x}{x+4}<0 \wedge \frac{x}{x+4}-\frac{x+1}{x+4}\leq 0$, de donde $\frac{x-1}{x-4}<0 \wedge \frac{1}{x+4}\geq 0$, estas ecuaciones son equivalentes a:

(x − 1)(x + 4) < 0 Λ x + 4 ≥ 0, para x ≠ -4 ahora encontraron las raíces de las ecuaciones, (x − 2)(x + 4) = 0 Λ x + 4 = 0, de donde $r_1=-4$, $r_2=1$ Λ $r_3=-4$



de acuerdo a la forma de la inecuación la solución es: x ∈ <-4,1> Λ x ∈ [-4,+∞>

∴ x ∈ <-4,1>

(21) $\sqrt{x^2-x-2}<5-x$

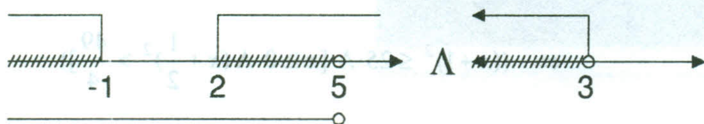
Solución

Aplicando la propiedad: $\sqrt{P(x)}<Q(x) \Leftrightarrow (P(x)\geq 0 \wedge [Q(x)\geq 0) \wedge (P(x)<Q^2(x)])$

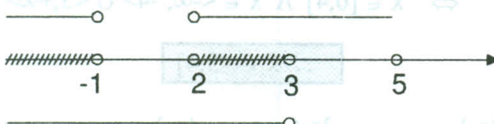
$$\sqrt{x^2-x-2}<5-x \Leftrightarrow (x^2-x-2\geq 0 \wedge [5-x\geq 0 \wedge x^2-x-2<(5-x)^2])$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\geq 0 \wedge [5-x\geq 0 \wedge x^2-x-2<25-10x+x^2])$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)\geq 0 \wedge (x\leq 5 \wedge x<3)$$



x ∈ <-∞,-1] U [2,5] Λ x ∈ <-∞,3>



La solución es: **x ∈ <-∞,-1] U [2,3>**

(22) $\sqrt[4]{(0.8)^{\frac{3x-4}{4}}} > \sqrt[8]{(0.64)^{\frac{2x-2}{5}}}$

Solución

La inecuación dada es equivalente a: $(0.8)^{\frac{3x-4}{16}} > (0.8)^{\frac{4x-4}{40}}$

como a = 0.8 < 1, entonces los exponentes son desiguales en sentido contrario, es decir:

$\frac{3x-4}{16} < \frac{4x-4}{40}$, efectuando y simplificando.

$\frac{3x-4}{8} < \frac{x-1}{5} \Rightarrow x < \frac{12}{7}$, la solución es: $x \in \langle -\infty, \frac{12}{7} \rangle$

(23) $\sqrt{24-2x-x^2} < x$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente:

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow (P(x)\geq 0 \wedge [Q(x)\geq 0 \wedge P(x)<Q^2(x)])$$

$$\sqrt{24-2x-x^2}<x \Leftrightarrow (24-2x-x^2\geq 0 \wedge [x\geq 0 \wedge 24-2x-x^2<x^2])$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x\leq 24 \wedge [x\geq 0 \wedge 2x^2+2x>24])$$

$$\Leftrightarrow ((x+1)^2\leq 25 \wedge [x\geq 0 \wedge (x+\frac{1}{2})^2>\frac{49}{4}])$$

$$\Leftrightarrow (-6\leq x\leq 4 \wedge [x\geq 0 \wedge (x>3 \vee x<-4)])$$

$\Leftrightarrow$ x ∈ [0,4] $\wedge$ x ∈ <-∞, -4> U <3,+∞>

∴ x ∈ <3,4]

(24) $(0.25)^{\frac{6x-4}{3}}.(0.5)^{\frac{2x-3}{4}}<(0.0625)^{\frac{3x-4}{6}}.(0.125)^{\frac{4x-2}{9}}$

Solución

La inecuación dada es equivalente a: $(0.5)^{\frac{12x-8}{3}}.(0.5)^{\frac{2x-3}{4}}<(0.5)^{\frac{6x-8}{3}}.(0.5)^{\frac{4x-2}{3}}$

Operando tenemos: $(0.5)^{\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4}}<(0.5)^{\frac{6x-8}{3}+\frac{4x-2}{3}}$

Como a = 0.5 < 1, entonces los exponentes son desiguales en sentido contrario a la inecuación, es decir: $\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4}>\frac{6x-8}{3}+\frac{4x-2}{3}$

$\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4}>\frac{10x-10}{3}$, simplificando: $\frac{2x+2}{3}+\frac{2x-3}{4}>0 \Rightarrow \frac{8x+8+6x-9}{12}>0$

$14x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{14}$; la solución es: $x\in<\frac{1}{4},+\infty>$

(25) $32\sqrt{2^{x+1}}>(4^{2x}.8^{x-3})^{2/5}$

Solución

La inecuación dada es equivalente a: $2^5.2^{\frac{x+1}{2}}>(2^{4x}.2^{3x-9})^{2/5}$, de donde

$2^{\frac{x+11}{2}} > 2^{\frac{14x-18}{5}}$, como a = 2 > 0, entonces:

$\frac{x+11}{2} > \frac{14x-18}{5} \Rightarrow 5x + 55 > 28x - 36 \Rightarrow x < \frac{91}{23}$. La solución $x \in \langle -\infty, \frac{91}{23} \rangle$

(26) Si $\frac{1}{2} < x < 1$, Demostrar que: $\frac{3}{8} < \frac{x+2}{x+3} < \frac{6}{7}$

Solución

$\frac{x+2}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$ (se obtiene dividiendo)

$$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow \frac{7}{2} < x+3 < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x+3} < \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{7} < -\frac{1}{x+3} < -\frac{1}{4} \Rightarrow 1-\frac{2}{7} < 1-\frac{1}{x+3} < 1-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7} < \frac{x+2}{x+3} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{5}{7} < \frac{x+2}{x+3} < \frac{3}{4} < \frac{6}{7}$$

$$\therefore \frac{3}{8} < \frac{x+2}{x+3} < \frac{6}{7}$$

(27) $\sqrt{1-x} \le \sqrt[4]{5+x}$

Solución

$$\sqrt{1-x} \le \sqrt[4]{5+x} \Leftrightarrow (1-x \ge 0 \land x+5 \ge 0) \land (\sqrt{1-x})^2 \le (\sqrt[4]{x+5})^2$$

$$\Leftrightarrow (x \le 1 \land x \ge -5) \land (1-x \le \sqrt{x+5}) \quad \ldots (1)$$

$$\sqrt{x+5} \ge 1-x \Leftrightarrow [x+5 \ge 0 \land (1-x \le 0 \lor (x+5 \ge 0 \land x+5 > (1-x^2)))]$$

$$\Leftrightarrow [x \ge -5 \land (x \ge 1 \lor (x \ge -5 \land x+5 > 1-2x+x^2))]$$

$$\Leftrightarrow [x \ge -5 \land (x \ge 1 \lor (x \ge -5 \land x^2 - 3x - 4 \le 0))]$$

$$\Leftrightarrow \quad [x \geq -5 \;\Lambda\; (x \geq 1 \vee (x \geq -5 \;\Lambda\; x \in [-1,4]))]$$

$$\Leftrightarrow \quad [x \geq -5 \;\Lambda\; (x \geq 1 \vee \; x \in [-1,4])]$$

$$\Leftrightarrow \quad [x \geq -5 \;\Lambda\; x \geq -1] \;\Rightarrow\; x \geq -1 \;\Rightarrow\; x \in [-1,\infty> \qquad \ldots (2)$$

ahora (2) en (1) se tiene: $(x \leq 1 \;\; \Lambda\; x \geq -5) \;\Lambda\; x \in [-1,+\infty>$

$x \in [-5, 1] \;\Lambda\; x \in [-1,+\infty>$ $\quad \therefore\; x \in [-1,1]$

(28) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x-2} > 9$

Solución

Calculando el campo de existencia $\quad 3x+7 \geq 0 \wedge x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\dfrac{7}{3} \;\Lambda\; x \geq 2$

por lo tanto $x \in [2,+\infty>$ es el campo de existencia

$$\sqrt{3x+7} > 9 + \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \;\Lambda\; [3x+7 < 81 + 18\sqrt{x-2} + x - 2]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \;\Lambda\; (x - 36 < 9\sqrt{x-2})$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \;\Lambda\; x^2 - 153x + 1458 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \;\Lambda\; (x - \frac{153}{2})^2 < \frac{17577}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [2,+\infty> \wedge \frac{153 - \sqrt{17577}}{2} < x < \frac{153 + \sqrt{17577}}{2}$$

$$x \in < \frac{153 - \sqrt{17577}}{2}, \frac{153 + \sqrt{17577}}{2} >$$

(29) $\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2} - \sqrt{x}} \geq 0$

Solución

Calculando el campo de existencia

$(x-1\geq 0 \ \wedge \ x-2\geq 0) \ \wedge \ (9-x^2\geq 0 \ \wedge \ x\geq 0)$

$(x\geq 1 \ \wedge \ x\geq 2) \ \wedge \ (x^2\leq 9 \ \wedge \ x\geq 0)$

$(x\geq 1 \ \wedge \ x\geq 2) \ \wedge \ (-3\leq x\leq 3 \ \wedge \ x\geq 0)$

$x\geq 2 \ \wedge \ 0\leq x\leq 3$, de donde $x\in[2,3]$ es el campo de existencia.

Como $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}>0$, $\forall x\in[2,3]$

$$\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}}\geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\geq 0.\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}$$

simplificando $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}}\geq 0 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}\geq 0$

de donde $\sqrt{x}\leq\sqrt{9-x^2} \ \Rightarrow \ x\leq 9-x^2$

$x^2+x-9\leq 0 \ \Rightarrow \ (x+\frac{1}{2})^2<\frac{37}{4}$ (completando cuadrados)

$$(x+\frac{1}{2})^2<\frac{37}{4} \ \Rightarrow \ -\frac{\sqrt{37}}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{37}}{2} \ \Rightarrow \ -\frac{\sqrt{37}+1}{2}<x<\frac{\sqrt{37}-1}{2}$$

Luego la solución es: $x\in\langle-\frac{\sqrt{37}+1}{2},\frac{\sqrt{37}-1}{2}\rangle\wedge[2,3]$

$$\therefore \ x\in[2,\frac{\sqrt{37}-1}{2}\rangle$$

(30) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

Solución

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x} \ \Leftrightarrow \ (2-\sqrt{3+x}\geq 0 \ \wedge \ 4+x\geq 0) \ \wedge \ (2-\sqrt{3+x}<4+x)$$

$$\Leftrightarrow \ (\sqrt{3+x}\leq 2 \ \wedge \ x\geq -4) \ \wedge \ (\sqrt{3+x}>-x-2) \qquad \textbf{... (1)}$$

$\sqrt{3+x} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad (3+x \ge 0 \ \Lambda \ 3+x \le 4)$

$\Leftrightarrow \quad (x \ge -3 \ \Lambda \ x \le 1) \ \Rightarrow \ x \in [-3,1]$ **... (2)**

$\sqrt{3+x} > -x-2 \ \Leftrightarrow \ x+3 \ge 0 \ \Lambda \ [-x-2 < 0 \ V \ (x+3 \ge 0 \ \Lambda \ x+3 > (x+2)^2)]$

$\Leftrightarrow x \ge -3 \ \Lambda \ [x > -2 \ V \ (x \ge -3 \ \Lambda \ x^2 + 3x + 1 < 0)]$

$\Leftrightarrow \quad x \ge -3 \wedge [x \ge -2 \vee (x \ge 3 \wedge (x + \frac{3}{2})^2 < \frac{5}{4})]$

$\Leftrightarrow \quad x \ge -3 \wedge [x \ge -2 \vee (x \ge 3 \wedge -\frac{\sqrt{5}+3}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-3}{2})]$

$\Leftrightarrow \quad x \ge -3 \wedge [x > -2 \ V \ x \in < -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2} >]$

$\Leftrightarrow \quad x \ge 3 \wedge x \in < -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty >$

$x \in < -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty >$ **... (3)**

Luego de (2), (3) en (1) se tiene:

$\sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{4+x} \quad \Leftrightarrow \quad (x \in [-3,1] \wedge x \ge -4) \wedge x \in < -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty >$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-3,1] \wedge x \in < -\frac{\sqrt{5}+3}{2}, +\infty >$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x \in < -\frac{\sqrt{5}+3}{3}, 1]}$

(31) $\frac{3}{x} \le \frac{13}{4(x-1)} + \frac{1}{4x+12}$

Solución

A la inecuación dada expresaremos así:

$$\frac{13}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+3)}-\frac{3}{x}\geq 0\text{ , efectuando operaciones }\frac{13(x+3)+x(x-1)-12(x-1)(x+3)}{4(x-1)(x+3)x}\geq 0$$

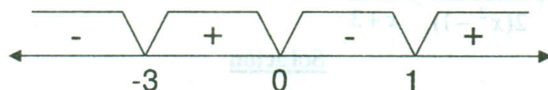
$$\frac{13x^2+39x+x^2-x-12(x^2+2x-3)}{4x(x-1)(x+3)}\geq 0\text{ , simplificando}$$

$$\frac{2x^2+14x+36}{4x(x-1)(x+3)}\geq 0\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2+7x+18}{x(x-1)(x+3)}\geq 0$$

$\forall$ x $\in$ R, $x^2+7x+18>0$ entonces: $\frac{x^2+7x+18}{x(x-1)(x+3)}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{x(x-1)(x+3)}\geq 0$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+3)}\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad x(x-1)(x+3)\geq 0\text{ , para } x\neq 1, -3, 0$$

resolviendo la ecuación x(x – 1)(x + 3) = 0, de donde, $r_1=-3$, $r_2=0$, $r_3=1$



como la ecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen los signos (+), es decir: **x ∈ <-3,0> U <1,+∞>**

(32) $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{3}{x}$

Solución

La inecuación dada escribiremos en la forma:

$$\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x}\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{3x^2+3x+x^2-x-3x^2+3}{x(x-1)(x+1)}\geq 0$$

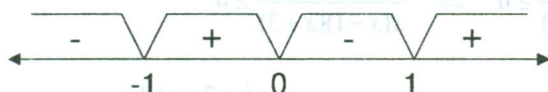
$$\Leftrightarrow\quad\frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)}\geq 0$$

como $\forall$ x $\in$ R, $x^2+2x+3>0$, entonces

$$\frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)(x+1)}\geq 0$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\geq 0, \text{ para } x\neq -1,0,1$$

Ahora resolviendo x(x – 1)(x + 1) = 0, de donde $r_1=-1$, $r_2=0$, $r_3=1$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -1,0] \cup \langle 1,+\infty\rangle$

(33) $$\frac{2x-25}{2(x^2+2x-3)}+\frac{2x+11}{2(x^2-1)}>\frac{1}{x+3}$$

Solución

La inecuación dada escribiremos en la forma:

$$\frac{2x-25}{2(x^2+2x-3)}+\frac{2x+11}{2(x^2-1)}-\frac{1}{x+3}>0$$, factorizando en el denominador

$$\frac{2x-25}{2(x+3)(x-1)}+\frac{2x+11}{2(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x+3}>0$$, efectuando operaciones

$$\frac{(2x-25)(x+1)+(2x+11)(x+3)-2(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)(x+3)}>0$$, simplificando se tiene:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x+1)(x+3)}>0$$, como $\forall$ x $\in$ R, $x^2-3x+5>0$, entonces:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x+1)(x+3)}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+3)}>0$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+3)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1)(x+3) > 0, \quad x \neq -3, -1, 1$$

encontrando las raíces de $(x-1)(x+1)(x+3) = 0$, donde $r_1 = -3$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+), es decir: $x \in \langle -3,-1 \rangle \cup \langle 1,+\infty \rangle$

(34) $\frac{(x-1)^2-(x+2)^2}{(x-2)^2-(x+1)^2} \geq 0$

Solución

Por medio de la diferencia de cuadrados se tiene:

$$\frac{[(x-1)-(x+2)][(x-1)+(x+2)]}{[(x-2)-(x+1)][(x-2)+(x+1)]} \geq 0, \text{ simplificando.}$$

$$\frac{-3(2x+1)}{-3(2x-1)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)(2x-1) \geq 0 \text{ para } x \neq \frac{1}{2}$$

encontrando las raíces de $(2x+1)(2x-1) = 0$, de donde, $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{2}$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir: $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$

(35) $\dfrac{x^4+5x^3-20x-16}{x^3+2x^2-13x+10}\le 0$

Solución

Factorizando tanto en el numerador y denominador.

$\dfrac{(x-2)(x+2)(x+1)(x+4)}{(x+5)(x-2)(x-1)}\le 0$, para $x \ne -5,1,2$

la inecuación dada es equivalente a:

$(x-2)(x+2)(x+1)(x+4)(x+5)(x-2)(x-1)\le 0$ para $x \ne -5,1,2$

$(x-2)^2(x+2)(x+1)(x+4)(x+5)(x+1)\le 0$ para $x \ne -5,1,2$

como $\forall$ x $\in$ R, $x \ne 2$, $(x-2)^2 > 0$ entonces

$(x+2)(x+1)(x+4)(x+5)(x-1)\le 0$, para $x \ne -5,1,2$

encontrando las raíces de $(x+2)(x+1)(x+4)(x+5)(x-1)=0$, de donde:

$r_1=-5$, $r_2=-4$, $r_3=-2$, $r_4=-1$, $r_5=1$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\le 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle -4,-2\rangle \cup \langle -1,1\rangle$

(36) $\dfrac{3^{2x-1}.3^{4-x}}{3^{6x-1}} > (3^{2x+1})^{(x-2)}$

Solución

La inecuación dada expresaremos en la forma

$3^{2x-1+4-x-6x+1} > 3^{(2x+1)(x-2)}$, de donde: $3^{-5x+4} > 3^{2x^2-3x-2}$

como a = 3 > 0 $\Rightarrow\ -5x+4 > 2x^2-3x-2$, de donde

$2x^2-2x-6<0 \iff x^2+x-3<0$, completando cuadrados $x^2+x+\frac{1}{4}<3+\frac{1}{4}$

$$(x+\frac{1}{2})^2<\frac{13}{4} \iff -\frac{\sqrt{13}}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$\Rightarrow\ -\frac{\sqrt{13}+1}{2}<x<\frac{\sqrt{13}-1}{2}$, de donde $x \in \left< -\frac{\sqrt{13}+1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2} \right>$

(37) $$\frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{1}{2x} \ge \frac{2x}{3-4x+x^2}$$

Solución

A la inecuación dada expresaremos en la forma

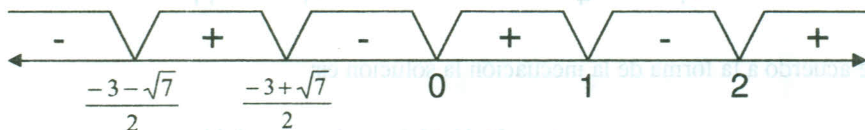
$\frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{1}{2x}-\frac{2x}{3-4x+x^2} \ge 0$, efectuando las operaciones:

$\frac{2x^2(x-1)+(x-2)(x-3)(x-1)-4x^2(x-2)}{2x(x-3)(x-2)(x-1)} \ge 0$, desarrollando:

$\frac{2x^3-2x^2+x^3-6x^2+11x-6-4x^3+8x^2}{2x(x-3)(x-2)(x-1)} \ge 0$, simplificando

$$\frac{x^3-11x+6}{x(x-3)(x-2)(x-1)} \le 0 \iff \frac{(x-3)(x+\frac{3-\sqrt{17}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{17}}{2})}{x(x-3)(x-2)(x-1)} \le 0$$

para x $\ne 3$ se tiene $\frac{(x+\frac{3-\sqrt{17}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{17}}{2})}{x(x-2)(x-1)} \le 0$



Como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (-) es decir: $x \in <-\infty, -\frac{3+\sqrt{17}}{2}> U <\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 0> U <1,2>$

38) $\frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3}$

Solución

Aplicaremos la propiedad siguiente: $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

$$\frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} \wedge \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3}$$

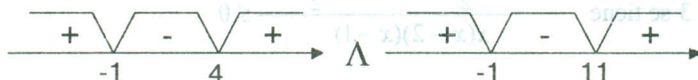
$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} - \frac{1}{5} > 0 \wedge \frac{x-3}{x+1} - \frac{2}{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-15-x-1}{5(x+1)} > 0 \wedge \frac{3x-9-2x-2}{3(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \wedge \frac{x-11}{x+1} < 0$$

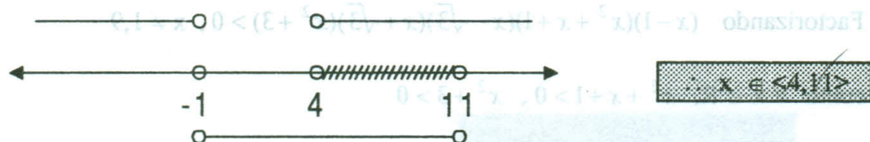
$$\Leftrightarrow (x-4)(x+1) > 0, \ x \neq -1 \wedge (x-11)(x+1) < 0, \ x \neq -1$$

ahora encontrando las raíces de $(x-4)(x+1) = 0$, de donde $r_1 = -1$, $r_2 = 4$, $r_3 = -1$, $r_4 = 11$



de acuerdo a la forma de la inecuación la solución es:

$$x \in <-\infty,-1> U <4,+\infty> \wedge x \in <-1,11>$$



(39) $\frac{x^4}{x^4-16} < \frac{5x^2+36}{x^4-16}$

Solución

A la inecuación dada escribiremos en la forma

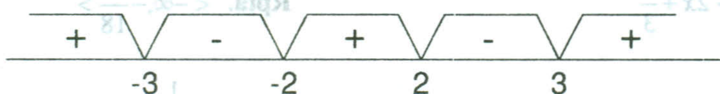
$\frac{x^4}{x^4-16} - \frac{5x^2+36}{x^4-16} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-5x^2-16}{x^4-16} < 0$, factorizando

$\frac{(x^2-9)(x^2+4)}{(x^2-4)(x^2+4)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x^2-4} < 0$

$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow$ (x + 3)(x – 3)(x + 2)(x – 2) < 0, para x ≠ -2,2

ahora encontrando las raíces de:

(x + 3)(x – 3)(x + 2)(x – 2) = 0 de donde $r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$



como la inecuación es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen los signos (-), es decir: **x ∈ <-3,-2> U <2,3>**

(40) $(x-9)^{2n}(1-x^3)^{2n+1}(x^4-9) < 0$, si n ≥ 1, n ∈ N

Solución

Para x ≠ 9, $(x-9)^{2n} > 0$, $(1-x^3)^{2n} > 0$, para x ≠ 1.

Entonces a la inecuación dado se puede simplificar, es decir: $(1-x^3)(x^4-9) < 0$

Factorizando $(x-1)(x^2+x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)>0$, $x\neq 1,9$

como $\forall$ x $\in$ R, $x^2+x+1>0$, $x^2+3>0$

entonces $(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0$, $x\neq 1,9$

ahora encontrando las raíces de: $(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$

de donde: $r_1=-\sqrt{3}$, $r_2=1$, $r_3=\sqrt{3}$



Como la inecuación es de la forma P(x) > 0, la solución es la unión de los intervalos donde aparece el signo (+), es decir: $x\in<-\sqrt{3},1>U<\sqrt{3},+\infty>-\{9\}$

1.34 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Resolver las siguientes inecuaciones

① $-1\leq -3+3x<2$ **Rpta.** $[\frac{2}{3},\frac{5}{3}>$

② $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>2x+\frac{1}{3}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{7}{18}>$

③ $-3x+4\leq 4x+5$ **Rpta.** $[-\frac{1}{7},+\infty>$

④ $\frac{2x+6}{3}-\frac{x}{4}<5$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{36}{5}>$

⑤ $5x-2<10x+8<2x-8$ **Rpta.** ϕ

⑥ $-\frac{1}{5}\leq 3x-\frac{1}{4}\leq\frac{1}{3}$ **Rpta.** $[\frac{1}{60},\frac{7}{36}]$

⑦ $\frac{x}{a^2-b^2}+\frac{3x}{a+b}<\frac{5}{a-b}$, $a>b>0$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{5a+5b}{1+3a-3b}>$

(8) $\frac{2x}{3a}+4>\frac{5x}{6b}+2x$, a > b > 0 **Rpta.** $<-\infty,\frac{24ab}{5a+12ab-4b}>$

(9) $2x+\frac{6-3x}{4}<4$ **Rpta.** $<-\infty,2>$

(10) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}>1+\frac{x}{c}$, c > b > a > 0 **Rpta.** $<\frac{abc}{ac+bc-ab},+\infty>$

(11) $2x-6<\frac{3x+8}{5}$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{38}{7}>$

(12) $3(x-5)-4(4-3x)\geq 2(7-x)-3(x-5)$ **Rpta.** $<3,+\infty>$

II. Resolver las inecuaciones siguientes:

(1) $2x^2-6x+3<0$ **Rpta.** $<\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2}>$

(2) $2x^2+6x-9<0$ **Rpta.** $<\frac{-3-3\sqrt{3}}{2},\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}>$

(3) $9x^2+54x>-76$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{9+\sqrt{5}}{3}>U<\frac{\sqrt{5}-9}{3},+\infty>$

(4) $-4x^2+4x+3>0$ **Rpta.** $<-\frac{1}{2},\frac{3}{2}>$

(5) $4x^2+9x+9<0$ **Rpta.** ϕ

(6) $4x^2-4x+7>0$ **Rpta.** $\forall x\in R-\{\frac{1}{2}\}$

(7) $x^4-2x^2-8<0$ **Rpta.** $<-2,2>$

(8) $-4x^2-8<-12x$ **Rpta.** $<-\infty,1>U<2,+\infty>$

(9) $x^2-2\sqrt{3}x-2>0$ **Rpta.** $<-\infty,\sqrt{3}-\sqrt{5}>U<\sqrt{3}+\sqrt{5},+\infty>$

(10) $3x^2-8x+11\geq 4(x-1)$ **Rpta.** $\forall\, x \in R$

(11) $3x^2-10x+3<0$ **Rpta.** $<\frac{1}{3},3>$

(12) $x(3x+2)<(x+2)^2$ **Rpta.** $<-\infty,-1> U <2,+\infty>$

(13) $4x^2-8x+1<0$ **Rpta.** $<\frac{2-\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}>$

(14) $5x^2-14x+9\leq 0$ **Rpta.** $[1,\frac{9}{5}]$

(15) $x^2+3x+2>0$ **Rpta.** $<-\infty,-2> U <-1,+\infty>$

(16) $1-2x-3x^2\geq 0$ **Rpta.** $[-1,\frac{1}{3}]$

(17) $3x^2-5x-2>0$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{1}{3}>U<2,+\infty>$

(18) $(x^2+2x)(x^2-1)-24>0$ **Rpta.** $<-\infty,-3> U <2,+\infty>$

(19) $x(x-3)(x-1)(x+2)>16$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{1-\sqrt{33}}{2}>U<\frac{1+\sqrt{33}}{2},+\infty>$

(20) $x^4+2x^3-x^2+4x-6<0$ **Rpta.** $<-3,1>$

(21) $(x^2+x-6)(4x-4-x^2)\leq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-3] U [2,+\infty>$

(22) $2x^3+3x^2-11x-6\geq 0$ **Rpta.** $[-3,-\frac{1}{2}]U[2,+\infty>$

(23) $x^3-3x^2-13x+15>0$ **Rpta.** $<-3,1> U <5,+\infty>$

(24) $x^4-4x^3-x^2+16x-12>0$ **Rpta.** $<-\infty,-2> U <1,2> U <3,+\infty>$

(25) $x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12>0$ **Rpta.** $<-3,-2> U <-1,1> U <2,+\infty>$

(26) $x^5-6x^4-x^3+29x^2+8x-15<0$

Rpta. $<-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}>U<-1,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>U<3,5>$

(27) $(x^2-2x-5)(x^2-2x-7)(x^2-2x-4)>0$

Rpta. $<-\infty,\ 1-2\sqrt{2}>U<1-\sqrt{6},\ 1-\sqrt{5}>U<1+\sqrt{5},\ 1+\sqrt{6}>$

(28) $x^5-2x^4-15x^3>0$ **Rpta.** <-3,0> U <5,+∞>

(29) $(x^3-5x^2+7x-3)(2-x)\geq 0$ **Rpta.** [2,3]

(30) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)<0$, si $a<b<c<d$ **Rpta.** <a,b> U <c,d>

(31) $(x^2+6x-1)(x^3-2x^2-2x+4)(x+5)^5>0$

Rpta. $<-\infty,-3-\sqrt{10}>U<-5,-\sqrt{2}>U<-3+\sqrt{10},\sqrt{2}>U<2,+\infty>$

(32) $(6x+3)^2(x^2-1)^3(3x-5)^7<0$ **Rpta.** $<-\infty,-1>U<1,\frac{5}{3}>$

(33) $(3-x)^3(x^2-1)^2(1-x)^5x>0$ **Rpta.** <-0,1> U <3,+∞>

(34) $x^4-2x^2-3x-2\geq 0$ **Rpta.** <-∞,-1] U [2,+∞>

(35) $x^4-3x^3+5x^2-27x-36<0$ **Rpta.** <-1,4>

(36) $x^4<x^2$ **Rpta.** <-1,1> - {0}

(37) $(2x^2-4x-1)(3x^2-6x+4)(x^2+4x-2)>0$

Rpta. $<-\infty,-2-\sqrt{6}>U<\frac{2-\sqrt{6}}{2},-2+\sqrt{6}>U<\frac{2+\sqrt{6}}{2},+\infty>$

(38) $x^5+8x^4+12x^3-x^2-8x-12>0$ **Rpta.** <-6,-2> U <1,+∞>

(39) $(x^2-1)(x^2+9)(x+4)(x-5)>0$ **Rpta.** <-∞,-4> U <-1,1> U <5,+∞>

(40) $(x + 2)(x + 3)(x - 4)(x - 5) > 44$ **Rpta.** $\forall\, x \in R$

(41) $x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 4 > 0$ **Rpta.** $\forall\, x \in R$

(42) $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 < 0$ **Rpta.** $<1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}>$

(43) $x^5 - 6x^4 - 17x^3 + 17x^2 + 6x - 1 > 0$

Rpta. $<\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}> U < 4-\sqrt{15},1> U < 4+\sqrt{15},+\infty>$

(44) $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-1-\sqrt{2}> U <-1+\sqrt{2},+\infty>$

(45) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 \le 0$ **Rpta.** $[\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}] U [\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}]$

(46) $(x - 7)(x - 3)(x + 5)(x + 1) \ge 1680$ **Rpta.** $<-\infty,-7] \cup [9,+\infty>$

(47) $(x + 9)(x - 3)(x - 7)(x + 5) \le 385$ **Rpta.** $[-1-\sqrt{71},-4] U [2,-1+\sqrt{71}]$

III. Resolver las ecuaciones siguientes:

(1) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$ **Rpta.** $<-\infty,-3> \cup <2,+\infty>$

(2) $\frac{1}{3x-7} \ge \frac{4}{3-2x}$ **Rpta.** $<\frac{3}{2},\frac{31}{14}] U <\frac{7}{3},+\infty>$

(3) $\frac{x+2}{x-2} \ge \frac{x^2+2}{x^2}$ **Rpta.** $<2,+\infty>$

(4) $\frac{x-2}{x+4} \ge \frac{x}{x-2}$ **Rpta.** $<-\infty,-4> U [\frac{1}{2},2>$

(5) $\frac{x^3-4}{x^2+2} < \frac{x^3-2}{x^2+1}$ **Rpta.** $<-2,0> \cup <0,+\infty>$

(6) $\frac{x-1}{x} \le \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$ **Rpta.** $<-\infty,-1> U <0,1>$

(7) $\frac{x^2+2}{x^4+1} > \frac{x^2+1}{x^4+1}$ **Rpta.** $\forall$ x $\in$ R

(8) $\frac{x^2-2x}{x-4} \le \frac{x+8}{2}$ **Rpta.** <-∞,4>

(9) $\frac{1}{x} \le \frac{3x+1}{x} < 4$ **Rpta.** <-∞,0> U <1,+∞>

(10) $\frac{x^2+8}{x+4} \ge \frac{5x-8}{5}$ **Rpta.** <-4,6]

(11) $\frac{x+4}{x^2+4x+4} > \frac{x-2}{x^2-4}$ **Rpta.** $\forall$ x $\in$ R – {-2,2}

(12) $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$ **Rpta.** $<-\infty,-1> U <\frac{1}{3},3>$

(13) $-\frac{1}{2} < \frac{2x^2-3x+3}{(x-2)(2x+3)}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{3}{2}> U <0,\frac{7}{6}> U <2,+\infty>$

(14) $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} < 4 + \frac{x-7}{x-1}$ Rpta. $<-2,-\frac{5}{4}> \cup <-1,1> \cup <5,+\infty>$

(15) $\frac{x}{x^2+4} \le \frac{x-3}{x^2+x+4}$ **Rpta.** ϕ

(16) $\frac{(x^2-2)(x+5)(x-3)}{x(x^2+2)(x+3)} > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-5> U <-3,-\sqrt{2}> U <0,\sqrt{2}> U <3,+\infty>$

(17) $\frac{(6x+3)^2(x^2+1)^3(3x-5)^7}{(x+6)^2(2x+3)^{17}} > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-6> U <-6,-\frac{3}{2}> U <\frac{5}{3},+\infty>$

(18) $\frac{(4x+2)^2(x^2+2)^5(2x-8)^9}{(x+1)^2(2x+5)^{13}} < 0$ **Rpta.** $<-\frac{5}{2},4> - \{-1,-\frac{1}{2}\}$

(19) $\frac{x+4}{x-5} < \frac{x-2}{x+3}$ **Rpta.** $<-\infty,-3> U <-\frac{1}{7},5>$

(20) $\frac{7}{x-4}+\frac{1}{x+2}<-2$ **Rpta.** <-3,-2> U <1,4>

(21) $\frac{(x^2+x-6)(x^2-x-6)}{(x^2-4)(x^2-2)}>0$ **Rpta.** $<-\infty,-3>U<-\sqrt{2},\sqrt{2}>U<3,+\infty>$

(22) $\frac{x-2}{x+2}<\frac{x^2}{x^2+2}$ **Rpta.** <-2,+∞>

(23) $\frac{5}{x+3}+\frac{1}{x-1}>2$ **Rpta.** <-3,-1> U <1,2>

(24) $2\geq\frac{3x+1}{x}>\frac{1}{x}$ **Rpta.** [-1,0>

(25) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$ **Rpta.** $<-\infty,1>U<\frac{3}{2},2>U<3,+\infty>$

(26) $\frac{2x^4+7x^3+8x^2+6x+1}{6x^5+17x^4+23x^3+18x^2+7x+1}>0$

Rpta. $<\frac{-5-\sqrt{17}}{2},-1>U<-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}>U<\frac{-5+\sqrt{17}}{2},+\infty>$

(27) $\frac{7}{x-1}-\frac{6}{x^2-1}<5$ **Rpta.** $<-\infty,-1>U<-\frac{3}{5},1>U<2,+\infty>$

(28) $\frac{12x^5-35x^4-53x^3+53x^2+35x-12}{x^6+15x^5+78x^4+155x^3+78x^2+15x+1}<0$

Rpta. $<-\infty,\frac{-5-\sqrt{21}}{2}>U<-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}>U<\frac{-5+\sqrt{21}}{2},2-\sqrt{3}>U<1,2+\sqrt{3}>$

(29) $\frac{2x-1}{x+4}+\frac{x+2}{3-x}>\frac{x-1}{x+3}$ **Rpta.** <-∞,-4> U <-3,3>

(30) $\frac{1+x^3}{(1-x^2)(1-x)}>\frac{x-x^2+x^4-x^5}{(1-x)^2(1+x)}+9$

Rpta. $<-\infty,-1-\sqrt{3}>U<-1+\sqrt{3},1>U<1,2>U<2,+\infty>$

(31) $\dfrac{4x^4-20x^2+8}{x^4-5x^2+4}<8$ **Rpta.** $<-\sqrt{6},-2>U<-1,1>U<2,\sqrt{6}>$

(32) $\dfrac{(x-1)^2(x^2-1)(x^4-1)}{(x^4+1)(x-2)}\geq 0$ **Rpta.** <2,+∞>

(33) $\dfrac{(x^2+5x+6)(x^4-16)(x^2-4x-12)}{(1-3x)^3(x-1)(x^2+1)}<0$

Rpta. $<-\infty,-3>U<-2,\dfrac{1}{3}>U<1,2>U<6,+\infty>$

(34) $\dfrac{4}{4-x}-\dfrac{x-2}{5}<\dfrac{4}{x}$ **Rpta.** <0,2> U <4,+∞>

(35) $\dfrac{3x^2+7x+5}{x^2+3x+2}\leq 2$ **Rpta.** <-2,-1>

(36) $\dfrac{(x^2+x-6)(x^2-x-6)}{(x^2-4)(x^2-16)}\leq 0$ **Rpta.** <-4,-3] U [3,4>

(37) $\dfrac{(1+x+x^2)(2-x-x^2)(x^4-2x^2-3x-2)}{(2x^2-4x-1)(3x^2-6x+4)(x^2+4x-2)(x^2-7)}\leq 0$

Rpta. $<-\infty,-\sqrt{7}>U<-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2},-2]U[-1,-\sqrt{6}+2>U<\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1,1>U[2,\sqrt{7}>U<\sqrt{6}+2,+\infty>$

(38) $\dfrac{x}{x+1}<\dfrac{12}{19}<\dfrac{x+1}{x+2}$ **Rpta.** $<\dfrac{5}{7},\dfrac{12}{7}>$

(39) $\dfrac{(x-3)(x+2)^2(x+1)(x-4)}{x(x+2)(x^2-3)(x+3)(x^2+4)}>0$

Rpta. $<-\infty,-3]U<-2,-\sqrt{3}>U[-1,0>U<\sqrt{3},3]U[4,+\infty>$

(40) $\dfrac{x+2}{x-2}\geq\dfrac{x^2+2}{x^2}$ **Rpta.** <2,+∞>

(41) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}\geq\frac{x+5}{1-x^2}$ **Rpta.** <1,+∞>

(42) $\frac{x}{x^2-5x+6}-\frac{2}{2-x}\geq\frac{2x}{(3-x)(1-x)}$ **Rpta.** <-∞,-6] U <2,3>

(43) $\frac{3}{x}\leq\frac{13}{4(x-1)}+\frac{1}{4x+12}$ **Rpta.** $[-\frac{31+\sqrt{889}}{2},-3>U[\frac{\sqrt{889}-31}{2},0>U<1,+\infty>$

(44) $\frac{(x^2+4x+4)(x-9)^2}{(11-x)(x^2+5)}\leq 0$ **Rpta.** <11,+∞>

(45) $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{3}{x}$ **Rpta.** <-1,0> U <1,+∞>

(46) $\frac{x-1}{x+2}<1$ **Rpta.** <-2,+∞>

(47) $\frac{(x^2-5)(x^2+7)}{(x^2+x+1)(x^2-3x+2)}\geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-\sqrt{5}]U<1,2>U[\sqrt{5},+\infty>$

(48) $\frac{3x}{x^2-x-6}>1$ **Rpta.** $<-2,\ 2-\sqrt{10}>U<3,\ 2+\sqrt{10}>$

(49) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}<2$ **Rpta.** <-∞,3> U <4,+∞> – {1}

(50) $\frac{2x-25}{2(x^2+2x-3)}+\frac{2x+11}{2(x^2-1)}>\frac{1}{x+3}$ **Rpta.** <-3,-1> U <1,+∞>

(51) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x-5}\geq 0$ **Rpta.** <-∞,-1> U <5,+∞>

(52) $\frac{2x-x^2-1}{x^2-x^4}<0$ **Rpta.** <-1,0> U <0,1>

(53) $\frac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6}\geq 0$ **Rpta.** <-∞,-6> U [-3,+∞>

(54) $\frac{x^2-2x+1}{x-1} \geq 0$ **Rpta.** <1,+∞>

(55) $\frac{2x+1}{x+1} \geq 3$ **Rpta.** [-2,-1>

(56) $\frac{x^2+4x+9}{x^2-4x-5} \leq 0$ **Rpta.** <-1,5>

(57) $\frac{x^2+x+2}{x(x^2-x-2)} < 0$ **Rpta.** <-∞,-1> U <0,2>

(58) $\frac{2}{3x-2} < \frac{3}{x+2}$ **Rpta.** $<-2,\frac{2}{3}> U <\frac{10}{7},+\infty>$

(59) $\frac{32}{x^2-4} \geq \frac{x}{x-2} - \frac{4}{x+2}$ **Rpta.** [-4,-2> U <2,6]

(60) $\frac{2+x-x^2}{x^2-2x+1} \geq 0$ **Rpta.** [-1,1> U <1,2]

(61) $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^2+5x-14} \leq 0$ **Rpta.** <-∞,-7> U [-3,2>

(62) $\frac{x^2+8x-12-x^3}{7x-x^2-6} \geq 0$ **Rpta.** [-3,1> U <6,+∞> U {2}

(63) $\frac{x^2+3x+2}{x-2} < \frac{x-2}{x+2}$ **Rpta.** <-∞,-2> ∪ <0,2>

(64) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$ **Rpta.** <-3,-2> ∪ <-1,1>

(65) $\frac{x+1}{1-x} - 2 < \frac{1-x}{x}$ **Rpta.** $<-\infty,-1> \cup <0,\frac{1}{2}> \cup <1,+\infty>$

(66) $\frac{x^2+8x+24}{x+2} \geq 8$ **Rpta.** <-2,+∞>

(67) $\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}$ **Rpta.** $<-\infty,-2> \cup <\frac{1}{4},1] \cup [4,+\infty>$

(68) $\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{7}{x+2} < 0$ **Rpta.** $<-2,-\frac{5}{4}> \cup <-1,1> \cup <5,+\infty>$

(69) $\frac{x^4-3x^3-6x^2-28x-24}{40+(x-1)(x-3)(x+4)(x+6)} < 0$

(70) $\frac{3x}{x^2-x-6} > 1$

(71) $\frac{7}{x-4} + \frac{30}{x+2} \leq \frac{7}{x+1}$

(72) $\frac{1}{x-2} + \frac{7}{x+4} < 2$

(73) $\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4} > 1$

(74) $2 - \frac{x-2}{x-1} > \frac{x-3}{x-2}$

(75) $\frac{2x}{2x^2+7x+5} > \frac{x}{x^2+6x+5}$

(76) $\frac{x^2+10x+16}{x-1} > 10$

(77) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 0$

(78) $\frac{x^2}{x-2} + 4 > x+10$

(79) $\frac{3x^2-4}{x-6} \leq x+6$

IV. Resolver las ecuaciones siguientes:

(1) $(0.5)^{\frac{4x-3}{2}} > (0.0625)^{\frac{3x-2}{5}}$ **Rpta.** $<\frac{1}{4},+\infty>$

(2) $27^{x-1} < 9^{x+3}$ **Rpta.** $<-\infty,9>$

(3) $(0.2)^{\frac{2x+1}{2}} < (0.0016)^{\frac{2x-2}{5}}$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{7}{2}>$

(4) $2^{5x+8} < 16^{x+5}$ **Rpta.** $<-\infty,12>$

(5) $\frac{3^{2x-3}.3^{4-x}}{3^{5x-1}} > (3^{2x+1})^{(x-2)}$ **Rpta.** $<\frac{-1-\sqrt{33}}{4},\frac{-1+\sqrt{33}}{4}>$

(6) $[(0.5)^{x^2}(0.5)^6]^{x^2-3} < \frac{6.125}{8^{x^4}}$ **Rpta.** $\forall x \in R$

(7) $9^{(x-1)^2} > \frac{9^{3-x}}{9^{x+3}.3}$ **Rpta.** $\forall x \in R$

(8) $\sqrt[x+1]{8^{x+3}} < \sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$ **Rpta.** $<-\infty,-1> U <1,+\infty>$

(9) $\sqrt{27^{x+1}} \le \sqrt[3]{9^{x-3}}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{21}{5}]$

(10) $\sqrt{81^{x+15}} < \sqrt{243^{x-10}}$ **Rpta.** $<110,+\infty>$

(11) $(256)^{\frac{3(x-2)^2}{2}} > 2^{9(x^2-9)^2}.8^{3x+1}.256^{5(x^2-16)}$ **Rpta.** $<-\frac{\sqrt{2293}+33}{86},\frac{\sqrt{2293}-33}{86}>$

(12) $\frac{729^{x^2}.243^x}{81^{2x}} > \frac{243^6.27^{5x-6}}{27^{4x}}$ **Rpta.** $<-\infty,-1> U <2,+\infty>$

(13) $3^{x^3}.3^{2x} > 27$ **Rpta.** $<1,+\infty>$

(14) $2^{\frac{x-5}{2}} > 8^{\frac{x-9}{3}}$ **Rpta.** $<-\infty,13>$

(15) $(0.216)^{\frac{5x+3}{4}} > \sqrt[5]{(0.36)^{\frac{2x+1}{6}}}$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{131}{217}>$

(16) $(4^2)^{\frac{5}{x^2-1}} > (64)^{\frac{1}{x-1}}$ **Rpta.** $<-\infty,-1>U<1,\frac{7}{3}>$

(17) $[(0.3)^{(x-1)(x-2)}]^{x-3} > [(0.09)^{x^2-4}]^{x^2-9}$ **Rpta.** $\forall x \in R$

(18) $\sqrt[3]{(0.00032)^{5x-2}} < \sqrt{(0.2)^{\frac{2x+1}{2}}}$ **Rpta.** $<\frac{43}{94},+\infty>$

(19) $\sqrt[x+3]{(\frac{1}{25})^{x-3}} \le \sqrt[x+2]{(0.2)^{2x-2}}$ **Rpta.** $<-\infty,-3> U <-2,-1]$

(20) $(\sqrt[\sqrt{x+1}]{(0.16)^{\sqrt{x-1}}}.\sqrt[\sqrt{x+1}]{(0.0256)^{\sqrt{x+6}}})^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}} < \sqrt[\sqrt{x+1}]{0.004096}$

(21) $\sqrt[x-2]{(0.008)^{x-1}} \geq \sqrt[x-1]{(0.04)^{x+3}}$ **Rpta.** <1,2> U [3,5]

(22) $\sqrt[x+3]{(0.04)^{2x-1}} \geq \sqrt[x]{(0.2)^{2x-1}}$ **Rpta.** $<-3,0>U[\frac{1}{2},3]$

(23) $\sqrt[x+2]{(0.0016)^{x+3}} > \sqrt[x-5]{(0.2)^{4x+1}}$ **Rpta.** $<-\frac{62}{171},-2>U<5,+\infty>$

(24) $\sqrt[x-5]{4^{x-4}} \geq \sqrt[x+1]{2^{2x}}$ **Rpta.** $<-1,2]\ U\ <5,+\infty>$

(25) $\sqrt[x+1]{(0.01)^{x-2}} \leq \sqrt[x+3]{(0.1)^{2x-3}}$ **Rpta.** $<-3,-1> \cup [3,+\infty>$

(26) $\sqrt[x+3]{(0.04)^{2x-1}} > \sqrt[x]{(0.2)^{2x-1}}$ **Rpta.** $<-3,0>\cup<\frac{1}{2},3>$

(27) $(\frac{2}{250})^{x}(\frac{1}{5})^{4x^2+1} \leq (\frac{1}{5})^{x+2}(\frac{1}{625})^{x^2-3x}$ **Rpta.** $<-\infty,-2]\cup[-\frac{1}{2},+\infty>$

(28) $\sqrt[x-3]{3^x(\frac{1}{3})^{-2}} \leq \sqrt[x+2]{9(\frac{1}{9})^x}$ **Rpta.** <-3,3>

(29) $\sqrt[x+3]{(\frac{1}{25})^{x-3}} \leq \sqrt[x+2]{(\frac{1}{5})^{2x-2}}$ **Rpta.** $<-\infty,-3> \cup <-2,-1]$

(30) $\frac{(2^{2x-3})(2^{4-x})}{2^{5x-1}} < \sqrt[x+1]{2^{2x+3}}$ **Rpta.** $<-1,+\infty>-\{-\frac{1}{2}\}$

(31) $15^{x-1} \leq \sqrt[x]{(0.2)^{x+1}}$

(32) $(0.1)^{x-3} \leq 10^{x+3}$

(33) $\sqrt[2x-1]{(0.00032)^{x+2}} < \sqrt[x-3]{(\frac{1}{5})^{3x-1}}$

(34) $[(0.5)^{x^2}.(0.5)^6]^{(x^2-3)} > \frac{(0.125)^3}{8^{x^2}}$

(35) $\sqrt{(0.5)^{4x-3}} > \sqrt[5]{(0.625)^{3x-2}}$

V. Resolver las ecuaciones siguientes:

① $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x-2}>3$ **Rpta.** [2,3> U <6,+∞>

② $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}<5$ **Rpta.** [0,4>

③ $\sqrt{x^2-x-2}<5-x$ **Rpta.** $<-\infty,-1]\ U\ [2,3>$

④ $\sqrt{x}-9\sqrt[4]{x}+118\geq 0$ **Rpta.** [0,81] U [1296,+∞>

⑤ $x+2<\sqrt[3]{x^3+8}$ **Rpta.** <-2,0>

⑥ $\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}\geq 1$ **Rpta.** $[\frac{\sqrt{7}}{2}+6,8]$

⑦ $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x+1}$ **Rpta.** [1,2>

⑧ $\sqrt{2x-9}\leq 3-x$ **Rpta.** ϕ

⑨ $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x-2}>9$ **Rpta.**

⑩ $\frac{(x-4)\sqrt{x^2-2x+2}}{x^2+2}\leq 0$ **Rpta.** <-∞,4]

⑪ $\sqrt{x^2-2x-15}\geq x+1$ **Rpta.** <-∞,-3]

⑫ $\sqrt{3x-6}>-\sqrt{4x-12}$ **Rpta.** [3,+∞>

⑬ $\sqrt{5x-3}-\sqrt{x-1}>0$ **Rpta.** [1,+∞>

⑭ $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-4}-\sqrt{x}}{x-1}\geq 0$ **Rpta.** [64,+∞>

⑮ $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}}\geq 0$ **Rpta.** $[2,\frac{\sqrt{37}-1}{2}>$

⑯ $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}<\sqrt{x+1}$ **Rpta.** <3,+∞>

(17) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}>\sqrt{x+1}$ **Rpta.** $<\frac{11}{3},5]$

(18) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-3}+\sqrt{6-\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\leq 1$ **Rpta.** $[9,\frac{84+16\sqrt{5}}{5}]$

(19) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$ **Rpta.** $<\frac{\sqrt{13}-5}{2},1]$

(20) $\sqrt{x^2-14x+13}\geq x-3$ **Rpta.** $<-\infty,3]$

(21) $\dfrac{\sqrt{x^2+3x+4}}{\sqrt{21}+\sqrt{x^2-4}}\geq 0$ **Rpta.** $<-\infty,-2]\ U\ [2,+\infty>$

(22) $\sqrt{-x+2}\leq\sqrt{-4x+2}+\sqrt{-9x+6}$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{1}{2}]$

(23) $\dfrac{\sqrt[4]{625-x^2}\sqrt[3]{x^2-4}(x+4)^8(x^2-1)^2}{x^3-2x^2-x+2}\leq 0$ **Rpta.** $[-25,-2]\cup<-1,1>\cup\{25\}$

(24) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}>\sqrt{x}+1$ **Rpta.** $<1,2>$

(25) $\sqrt{\dfrac{x+6}{x}}<\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$ **Rpta.** $<-\infty,-6]\cup<1,2>$

(26) $\sqrt{x^2-14x-13}<x+1$ **Rpta.** $<\frac{3}{4},1]U[13,+\infty>$

(27) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[5]{x^2-4x+3}}<0$ **Rpta.** $<-\infty,-4]\cup[2,3>$

(28) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{2-\sqrt{x+4}}}\leq x-4$ **Rpta.** ϕ

(29) $\dfrac{1}{x-2}<\dfrac{x}{x+4}<\dfrac{x-2}{x+1}$ **Rpta.** $<8,+\infty>$

(30) $\frac{|x^2-9|-2x}{|x+5|+5}<0$ **Rpta.** $<\sqrt{10}-1, 1+\sqrt{10}>$

(31) $\frac{4}{x-4}<\frac{x+4}{x-4}<2$ **Rpta.** <18,+∞>

(32) $3^{x+4}(3^{x-4}-1)<3^x-81$ **Rpta.** <0,4>

(33) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{21}-\sqrt{x^2-4}}}\geq 0$ **Rpta.** <-5,-2] U [4,5>

(34) $\sqrt{\frac{x^2-3x-4}{5-\sqrt{16-x^2}}}\geq x^2-2x-29$ **Rpta.** [-4,-1] U {4}

(35) $\sqrt{\frac{32-2x}{x+2}}\geq\sqrt{x}$ **Rpta.** [0,4]

(36) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-x-2}-2}{2-\sqrt{x-4}}}\geq x-5$ **Rpta.** [-4,-2] U [2,3]

(37) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2-7x+10}\leq 0$ **Rpta.** x = 5

(38) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2-7x+10}>0$ **Rpta.** <-∞,1] U <5,+∞>

(39) $\sqrt{4-\sqrt{x+13}}\leq\sqrt{x+5}$ **Rpta.** [-5,3]

(40) $\frac{\sqrt[3]{x^2-2x-15}(x^3-6x^2+9x)}{(x-1)^4(x-2)^5}\leq 0$ **Rpta.** [-3,0] ∪ <2,5]

(41) $\sqrt{\frac{x+4}{x-2}}\geq\sqrt{x}$ **Rpta.** <2,4]

(42) $\sqrt{3-3x}\leq\sqrt{21+4x-x^2}$ **Rpta.** [-2,1]

(43) $\sqrt{x^2-x-12}(x-5)(2x^2-3x+2)\leq 0$ **Rpta.** <-∞,-3] ∪ [4,5]

(44) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$ **Rpta.** $<-2,-\frac{1}{2}>$

(45) $\frac{x^2-16}{\sqrt{|x-4|-|x-1|}}>0$ **Rpta.** <-∞,-4>

(46) $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x$ **Rpta.** <2,+∞>

(47) $\sqrt{\frac{x+4}{x-2}}\geq\sqrt{x}$ **Rpta.** <2,4]

(48) $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$ **Rpta.** [-6,3]

(49) $\sqrt{\frac{3x-9}{x+2}}+\sqrt{\frac{5-x}{x+1}}>0$ **Rpta.** <-2,1> U [3,5]

(50) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$ **Rpta.** $<-2,-\frac{1}{2}>$

(51) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-4x-5}}{4-\sqrt{x^2-9}}}\geq x-6$ **Rpta.** [-5,-3] U {5}

(52) $\sqrt{x^2-x-12}(x-5)(2x^2-3x-2)\leq 0$ **Rpta.** <-∞,-3] U [4,5]

(53) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+x-2}+3}{\sqrt{9-x^2}-1}}>x-4$ **Rpta.** $<-2\sqrt{2},\ -2]\ U\ [1,\ 2\sqrt{2}>$

(54) $\sqrt{\frac{\sqrt{x^2-5x+4}-2}{2-\sqrt{x-2}}}\geq x-6$ **Rpta.** [-2,0] U [4,5]

(55) $\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}}+\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}\geq 0$ **Rpta.** <-3,1> U [4,5]

(56) $\sqrt{x^2-x+1}<\sqrt{4-x}$ **Rpta.** $<-\sqrt{3},\sqrt{3}>$

(57) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}(x^2-4x+1)}{4x+4}>0$ **Rpta.** $<-1,\ 2-\sqrt{3}>\cup<2+\sqrt{3},\ \infty>$

(58) $\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{9-x^2}-\sqrt{x}}\geq 0$ **Rpta.** $[1,\dfrac{\sqrt{37}-1}{2}>$

(59) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-6}\geq\sqrt{6-x}$

(60) $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+4x}>2$

(61) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}>\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$

(62) $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+4x}>2$

(63) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x+5}\leq\sqrt{3x}$

(64) $\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{x}}\geq 0,\ a>0$

(65) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x+5}\leq\sqrt{3x}$

1.35 VALOR ABSOLUTO.-

a) DEFINICION.- Al valor absoluto del número real x denotaremos por |x|, y se define por la regla.

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$$

Ejemplo.- |7| = 7, |-7| = -(-7) = 7

b) PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO.-

(1) $|a|\geq 0,\ \forall\, a\in R$

(2) $|a|\geq a\ \ \forall\, a\in R$

(3) $|a|=|-a|$

(4) $|ab|=|a||b|$

(5) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|},\ b\neq 0$

(6) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (desigualdad triangular)

Demostraremos la 6° propiedad, las demás dejamos para el lector.

$$|a+b|^2 = |(a+b)^2| = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2$$

$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ entonces $\therefore$ $|a + b| \leq |a| + |b|$

1.36 PROPIEDADES BASICAS PARA RESOLVER ECUACIONES E INECUACIÓNES DONDE INTERVIENE VALOR ABSOLUTO.

① $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

② $|a| = b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$

③ $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

④ Si $b > 0$, entonces:

i) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ **ii)** $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

⑤ Si $a, b \in R$ se verifica

i) $|a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b$ **ii)** $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

⑥ **i)** $|a| = \sqrt{a^2}$ **ii)** $|a|^2 = a^2$

La demostración de estas propiedades dejamos para el lector.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|4x + 3| = 7$

<u>Solución</u>

$|4x + 3| = 7 \Leftrightarrow 4x + 3 = 7 \vee 4x + 3 = -7$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{5}{2}$$

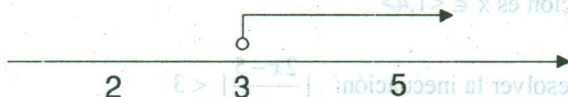
Luego para $x = 1$, $x = -\frac{5}{2}$ son soluciones para la ecuación dada.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|2x+2| = 6x-18$

Solución

$$|2x+2| = 6x-18 \Leftrightarrow [6x-18 \geq 0 \wedge (2x+2 = 6x-18 \vee 2x+2 = -6x+18)]$$

$$\Leftrightarrow [x \geq 3 \wedge (x = 5 \vee x = 2)]$$



Luego la solución de la ecuación es $x = 5$.

Ejemplo.- Resolver la ecuación $|x-2| = |3-2x|$

Solución

$$|x-2| = |3-2x| \Leftrightarrow x-2 = 3-2x \vee x-2 = -3+2x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \vee x = 1, \text{ la solución es: } \{1, \frac{5}{3}\}$$

Ejemplo.- Hallar el valor de la expresión: $\frac{|4x+1|-|x-1|}{x}$, sí $x \in <0,1>$

Solución

$$|4x+1| = \begin{cases} 4x+1, & x \geq -\frac{1}{4} \\ -4x-1, & x < -\frac{1}{4} \end{cases}, \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

si $x \in <0,1> \Rightarrow |4x+1| = 4x+1$, $|x-1| = 1-x$

Luego: $\frac{|4x+1|-|x-1|}{x} = \frac{4x+1-(1-x)}{x} = \frac{5x}{x} = 5$

$\therefore \quad \frac{|4x+1|-|x-1|}{x} = 5$, para $x \in <0,1>$

Ejemplo.- Resolver la inecuación $|2x-5|<3$

Solución

$$|2x-5|<3 \Leftrightarrow -3<2x-5<3 \Leftrightarrow 2<2x<8$$

$$\Leftrightarrow 1<x<4 \Leftrightarrow x\in <1,4>$$

Luego la solución es $x\in <1,4>$

Ejemplo.- Resolver la inecuación: $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$

Solución

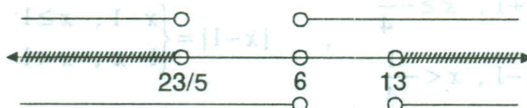
$$\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3 \Leftrightarrow -3<\frac{2x-5}{x-6}<3 \Leftrightarrow -3<\frac{2x-5}{x-6} \wedge \frac{2x-5}{x-6}<3$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-23}{x-6}>0 \wedge \frac{x-13}{x-6}>0$$

$$\Leftrightarrow (5x-23)(x-6)>0 \wedge (x-13)(x-6)>9,\ x\neq 6$$



$$x\in <-\infty,\frac{23}{5}>U<6,+\infty> \wedge <-\infty,6>U<13,+\infty>$$



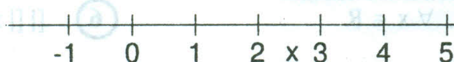
La solución es: $x\in <-\infty,\frac{23}{5}>U<13,+\infty>$

1.37 MAXIMO ENTERO.-

Si x es un número real, el máximo entero de x representaremos por $[|x|]$ y es el mayor de todo los entero menores o iguales a x, es decir:

$$[\![x]\!] = \text{máx } \{n \in Z / x \geq n\}$$

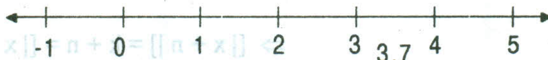
Para calcular el máximo entero de un número real x, se observa todos los enteros que se encuentran a la izquierda de x (o que coinciden con x, en caso que x sea entero) y el mayor de todos ellos es el máximo entero $[\![x]\!]$, por ejemplo:



De donde $[\![x]\!] = 2$

Ejemplo.- Hallar $[\![3.7]\!]$

De donde $[\![3.7]\!] = 3$



Si x se encuentra entre dos enteros consecutivos de la forma:



Entonces: $[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1,\ n \in Z$

Ejemplo.- Sí $[\![x]\!] = 5 \Leftrightarrow 5 \leq x < 6$

$[\![x]\!] = -5 \Leftrightarrow -5 \leq x < -4$

NOTA.- Como se podrá observar siempre se toma él numero entero mas próximo a la izquierda.

OBSERVACION.- Por definición de máximo entero se tiene:

$$[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1,\ n \in Z$$

$$\Leftrightarrow x \in [n, n+1\rangle,\ n \in Z$$

Ejemplo.- $[\![x]\!] = -4 \Leftrightarrow -4 \leq x < -3 \Rightarrow x \in [-4,-3\rangle$

Ejemplo.- $[\![x]\!] = 2.15$, es absurdo, puesto que todo máximo entero es un numero entero.

1.38. PROPIEDADES DEL MAXIMO ENTERO.-

① $[|x|] \in Z$, por definición

② $[|x|] = x \Leftrightarrow x \in Z$

③ $\forall x \in R$, $[|x|] \leq x$, por definición

④ $[|x|] \leq x < [|x|] + 1, \ \forall x \in R$

⑤ $0 \leq x - [|x|] < 1, \ \forall x \in R$

⑥ $[|[|x|]|] = [|x|], \ \forall x \in R$

⑦ $[|x+n|] = [|x|] + n, \ n \in Z$

En efecto: Sea $[|x|] = k, \ k \in Z$, entonces $k \leq x < k+1$

$$\Rightarrow k + n \leq x + n < (k+n) + 1$$

$$\Rightarrow [|x+n|] = k + n = [|x|] + n$$

⑧ $[|x|] \leq n \Leftrightarrow x < n+1, \ n \in Z$

⑨ $[|x|] < n \Leftrightarrow x < n, \ n \in Z$

⑩ $[|x|] \geq n \Leftrightarrow x \geq n, \ n \in Z, \ x \in R$

⑪ Sí $y \in Z$ $[|x|] \leq y \Leftrightarrow x < y+1$

⑫ $\forall x, y \in R$, sí $x \leq y \Leftrightarrow [|x|] \leq [|y|]$

⑬ $[|x+y|] \geq [|x|] + [|y|]$

En efecto: Sean $\begin{cases} [|x|] = m \\ [|y|] = n \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m \leq x < m+1 \\ n \leq y < n+1 \end{matrix}$

$$m + n \leq x + y < (m+n) + 2$$

entonces $[|x+y|] = m + n$ o $m + n + 1$

por lo tanto $[|x+y|] \geq m + n$ $\therefore$ $[|x+y|] \geq [|x|] + [|y|]$

⑭ Sí $n \in Z^+$ $\Rightarrow [|nx|] \geq n[|x|]$

En efecto: Sea $[|x|] = m \Rightarrow m \leq x < m+1$

$$\Rightarrow nm \leq nx < mn + n$$

$$\Rightarrow [|nx|] \geq nm$$ $\therefore$ $[|nx|] \geq n[|x|]$

(15) Si $x \in R$ y $n \in Z^+$, entonces $[|\frac{[|x|]}{n}|] = [|\frac{x}{n}|]$

(16) Si a y b $\in$ Z, $x \in R$, entonces se cumple:

i) $a \le [|x|] \le b \Rightarrow a \le x < b+1$ **ii)** $a \le [|x|] < b \Rightarrow a \le x < b$

iii) $a < [|x|] < b \Rightarrow a+1 < x < b$

Ejemplo.-

(1) Resolver la ecuación $[|3x+1|] = 2$

Solución

$[|3x+1|] = 2 \Rightarrow 2 \le 3x+1 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3}$ entonces $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}>$

(2) Resolver la inecuación $[|5x|] < 3$

Solución

$[|5x|] < 3 \Rightarrow 5x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{5}$ $\therefore\ x \in <-\infty, \frac{3}{5}>$

(3) $[|2x|] < x$

Solución

Si $x < 0 \Rightarrow 2x < x \Rightarrow [|2x|] \le 2x < x$

Es decir $[|2x|] < x$ $\therefore\ S_1 = <-\infty, 0>$

Si $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2x < 1 \Rightarrow [|2x|] = 0 < x$

Es decir $[|2x|] < x$ $\therefore\ S_2 = <0, \frac{1}{2}>$

Si $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow [|2x|] \ge 1$ es decir: $[|2x|] \ne x$ $\therefore\ S_3 = \phi$

$\therefore\ S = <-\infty, 0> \cup <0, \frac{1}{2}>$

(4) $[|\,2x\,|] < [|\,4x\,|]$

Solución

Sí $0 < x < \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} [|\,2x\,|] = 0 \\ [|\,4x\,|] = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < 0$ falso

Ahora sí $x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x \geq \frac{1}{2} \\ 4x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} [|\,2x\,|] \geq 0 \\ [|\,4x\,|] \geq 1 \end{matrix}$

Entonces $[|\,2x\,|] \leq [|\,4x\,|]$ $\therefore\ S = [\frac{1}{4}, +\infty >$

(5) $[|\,-5x\,|] < [|\,x\,|]$

Solución

Sí $0 < x < \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 5x < 1 \\ [|\,x\,|] = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < -5x < 0 \Rightarrow [|\,-5x\,|] = -1$ y $-1 < 0$

$\therefore\ S_1 = < 0, \frac{1}{5} >$

Sí $x \geq \frac{1}{5} \Rightarrow -5x < x \Rightarrow [|\,-5x\,|] < [|\,x\,|]$ $\therefore\ S_2 = [\frac{1}{5}, +\infty >$

$\therefore\ S = <0, +\infty>$

(6) $[|\,x-1\,|] < [|\,x\,|]$

Solución

Sí $x \geq 1$; supongamos que: $[|\,x\,|] = k$

$\Rightarrow [|\,x-1\,|] = k-1 < k = [|\,x\,|]$ de donde $S_1 = [1, +\infty >$

Sí $x < 1$, entonces $[|\,x-1\,|] < 0 \wedge [|\,x\,|] \leq 0$

entonces $[|\,x-1\,|] \leq [|\,x\,|]$ $\therefore\ S_2 = < -\infty, 1 >$ $\therefore\ S = R$

(7) $([|\,x\,|] - 2)(x-2)(x+1) > 0$

Solución

a) Si $x < 2 \Rightarrow [|x|] - 2 < 0$, luego resolveremos

$-(x-2)(x+1) > 0$ es decir $(x-2)(x+1) < 0$ de donde $S_1 = <-1,2$

b) Si $2 \leq x < 3$, entonces $[|x|] - 2 = 0$ de donde $S_2 = \phi$

c) Si $x \geq 3 \Rightarrow [|x|] - 2 > 0$ luego resolveremos $(x-2)(x+1) > 0$

$S_3 = [3,+\infty> \cap (<-\infty,-1> \cup [2,+\infty>)$ $\quad\therefore\quad S_3 = [3,+\infty>$

$\therefore\quad S = <-1,2> \cup [3,+\infty>$

(8) $(x^3 - 1)(x^2 + 1)\sqrt{[|x|] - x} \geq 0$

Solución

$[|x|] - x \geq 0$, entonces $[|x|] \geq x$, pero por definición se tiene: $[|x|] \leq x$,

$\forall x \in R \Rightarrow [|x|] = x \in Z$

Luego resolveremos $(x^3 - 1)(x^2 + 1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ $\quad\therefore\quad S = Z^+$

(9) $([|x - 2[|x|]|])(x-1)(x+1) \geq 0$

Solución

$[|x - 2[|x|]|] = [|x|] - 2[|x|] = [|-x|]$

i) Si $x < 0, \Rightarrow -[|x|] > 0$, entonces resolveremos

$(x-1)(x+1) \geq 0$ $\quad\therefore\quad S_1 = <-\infty,-1]$

ii) Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow [|x|] = 0$ entonces $S_2 = [0,1>$

iii) Si $x \geq 1 \Rightarrow [|x|] > 0$, entonces resolveremos $(x-1)(x+1) \leq 0$ $\quad S_3 = \{1\}$

$\therefore\quad S = <-\infty,-1] \cup [0,1]$

(10) $[|\frac{x+2}{x+3}|] = 2$

Solución

Se conoce que $[|x|] + n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$

$$\left[\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right] = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq \frac{x+2}{x+3} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq 1 - \frac{1}{x+3} < 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq -\frac{1}{x+3} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq -\frac{1}{x+3} \ \Lambda \ -\frac{1}{x+3} < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{x+3} \leq 0 \ \Lambda \ 2 + \frac{1}{x+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+4}{x+3} \leq 0 \ \Lambda \ \frac{2x+7}{x+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [(x+4)(x+3) \leq 0 \ \Lambda \ (2x+7)(x+3) > 0], \ x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [-4, -3> \ \Lambda \ x \in <-\infty, -\frac{7}{2}> U <-3, +\infty>$$

Luego la solución es: $x \in [-4, -\frac{7}{2}>$

(11) Resolver la inecuación $[|\frac{|x|-1}{5}|] \geq 4$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente: Sí $y \in Z$, $[|x|] \geq y \Leftrightarrow x \geq y$

$$4 \in Z, \ \left[\left|\frac{|x|-1}{5}\right|\right] \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x|-1}{5} \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| - 1 \geq 20$$

$$\Leftrightarrow \quad |x| \geq 21 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 21 \ V \ x \leq -21$$

La solución es: $x \in <-\infty, -21] \cup [21, +\infty>$

(12) Resolver la inecuación $[||x| - 2x|] = 0$

Solución

Por definición de máximo entero se tiene:

$[\![|x|-2x]\!]=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le |x| - 2x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \le |x| < 1 + 2x$

ahora por la propiedad transitiva $(a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c)$

se tiene: $2x \le |x| < 1 + 2x \Leftrightarrow 2x \le |x| \wedge |x| < 1 + 2x$ **...(1)**

además se conoce que: $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

1° Si $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$ reemplazando en (1) se tiene:

$2x \le 0 \wedge x < 1 + 2x \Rightarrow x \le 0 \wedge x > -1 \Rightarrow x \in \langle -1, 0]$

La primera parte de la solución es: $x \in [0, +\infty\rangle \wedge \langle -1, 0] \Rightarrow x = 0$

2° $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ reemplazando en (1) se tiene:

$2x \le -x \wedge -x < 1 + 2x \Rightarrow x \le 0 \wedge x > -\frac{1}{3} \Rightarrow x \in \langle -\frac{1}{3}, 0]$

la segunda parte de la solución es: $x \in \langle -\infty, 0\rangle \wedge \langle -\frac{1}{3}, 0] \Rightarrow x \in \langle -\frac{1}{3}, 0\rangle$

Por lo tanto la solución de $[\![|x|-2x]\!]=0$ es: $x \in \langle -\frac{1}{3}, 0\rangle U \{0\} = \langle -\frac{1}{3}, 0]$

1.39 INECUACIONES LOGARITMICAS.-

Para el estudio de las inecuaciones logarítmicas es necesario recordar lo siguiente:

En primer lugar la definición de logaritmo es decir:

$$\log_b N = x \Leftrightarrow N = b^x, \ N > 0 \wedge b > 0$$

En segundo lugar las propiedades del logaritmo

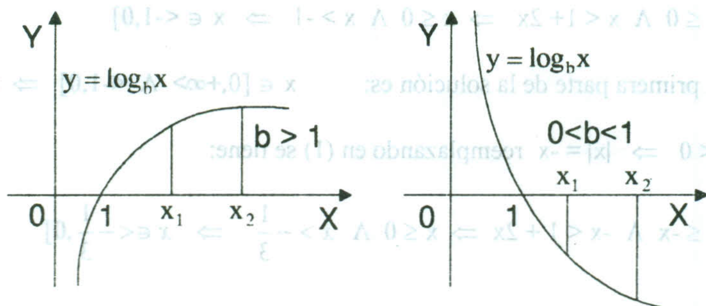
a) $\log_b AB = \log_b A + \log_b B$ **b)** $\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$

c) $\log_b A^n = n\log_b A$ **d)** $\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_b A$

e) $\log_b 1 = 0$ **f)** $\log_b b = 1$

g) $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$

En tercer lugar se observa la gráfica $y = \log_b x$ cuando b > 1 y 0 < b < 1. También dentro del campo de los números reales, solo tiene logaritmo los números reales positivo: ahora gratificamos la ecuación $y = \log_b x$.



Al observar la gráfica se tiene los siguientes casos:

1° Caso.- Cuando la base es b > 1, en la gráfica podemos observar:

i) Los números mayores que 1 tiene logaritmo positivo.

ii) Los números entre 0 y 1 tiene logaritmo negativo, entonces para cualquier $x_1, x_2 \in R^+$ se tiene

Sí b > 1 y $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$

De donde deducimos las relaciones siguientes:

a) Si x > 0, b > 1; N ∈ R $\Rightarrow \log_b x > N \Leftrightarrow x > b^n$

b) Si x > 0, b > 1; N ∈ R $\Rightarrow \log_b x < N \Leftrightarrow x < b^n$

2° Caso.- Cuando la base es 0 < b < 1, en la gráfica podemos observar:

i) Los números mayores que 1 tiene logaritmo negativo.

ii) Los números entre 0 y 1 tiene logaritmo positivo, entonces para cualquier x_1, x_2 de R^+ se tiene:

Sí $0 < b < 1$ y $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 > \log_b x_2$

de donde deducimos las relaciones siguientes:

Sí $x > 0$, $0 < b < 1$ y $N \in R \Rightarrow \log_b x > N \Leftrightarrow 0 < x < b^N$

Sí $x > 0$, $0 < b < 1$ y $E \in R \Rightarrow \log_b x < N \Leftrightarrow x > b^N$

OBSERVACION.- Resumiendo, para la solución de las inecuaciones logarítmicas se obtiene de la siguiente manera:

$$\log_b a > \log_b c \Leftrightarrow \begin{cases} a > c & \text{si } b > 1 \\ a < c & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b a > c \Leftrightarrow \begin{cases} a > b^c & \text{si } b > 1 \\ a < b^c & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes:

① $\log_2(2x+4) > \log_2(5x+3)$

Solución

Calculando el campo de existencia de los logarítmicos dados

$2x + 4 > 0 \wedge 5x + 3 > 0$ de donde $x > -2 \wedge x > -\frac{3}{5}$ $\therefore U = \langle -\frac{3}{5}, +\infty \rangle$

como la base es $2 > 1$, entonces se tiene:

$\log_2(2x+4) > \log_2(5x+3) \Leftrightarrow 2x + 4 > 5x + 3 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \langle -\infty, \frac{1}{3} \rangle$

La solución es: $x \in <-\frac{3}{5},+\infty> \cap <-\infty,\frac{1}{3}> = <-\frac{3}{5},\frac{1}{3}>$ $\therefore\ S = <-\frac{3}{5},\frac{1}{3}>$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2$

Solución

Calculando el campo de existencia del logaritmo

$2x + 5 > 0$, entonces $x > -\frac{5}{2}$ de donde $U = <-\frac{5}{2},+\infty>$

como la base es $\frac{1}{3} < 1$, entonces se tiene:

$\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2 \Leftrightarrow (2x+5 > (\frac{1}{3})^{-2} \Rightarrow 2x + 5 > 9 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in <2,+\infty>$

Luego la solución es: $x \in <-\frac{5}{2},+\infty> \cap <2,+\infty> = <2,+\infty>$ $\therefore\ S = <2,+\infty>$

(3) $\log_2(|x-2|-1) > 1$

Solución

Calculando el campo de existencia del logaritmo

$|x-2|-1 > 0 \Rightarrow |x-2| > 1 \Rightarrow x-2 > 1 \vee x-2 < -1 \Rightarrow x > 3 \vee x < 1$

de donde $U = <-\infty,1> \cup <3,+\infty>$

como la base es $2 > 1$, entonces se tiene:

$\log_2(|x-2|-1) > 1 \Rightarrow |x-2|-1 > 2^1$

$\Rightarrow |x-2| > 3 \Rightarrow x-2 > 3 \vee x-2 < -3 \Rightarrow x > 5 \vee x < -1$

$x \in <-\infty,-1> \cup <5,+\infty>$

La solución es: $x \in (<-\infty,1> \cup <3,+\infty>) \cap (<-\infty,-1> \cup <5,+\infty>)$

$\therefore\ S = <-\infty,-1> \cup <5,+\infty>$

(4) $\log_x(\frac{x+15}{x-1}) > 1$

Solución

El logaritmo dado esta bien definida sí x > 0 y x ≠ 1 además $\frac{x+15}{x-1} > 0$

Luego el campo de existencia es U = <1,+∞>

$\log_x(\frac{x+15}{x-1}) > 1 \Rightarrow \frac{x+15}{x-1} > x^1 \Rightarrow \frac{x+15}{x-1} - x > 0$, de donde

$\frac{x+15-x^2+x}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-15}{x-1} < 0$ de donde $\frac{(x-5)(x+3)}{x-1} < 0$

de donde x ∈ <1,+∞> ∪ <1,5>

La solución es: x ∈ <1,+∞> ∩ (<-∞,-3> ∪ <1,5>) = <1,5> ∴ S = <1,5>

(5) Resolver la inecuación $\log_{1/3}(2x+5) < -2$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente: x > 0, 0 < b < 1, N ∈ R, $\log_b x < N \Leftrightarrow x > b^N$

para nuestro caso 2x + 5 > 0 ⇒ $x > -\frac{5}{2}$

$\log_{1/3}(2x+5) < -2 \Leftrightarrow 2x+5 > (\frac{1}{3})^{-2}$

2x + 5 > 9 ⇔ 2x > 4 ⇒ x > 2 , la solución es: x ∈ <2,+∞>

(6) Resolver la inecuación $\log_2(|x-2|-1) > 1$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente: x > 0, b > 1, N ∈ R, $\log_b x > N \Leftrightarrow x > b^N$

para nuestro caso se tiene |x – 2| - 1 > 0

$|x-2|>1 \Leftrightarrow x-2>1 \vee x-2<-1 \Leftrightarrow x>3 \vee x<1$

$\log_2(|x-2|-1)>1 \Leftrightarrow |x-2|-1>2$

$|x-2|>3 \Leftrightarrow x-2>3 \vee x-2<-3 \Leftrightarrow x>5 \vee x<-1$

La solución es $x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 5,+\infty\rangle$

1.40 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

Resolver las siguientes ecuaciones:

① $|x^2+2|=2x+1$

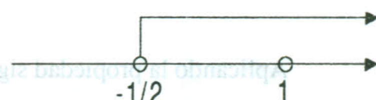
Solución

Aplicando la siguiente propiedad: $|a|=b \Leftrightarrow [b\geq 0 \wedge (a=b \vee a=-b)]$

$|x^2+2|=2x+1 \Leftrightarrow [2x+1\geq 0 \wedge (x^2+2=2x+1 \vee x^2+2=-2x-1)]$

$\Leftrightarrow [x\geq -\frac{1}{2} \wedge (x^2-2x+1=0 \vee x^2+2x+3=0)]$

$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2} \wedge (x=1 \vee x=\phi)$



Luego la solución es: x = 1

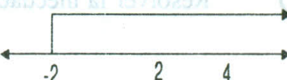
② $|x^2-x-6|=x+2$

Solución

$|x^2-x-6|=x+2 \Leftrightarrow [x+2\geq 0 \wedge (x^2-x-6=x+2 \vee x^2-x-6=-x-2)]$

$\Leftrightarrow [x\geq -2 \wedge (x^2-2x-8=0 \vee x^2=4)]$

$\Leftrightarrow [x\geq -2 \wedge (x=4, x=-2 \vee x=\pm 2)]$



La solución es el conjunto {-2,2,4}

③ $x^2-2|x|-3=0$

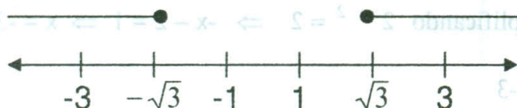
Solución

La ecuación dada se expresa así:

$$2|x| = x^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad [x^2 - 3 \geq 0 \ \Lambda \ (2x = x^2 - 3 \ \text{v} \ 2x = -x^2 + 3)]$$

$$\Leftrightarrow \quad [x^2 \geq 3 \ \Lambda \ (x^2 - 2x - 3 = 0 \ \text{v} \ x^2 + 2x - 3 = 0)]$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \geq \sqrt{3} \ \text{V} \ x \leq -\sqrt{3}) \ \Lambda \ (x = 3, -1 \ \text{v} \ x = -3, 1)$$



La solución es {-3,3}

④ $|x - 4| = |x - 2|$

Solución

Aplicamos la propiedad: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \ \text{V} \ a = -b$

$|x - 4| = |x - 2| \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 = x - 2 \ \text{V} \ x - 4 = -x + 2$

$\Leftrightarrow \quad -4 = -2 \ \text{V} \ 2x = 6$

$\Leftrightarrow \quad \phi \ \text{V} \ x = 3$, La solución es $x = 3$

⑤ $|x - 2| = |3 - 2x|$

Solución

$|x - 2| = |3 - 2x| \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 3 - 2x \ \text{V} \ x - 2 = -3 + 2x$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3} \ \text{V} \ x = 1$, La solución es: $\{1, \frac{5}{3}\}$

⑥ $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 \ , & x \geq -2 \\ -x-2 \ , & x < -2 \end{cases} \qquad |2^{x+1} - 1| = \begin{cases} 2^{x+1} - 1 \ , & x \geq -1 \\ 1 - 2^{x+1} \ , & x < -1 \end{cases}$$



para $x < -2 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = -x-2 \\ |2^{x+1}-1| = 1-2^{x+1} \end{cases}$

reemplazando en la ecuación $2^{|x+2|} - |2^{x+1}-1| = 2^{x+1}+1$, se tiene:

$2^{-x-2} - (1-2^{x+1}) = 2^{x+1}+1$, simplificando $2^{-x-2} = 2 \Rightarrow -x-2=1 \Rightarrow x = -3$

Luego $x < -2$, la solución es $x = -3$

Para $-2 \le x < -1 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |2^{x+1}-1| = 1-2^{x+1} \end{cases}$

reemplazando en la ecuación $2^{x+2} - (1-2^{x+1}) = 2^{x+1}+1$, simplificando

$2^{x+2} = 2 \Rightarrow x+2=1 \Rightarrow x = -1$, como $-2 \le x < -1$ entonces $x = -1$ no es solución

Para $x \ge -1 \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |2^{x+1}-1| = 2^{x+1}-1 \end{cases}$

reemplazando en la ecuación se tiene: $2^{x+2} - (2^{x+1}-1) = 2^{x+1}+1$, simplificando

$2^{x+2} = 2^{x+2} \Rightarrow x+2 = x+2,\ \forall x \in R$

Luego la solución para $x \ge -1$ es $R \wedge [-1,\infty\rangle = [-1,\infty\rangle$

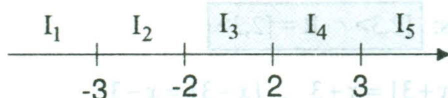
Por lo tanto la solución de la ecuación es: $x = -3$ y $[-1,+\infty\rangle$

(7) $|x^2-9|+|x^2-4| = 5$

Solución

A la ecuación $|x^2-9|+|x^2-4| = 5$ expresaremos en la forma:

$|x+3|\,|x-3| + |x-2|\,|x+2| = 5$ **...(1)**



analizando en cada intervalo I_i, i = 1, 2, 3, 4, 5

Para x < -3 ⇒ $\begin{cases} |x+3| = -x-3 \ ; \ |x-3| = 3-x \\ |x+2| = -x-2 \ : \ |x-2| = 2-x \end{cases}$ **... (2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene: (-x – 3)(3 – x) + (-x – 2)(2 – x) = 5

efectuando y simplificando $x^2 = 9$ ⇒ x = ± 3

luego como x < -3 la solución es: x ∈ <-∞,-3> Λ {± 3} = ϕ

Para -3 ≤ x < -2 ⇒ $\begin{cases} |x+3| = x+3 \ ; \ |x-3| = 3-x \\ |x+2| = -x-2 \ : \ |x-2| = 2-x \end{cases}$ **... (3)**

Reemplazando (3) en (1) se tiene: (x + 3)(3 – x) – (x + 2)(2 – x) = 5

efectuando operaciones y simplificando: $9 - x^2 - 4 + x^2 = 5$ ⇒ 5 = 5 es valido ∀ x ∈ R

luego la solución es: [-3,-2> ∩ R = [-3,-2>

Para -2 ≤ x < 2 ⇒ $\begin{cases} |x+3| = x+3 \ ; \ |x-3| = 3-x \\ |x+2| = x+2 \ ; \ |x-2| = 2-x \end{cases}$ **... (4)**

Reemplazando (4) en (1) se tiene: (x + 3)(3 – x) + (x + 2)(2 – x) = 5

$9 - x^2 + 4 - x^2 = 5$ ⇒ x = ± 2

luego la solución es: [-2,-2> ∩ {± 2} = {-2}

para 2 ≤ x < 3 ⇒ $\begin{cases} |x+3| = x+3 \ , \ |x-3| = 3-x \\ |x+2| = x+2 \ , \ |x-2| = x-2 \end{cases}$ **...(5)**

reemplazando (5) en (1) se tiene: (x + 3)(3 – x) + (x + 2)(x – 2) = 5

efectuando y simplificando 5 = 5 es valido ∀ x ∈ R

Luego la solución es: $[2,3> \cap R = [2,3>$

Para $x \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} |x+3| = x+3 & , |x-3| = x-3 \\ |x+2| = x+2 & , |x-2| = x-2 \end{cases}$ ... **(6)**

Reemplazando (6) en (1) se tiene: $(x + 3)(x - 3) + (x + 2)(x - 2) = 5$

efectuando y simplificando: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Luego la solución es: $[3,+\infty> \cap \{\pm 3\} = \{3\}$

Por lo tanto la solución de la ecuación es: $[-3,-2> \text{ v } \{-2\} \cup [2,3> \text{ v } \{3\}$

$\therefore$ $[-3,-2] \cup [2,3]$

8 $|x^2 - 4| = -2x + 4$

Solución

Por la propiedad: $|a| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge (a = b \text{ v } a = -b)$

$$|x^2 - 4| = -2x + 4 \Leftrightarrow -2x + 4 \geq 0 \wedge (x^2 - 4 = -2x + 4 \text{ v } x^2 - 4 = 2x - 4)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge (x^2 + 2x - 8 = 0 \text{ v } x^2 - 2x = 0)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge ((x + 4)(x - 2) = 0 \text{ v } x(x - 2) = 0)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge (x = 2, -4 \text{ v } x = 0,2)$$

Luego $\{-4, 0, 2\}$ son las soluciones de la ecuación dada

9 $|x^2 + 3| = |2x + 1|$

Solución

Por la propiedad: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ v } a = -b$

$$|x^2 + 3| = |2x + 1| \Leftrightarrow x^2 + 3 = 2x + 1 \text{ v } x^2 + 3 = -2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ v } x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi \text{ v } \phi = \phi$$

La solución es él ϕ puesto que $\forall x \in R$, $x^2 - 2x + 2 > 0$, $x^2 + 2x + 4 > 0$

(10) $|x^2+6x+1|=2x+6$

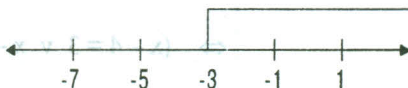
Solución

Por la propiedad: $|a| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)$

$|x^2+6x+1|=2x+6 \Leftrightarrow 2x+6 \geq 0 \wedge [x^2+6x+1=2x+6 \vee x^2+6x+1=-2x-6]$

$\Leftrightarrow x \geq -3 \wedge (x^2+4x-5=0 \vee x^2+8x+7=0)$

$\Leftrightarrow x \geq -3 \wedge (x = 1,-5 \vee x = -1,-7)$



Luego la solución es $\{-1,1\}$

(11) $|\frac{3x+8}{2x-3}|=8$

Solución

$|\frac{3x+8}{2x-3}|=8 \Leftrightarrow \frac{3x+8}{2x-3}=8 \vee \frac{3x+8}{2x-3}=-8$, para $x \neq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 3x+8=8(2x-3) \vee 3x+8=-8(2x-3),\ x \neq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 13x = 32 \vee 19x = 16$, Luego la solución es: $x=\frac{32}{13},\ x=\frac{16}{19}$

(12) $||x|-5| = 2x-3$

Solución

$||x|-5| = 2x-3 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 0 \wedge (|x|-5 = 2x-3 \vee |x|-5 = -2x+3)$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \wedge (|x| = 2x+2 \vee |x| = -2x+8)$

Como $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x = 2x+2 \vee x = -2x+8$

$\Rightarrow x = -2 \vee x = \frac{8}{3}$, por lo tanto la solución es $x = \frac{8}{3}$

(13) $|x-4|^2 - 5|x-4| + 6 = 0$

Solución

Factorizando se tiene: $(|x-4|-3)(|x-4|-2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $|x-4|-3=0$ v $|x-4|-2=0$

$\Leftrightarrow$ $|x-4|=3$ v $|x-4|=2$

$\Leftrightarrow$ $(x-4=3$ v $x-4=-3)$ v $(x-4=2$ v $x-4=-2)$

$\Leftrightarrow$ $x=7$ v $x=1$ v $x=6$ v $x=2$, las soluciones son: $\{1,2,6,7\}$

(14) Hallar el valor de la expresión: $\dfrac{|4x+7|-|x-7|}{x}$, si $x \in \langle 2,5 \rangle$

Solución

Por la definición de valor absoluto se tiene:

$$|4x+7| = \begin{cases} 4x+7 & \text{si } x \geq -\dfrac{7}{4} \\ -4x-7 & \text{si } x < -\dfrac{7}{4} \end{cases} \quad ; \quad |x-7| = \begin{cases} x-7 & \text{si } x \geq 7 \\ 7-x & \text{si } x < 7 \end{cases}$$

ahora para $x \in \langle 2,5 \rangle \Leftrightarrow |4x+7| = 4x+7$, $|x-7| = 7-x$

como $x \in \langle 2,5 \rangle \Leftrightarrow \dfrac{|4x+7|-|x-7|}{x} = \dfrac{4x+7-(7-x)}{x} = \dfrac{5x}{x} = 5$

$\therefore \quad \dfrac{|4x+7|-|x-7|}{x} = 5$ si $x \in \langle 2,5 \rangle$

(15) Hallar el valor de la expresión: $\dfrac{|5x+4|-|4+3x|}{x}$ si $x \in \langle 0,3 \rangle$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|5x+4| = \begin{cases} 5x+4 & \text{si } x \geq -\dfrac{4}{5} \\ -5x-4 & \text{si } x < -\dfrac{4}{5} \end{cases} \quad ; \quad |4+3x| = \begin{cases} 4+3x & \text{si } x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -4-3x & \text{si } x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

ahora para x ∈ <0,3> ⇔ |5x + 4| = 5x + 4, |4 + 3x| = 4 + 3x

como x ∈ <0,3> ⇔ $\dfrac{|5x+4|-|4-3x|}{x} = \dfrac{5x+4-(4+3x)}{x} = \dfrac{2x}{x} = 2$

$\therefore \quad \dfrac{|5x+4|-|4+3x|}{x} = 2$ si x ∈ <0,3>

16 Hallar el valor de la expresión: $\dfrac{|5x-20|-|3x-20|}{x}$ si x ∈ <-3,-2>

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto

$$|5x-20| = \begin{cases} 5x-20 & \text{si } x \geq 4 \\ 20-5x & \text{si } x < 4 \end{cases} \quad ; \quad |3x-20| = \begin{cases} 3x-20 & \text{si } x \geq \dfrac{20}{3} \\ 20-3x & \text{si } x < \dfrac{20}{3} \end{cases}$$

ahora para x ∈ <-3,-2> ⇔ |5x – 20| = 20 – 5x, |3x – 20| = 20 – 3x

como x ∈ <-3,-2> ⇔ $\dfrac{|5x-20|-|3x-20|}{x} = \dfrac{20-5x-(20-3x)}{x} = \dfrac{-2x}{x} = -2$

$\therefore \quad \dfrac{|5x-20|-|3x-20|}{x} = -2$ si x ∈ <-3,-2>

17 Resolver la inecuación $|x^2-4| < 5$

Solución

Por la propiedad: |a| < b ⇔ -b < a < b donde b > 0

$|x^2-4| < 5 \iff -5 < x^2-4 < 5$

$\Leftrightarrow \quad -1 < x^2 < 9 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x^2 \;\; \Lambda \;\; x^2 < 9$

$\Leftrightarrow$ x ∈ R Λ -3 < x < 3

$\Leftrightarrow$ -3 < x < 3, Luego la solución es **x ∈ <-3,3>**

(18) $|9 - x^2| \geq 3$

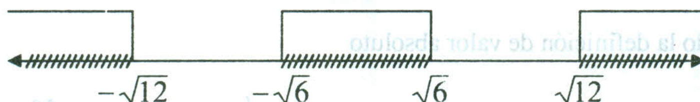
Solución

Por la propiedad |a| ≥ b ⇔ a ≥ b V a ≤ -b

$|9 - x^2| \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - x^2 \geq 3 \;\; \text{v} \;\; 9 - x^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad x^2 \leq 6 \;\; \text{v} \;\; x^2 \geq 12$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \;\; \text{v} \;\; x \geq \sqrt{12} \;\; \text{v} \;\; x \leq -\sqrt{12}$



Luego la solución es: $x \in <-\infty, -\sqrt{12}] \; U \; [-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \; U \; [\sqrt{12}, +\infty>$

(19) $\left|\frac{3x-3}{x+1}\right| < 2$

Solución

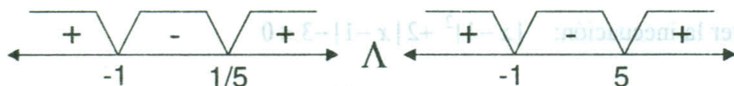
Mediante la propiedad: |a| < b ⇔ -b < a < b

$\left|\frac{3x-3}{x+1}\right| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \frac{3x-3}{x+1} < 2$

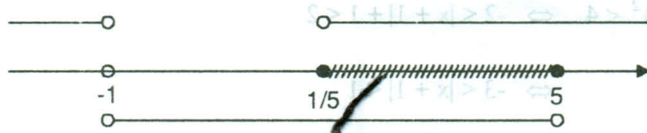
$\Leftrightarrow \quad -2 < \frac{3x-3}{x+1} \;\; \Lambda \;\; \frac{3x-3}{x+1} < 2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{5x-1}{x+1} > 0 \;\; \Lambda \;\; \frac{x-5}{x+1} < 0$, para x ≠ -1

$\Leftrightarrow$ (5x – 1)(x + 1) > 0 Λ (x – 5)(x + 1) < 0, x ≠ -1



$$x \in <-\infty,-1> U <\frac{1}{5},+\infty> \ \Lambda \ x \in <-1,5>$$



Luego la solución es $x \in <\frac{1}{5},5>$

(20) Resolver: $\frac{1}{x+4} \in [\frac{1}{3},1]$

Solución

$$\frac{1}{x+4} \in [\frac{1}{3},1] \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{x+4} \le 1 \Rightarrow 1 \le x+4 \le 3$$

$\Rightarrow$ $-3 \le x \le -1$, luego la solución es $x \in [-3,-1]$

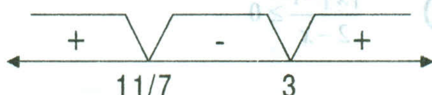
(21) Resolver $|\frac{5}{2x-1}| \ge |\frac{1}{x-2}|$

Solución

$|\frac{5}{2x-1}| \ge |\frac{1}{x-2}| \Leftrightarrow \frac{5}{|2x-1|} \ge \frac{1}{|x-2|}$ para $x \ne \frac{1}{2},2$ se tiene

$5|x-2| \ge |2x-1|$, elevando al cuadrado $25(x-2)^2 \ge (2x-1)^2$ efectuando y simplificando:

$7x^2 - 32x + 33 \ge 0 \Leftrightarrow (7x-11)(x-3) \ge 0$



Como $(7x-11)(x-3) \ge 0$, se toma los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir

$<-\infty,\frac{11}{7}] \ U \ [3,+\infty>$. Luego la solución es: $<-\infty,\frac{11}{7}] \ U \ [3,+\infty> -\{\frac{1}{2}\}$

(22) Resolver la inecuación: $|x-1|^2 + 2|x-1| - 3 < 0$

Solución

Completando cuadrados se tiene:

$(|x-1|+1)^2 < 4 \iff -2 < |x+1| + 1 < 2$

$\iff -3 < |x+1| < 1$

$\iff -3 < |x+1| \wedge |x+1| < 1 \iff R \wedge -1 < x+1 < 1$

$\iff R \wedge -2 < x < 0$, la solución es $x \in \langle -2,0 \rangle$

(23) $|x-3|^2 - 3|x-3| - 18 > 0$

Solución

Factorizando se tiene:

$(|x-3| - 6)(|x-3| + 3) > 0 \iff (|x-3| > 6 \wedge |x-3| > -3) \vee (|x-3| < 6 \wedge |x-3| < -3)$

$\iff (|x-3| > 6 \wedge R) \vee \phi$

$\iff (x-3 > 6 \vee x-3 < -6) \wedge R$

$\iff (x > 9 \vee x < -3) \wedge R$

$\iff (x < -3 \vee x > 9)$

La solución es $x \in \langle -\infty,-3 \rangle \cup \langle 9,+\infty \rangle$

(24) $\dfrac{|x|-1}{2-x} \geq 0$

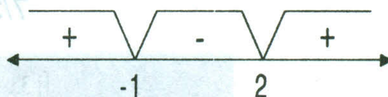
Solución

Por la definición de valor absoluto $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, reemplazando en la ecuación dada se tiene

$\frac{-x-1}{2-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$, para $x \neq 2$

de donde $(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = 2$



como $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$ la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es

decir: $x \in (<-\infty,-1] \cup <2,+\infty>) \wedge <-\infty,0]$

$\therefore\ x \in <-\infty,-1]$ ... (1)

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, reemplazando en la ecuación dada se tiene

$\frac{x-1}{2-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} \leq 0$ de donde

Si $\frac{x-1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$ para $x \neq 2$

Entonces $(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2$



Como $\frac{x-1}{x-2} \leq 0 \Rightarrow$ la solución es: $x \in [0,+\infty> \wedge [1,2> = [1,2>$

$\therefore\ x \in [1,2>$ ... (2)

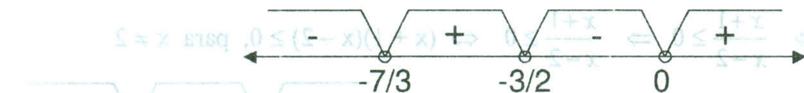
La solución de la inecuación es la unión de (1) y (2) es decir: $x \in <-\infty,-1] \cup [1,2>$

(25) $\left|\frac{1}{2x+3}\right| \leq \left|\frac{x}{3x+7}\right|$

Solución

$\left|\frac{1}{2x-+3}\right| \leq \left|\frac{x}{3x+7}\right| \Rightarrow \frac{1}{|2x+3|} \leq \frac{|x|}{|3x+7|}$

Para $x \neq -\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}$, se tiene: $|3x+7| \leq |x|\,|2x+3|$ ... (1)



a) si $x < -\frac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = -3x-7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = -2x-3 \end{cases}$ **... (2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene: -3x– 7 ≤ (-x)(-2x – 3) de donde $2x^2+6x+7 \geq 0$

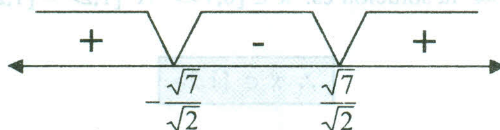
pero como ∀ x ∈ R, $2x^2+6x+7 \geq 0$

la solución es: $<-\infty,-\frac{7}{3}> \Lambda\ R = <-\infty,-\frac{7}{3}>$

b) Si $-\frac{7}{3} < x < -\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = -2x-3 \end{cases}$ **... (3)**

reemplazando (3) en (1) se tiene: 3x + 7 ≤ -x(-2x – 3) de donde $2x^2-7 \geq 0$

$2x^2-7 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x+\sqrt{7})(\sqrt{2}x-\sqrt{7}) \geq 0$



La solución es: $<-\frac{7}{3},-\frac{3}{2}> \ \Lambda\ (<-\infty,-\sqrt{\frac{7}{2}}]\ U\ [\sqrt{\frac{7}{2}},+\infty>)$

$\therefore\ <-\frac{7}{3},-\sqrt{\frac{7}{2}}]$

c) Si $-\frac{3}{2} < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = -x \\ |2x+3| = 2x+3 \end{cases}$ **... (4)**

reemplazando (4) en (1) se tiene: $3x + 7 \leq (-x)(2x + 3)$ de donde $2x^2 + 6x + 7 \leq 0$

como $\forall x \in R$, $2x^2 + 6x + 7 > 0$ entonces la solución es: $< -\frac{3}{2}, 0 > \wedge \phi = \phi$

d) Si $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} |3x+7| = 3x+7 \\ |x| = x \\ |2x+3| = 2x+3 \end{cases}$ **... (5)**

reemplazando (5) en (1) se tiene: $3x + 7 \leq x(2x + 3) \Rightarrow 2x^2 - 7 \geq 0$

$2x^2 - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x + \sqrt{7})(\sqrt{2}x - \sqrt{7}) \geq 0$

+ $-\sqrt{\frac{7}{2}}$ - $\sqrt{\frac{7}{2}}$ +

La solución es: $[0, +\infty > \wedge (< -\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}] \, U \, [\sqrt{\frac{7}{2}}, \infty >) = [\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty >$

luego la respuesta es: $< -\infty, -\frac{7}{3} > U < -\frac{7}{3}, -\sqrt{\frac{7}{2}}] \, U \, [\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty >$

(26) $\frac{|x-1| - |x|}{1 - |x|} \geq 0$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto: $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{si } x < 1 \end{cases}$; $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$



a) Si $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = 1-x \end{cases}$ **... (2)**

reemplazando (2) en la inecuación dada. $\frac{1 - x - (-x)}{1 - (-x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x} \geq 0$

como $\frac{1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0$, $x \neq -1 \Leftrightarrow x > -1$

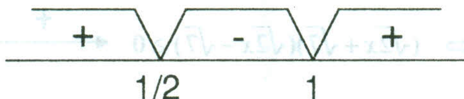
La solución para este caso es: $<-\infty,0> \Lambda <-\infty,-1> = <-1,0>$

b) Si $0 \le x < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |x-1| = 1-x \end{cases}$ ... **(3)**

reemplazando (2) en la ecuación dada:

$$\frac{1-x-x}{1-x} \ge 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \ge 0 \text{ para } x \ne 1$$

ahora mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:



La solución para este caso es: $[0,1> \Lambda\ (<-\infty,\frac{1}{2}]\ v\ <1,+\infty>) = [0,\frac{1}{2}]$

c) Si $x \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = x-1 \end{cases}$ ... **(4)**

reemplazando (4) en la inecuación dada:

$$\frac{x-1-x}{1-x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \text{ para } x \ne 1 \text{ de donde } x > 1.$$

La solución para este caso es: $[1,+\infty> \Lambda <1,+\infty> = <1,+\infty>$

Por lo tanto la respuesta es: $<-1,0> U\ [0,\frac{1}{2}]\ U <1,+\infty> = <-1,\frac{1}{2}]\ U <1,+\infty>$

(27) $|2x^2-3x-9| < 2|x^2-2x-3|$

Solución

Se conoce que: $\begin{cases} 2x^2-3x-9 = (2x+3)(x-3) \\ x^2-2x-3 = (x+1)(x-3) \end{cases}$ ... **(1)**

Reemplazando (1) en la inecuación dada

$|2x^2-3x-9| < 2|x^2-2x-3| \Leftrightarrow |(2x+3)(x-3)| < 2|(x+1)(x-3)|$

de donde: $|2x+3||x-3| < 2|x+1||x-3|$ para $x \neq 3$

se tiene: $|2x+3| < 2|x+1|$, elevando al cuadrado:

$4x^2+12x+9 < 4x^2+8x+4 \Rightarrow 4x < -5$ de donde:

$x < -\frac{5}{4}$; luego la solución es: $x \in \langle -\infty, -\frac{5}{4} \rangle$

(28) $|\frac{1}{x}-2| < 11$

Solución

Mediante la propiedad: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

$$|\frac{1}{x}-2| < 11 \Leftrightarrow -11 < \frac{1}{x}-2 < 11 \Leftrightarrow -9 < \frac{1}{x} < 13$$

mediante la propiedad: $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

$$-9 < \frac{1}{x} < 13 \Leftrightarrow -9 < \frac{1}{x} \wedge \frac{1}{x} < 13$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x+1}{x} > 0 \wedge \frac{13x-1}{x} > 0$$



La solución es: $x \in (\langle -\infty, -\frac{1}{9} \rangle U \langle 0, +\infty \rangle) \wedge (\langle -\infty, 0 \rangle U \langle \frac{1}{13}, +\infty \rangle)$

$$\therefore x \in \langle -\infty, -\frac{1}{9} \rangle U \langle \frac{1}{13}, +\infty \rangle$$

(29) $|3x+2| \le |2x-1| + |x+3|$

Solución

Aplicando la desigualdad triangular

$\forall$ x $\in$ R: $|3x + 2| = |(2x - 1) + (x + 3)| \leq |2x - 1| + |x + 3|$

Por lo tanto la solución es: $\forall x \in R$

(30) $4^x + 2^{x+3} - 9 \geq 0$

Solución

Se conoce: $4^x = 2^{2x}$, $2^{x+3} = 8.2^x$

$$4^x + 2^{x+3} - 9 \geq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} + 8.2^x - 9 \geq 0$$

$$2^{2x} + 8.2^x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2^x + 9)(2^x - 1) \geq 0$$

$$(2^x + 9)(2^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (2^x + 9 \geq 0 \ \Lambda \ 2^x - 1 \geq 0) \ V \ (2^x + 9 \leq 0 \ \Lambda \ 2^x - 1 \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow (2^x \geq -9 \ \Lambda \ 2^x \geq 1) \ V \ (2^x \leq -9 \ \Lambda \ 2^x \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow x \in (R \ \Lambda \ [0,+\infty>) \ V \ (\phi \ \Lambda <-\infty,0])$$

$$\Leftrightarrow x \in [0,+\infty>$$

(31) Demostrar que: Sí $|x - a| \leq R \Rightarrow x \in [a - R, a + R]$

Solución

Si $|x - a| \leq R \Rightarrow -R \leq x - a \leq R$

$\Rightarrow a - R \leq x \leq a + R$

$\Rightarrow x \in [a - R, a + R]$

(32) Demostrar que: Sí $|x + 4| < 1 \Rightarrow |\frac{2x+3}{x-1}| < \frac{7}{4}$

Solución

A la expresión $\frac{2x+3}{x-1}$ expresaremos en la forma: $\frac{2x+3}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$ **... (1)**

Como $|x + 4| < 1 \Rightarrow -1 < x + 4 < 1$ sumando –5 se tiene:

$$\Rightarrow -6 < x - 1 < -4 \text{ invirtiendo}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} < \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{6}, \text{ multiplicando por 5}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4} < \frac{5}{x+1} < -\frac{5}{6} \quad \text{sumando 2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} < 2 + \frac{5}{x-1} < \frac{7}{6} < \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{2x+3}{x-1} < \frac{7}{4} \Rightarrow |\frac{2x+3}{x-1}| < \frac{7}{4}$$

(33) $\dfrac{|2x-1|+1}{x^2-2x-3} \le 0$

Solución

Por definición de valor absoluto: $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \ge \frac{1}{2} \\ 1-2x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

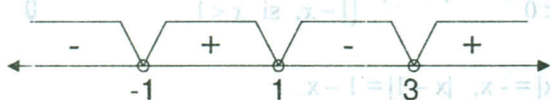


Sí $x < \frac{1}{2} \Rightarrow |2x - 1| = 1 - 2x$

Reemplazando en la inecuación dada:

$$\frac{1-2x+1}{x^2-2x-3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{(x-3(x+1)} \ge 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)(x+1) \ge 0$$

para $x \ne -1,3$. Mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:



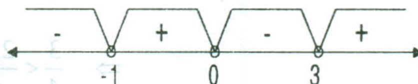
La solución para este caso es: $x \in \langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle \wedge (\langle -1,1] \cup \langle 3,+\infty \rangle)$

$$\therefore x \in \langle -1, \frac{1}{2} \rangle$$

Si $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 2x-1$, reemplazando en la inecuación dada

$$\frac{2x-1+1}{x^2-2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-3)(x+1)} \geq 0 \Rightarrow x(x-3)(x+1) \geq 0,\ x \neq -1,3$$

Mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:



La solución para este caso es: $x \in [\frac{1}{2}, +\infty \rangle \wedge (\langle -1,0] \cup \langle 3,+\infty \rangle$

$$\therefore x \in \langle 3,+\infty \rangle$$

Por lo tanto la solución de la inecuación es: $x \in \langle -1, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle 3,+\infty \rangle$

(34) $\frac{|x^2-x|-2}{|x|-1} \geq 0$

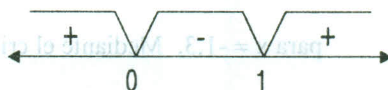
Solución

A la inecuación expresaremos en la forma

$$\frac{|x^2-x|-2}{|x|-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{|x||x-1|-1}{|x|-1} \geq 0 \quad \textbf{... (1)}$$

Ahora aplicamos la definición de valor absoluto.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



para $x < 0 \Rightarrow |x| = -x,\ |x-1| = 1-x$ **... (2)**

$$\frac{-x(1-x)-2}{-x-1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-x-2}{x+1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-2)(x+1)}{x+1)} \leq 0$$

para $x \neq 1$, $\frac{(x-2)(x+1)}{x+1} \leq 0 \Rightarrow x-2 \leq 0,\ x \neq -1$

$\Rightarrow x \in$ <-∞,-1> U <-1,2]

Luego la solución para este caso es: $x \in$ <-∞,0> Λ (<-∞,-1> U <-1,1])

∴ $x \in$ <-∞,-1> U <-1,0> ...(α)

para $0 \leq x < 1$, $\Rightarrow |x| = x,\ |x-1| = 1-x$ ... **(3)**

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{x(1-x)-2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-x^2-2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-x+2}{x-1} \leq 0$$

pero como $\forall\, x \in R,\ x^2-x+2>0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \leq 0 \Rightarrow x-1 \leq 0$

$x \neq 1 \Rightarrow x < 1$, luego la solución para este caso es: $x \in$ [0,1> Λ <-∞,1> = [0,1> ... **(β)**

para $x \geq 1 \Rightarrow |x| = x,\ |x-1| = x-1$

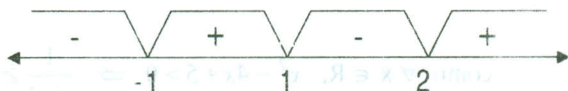
reemplazando (4) en (1) se tiene:

$$\frac{x(x-1)-2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} \geq 0$$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)(x-1) \geq 0$, para $x \neq 1$

Ahora por el criterio de los puntos críticos se tiene

$x \in$ [1,+∞> Λ ([-1,1> U [2,+∞>)



∴ $x \in$ [2,+∞> ... (γ)

Por lo tanto la solución general de la inecuación es: la unión de **(α)**, **(β)** y **(γ)**

$x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,0\rangle \cup [0,1\rangle \cup [2,+\infty\rangle$

(35) $\dfrac{|4x-x^2|-5}{1-\sqrt{x^2}} \geq 0$

Solución

A la inecuación dada expresaremos en la forma.

$$\frac{|4x-x^2|-5}{1-\sqrt{x^2}} \geq 0 \Rightarrow \frac{|x||x-4|-5}{1-|x|} \geq 0 \quad \textbf{... (1)}$$

Aplicando la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad |x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si } x \geq 4 \\ 4-x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Para $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, $|x-4| = 4-x$ **... (2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $\dfrac{-x(4-x)-5}{1+x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-4x-5}{x+1} \geq 0$

$\dfrac{(x-5)(x+1)}{x+1} \geq 0$ para $x \neq -1$, $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

La solución para este caso se tiene: $x \in \langle -\infty,0\rangle \wedge [5,+\infty\rangle = \phi$ **... (α)**

Para $0 \leq x < 4 \Rightarrow |x| = x$, $|x-4| = 4-x$ **... (3)**

Reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{x(4-x)-5}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{4x-x^2-5}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x+5}{x-1} \geq 0$$

como $\forall x \in R$, $x^2-4x+5 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0$, $x \neq 1$

entonces $x > 1$, por lo tanto la solución para este caso es:

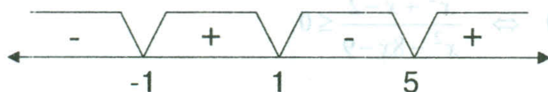
$x \in [0,4> \wedge <1,+\infty>$ **∴ x ∈ <1,4>** ... (β)

para $x \geq 4 \Rightarrow |x| = x$, $|x-4| = x-4$ ... (4)

reemplazando (4) en (1) se tiene:

$$\frac{x(x-4)-5}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-5}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-5}{x-1} \geq 0$$

para $x \neq 1$, $(x-5)(x+1)(x-1) \geq 0$, ahora mediante el criterio de los puntos críticos se tiene:



la solución para este caso es: $x \in [4,+\infty> \wedge ([-1,1> \vee [5,+\infty>)$

∴ x ∈ [5,+∞> ... (γ)

La solución general es la unión de **(α)**, **(β)**, y **(γ)**

∴ x ∈ <1,4> U [5,+∞>

(36) $\frac{|2-x|-x^2}{8x-|9-x^2|} \leq 0$

Solución

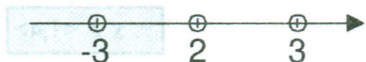
A la inecuación dada se puede expresar en la forma:

$$\frac{|2-x|-x^2}{8x-|9-x^2|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{|x-2|-x^2}{8x-|x^2-9|} \leq 0 \quad \text{(propiedad del valor absoluto)}$$

$$\frac{|2-x|-x^2}{8x-|9-x^2|} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{|x-2|-x^2}{8x-|x+3||x-3|} \leq 0 \quad \text{... (1)}$$

ahora aplicando la definición de valor absoluto.

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & x \geq -3 \\ -x-3, & x < -3 \end{cases}, \quad |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}, \quad |x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ 3-x, & x < 3 \end{cases}$$



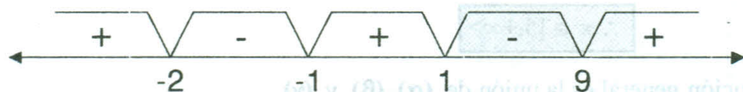
Si x < -3, $\Rightarrow$ |x + 3| = -x – 3, |x – 2| = 2 – x, |x – 3| = 3 – x ... **(2)**

Ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene:

$$\frac{2-x-x^2}{8x-(-x-3)(3-x)} \le 0 \Rightarrow \frac{2-x-x^2}{8x+(3+x)(3-x)} \le 0$$

$$\frac{2-x-x^2}{8x+9-x^2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2-8x-9} \le 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-9)(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-9)(x+1) \le 0,\ x \ne -1,9$$



de donde x ∈ [-2,-1> U [1,9>

La solución para el caso en que x < -3 es: x ∈ ([-2,-1> U [1,9>) Λ <-∞,-3> = ϕ

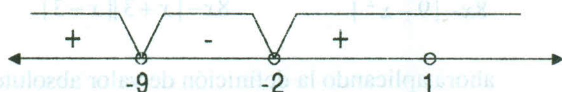
para - 3 ≤ x < 2 $\Rightarrow$ |x + 3| = x + 3, |x – 2| = 2 – x, |x – 3| = 3 – x ... **(3)**

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{2-x-x^2}{8x-(x+3)(3-x)} \le 0 \Rightarrow \frac{2-x-x^2}{8x-9+x^2} \le 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2+8x-9} \ge 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+9)(x-1)} \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x+9)(x-1) \ge 0, \text{ para } x \ne -9,1$$

$(x+2)(x+9)(x-1)^2 \ge 0$, $x \ne -9,1$



de donde x ∈ <-∞,-9> U [-2,1> U <1,+∞>

La solución para este caso en que -3 ≤ x < 2 es:

$x \in (<-\infty,-9> \cup [-2,1> \cup <1,+\infty> \wedge [-3,2>$

$$\therefore x \in [-2,1> \cup <1,2> \quad \ldots (\alpha)$$

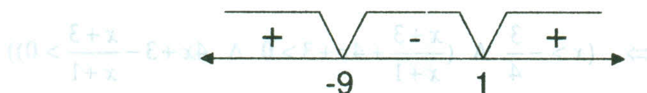
para $2 \le x < 3 \Rightarrow |x+3| = x+3,\ |x-2| = x-2,\ |x-3| = 3-x$ **... (4)**

reemplazando (4) en (1) se tiene:

$$\frac{x-2-x^2}{8x-(x+3)(3-x)} \le 0 \Rightarrow \frac{x-2-x^2}{8x-9+x^2} \le 0 \Rightarrow \frac{x^2-x+2}{x^2+8x-9} \ge 0$$

como $x^2-x+2>0 \quad \forall x \in R \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+8x-9} \ge 0$

$$\frac{1}{x^2+8x-9} \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+9)(x-1)} \ge 0 \Rightarrow (x+9)(x-1) \ge 0,\ x \ne -9,1$$



de donde $x \in <-\infty,9> \cup <1,+\infty>$

La solución para este caso en que $2 \le x < 3$ es:

$x \in <-\infty,-9> \cup <1,+\infty> \wedge [2,3> = [2,3>$ **... (β)**

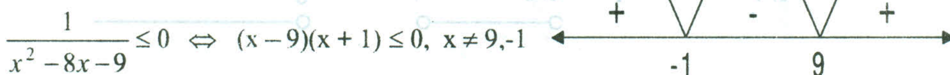
para $x \ge 3 \Rightarrow |x+3| = x+3,\ |x-2| = x-2,\ |x-3| = x-3$ **... (5)**

reemplazando (5) en (1) se tiene:

$$\frac{x-2-x^2}{8x-(x+3)(x-3)} \le 0 \Rightarrow \frac{x-2-x^2}{8x-x^2+9} \le 0 \Rightarrow \frac{x^2-x+2}{x^2-8x-9} \le 0$$

como $x^2-x+2>0,\ \forall x \Rightarrow \dfrac{1}{x^2-8x-9} \le 0$

$$\frac{1}{x^2-8x-9} \le 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+1) \le 0,\ x \ne 9,-1$$



de donde $x \in <1,9>$

La solución para este caso es: $x \in <-1,9> \wedge [3,+\infty> = [3,9>$ **... (γ)**

la solución es: $x \in [-2,1> \cup <1,2> \cup [2,3> \cup [3,9>$

$\therefore\ x \in [-2,1> \cup <1,9>$

(37) $|\frac{x+3}{x+1}| < 4x+3$

Solución

$$|\frac{x+3}{x+1}| < 4x+3 \Leftrightarrow (4x+3>0 \ \wedge \ -4x-3<\frac{x+3}{x+1}<4x+3)$$

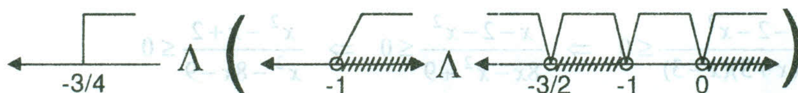
$$\Leftrightarrow (x>-\frac{3}{4} \ \wedge \ (-4x-3<\frac{x+3}{x+1} \ \wedge \ \frac{x+3}{x+1}<4x+3))$$

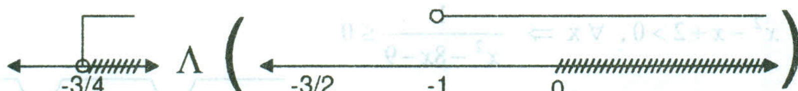
$$\Leftrightarrow (x>-\frac{3}{4} \ \wedge \ (\frac{x+3}{x+1}+4x+3>0 \ \wedge \ 4x+3-\frac{x+3}{x+1}>0))$$

$$\Leftrightarrow (x>-\frac{3}{4} \ \wedge \ (\frac{2x^2+4x+3}{x+1}>0 \ \wedge \ \frac{x(2x+3)}{x+1}>0))$$

$$\Leftrightarrow (x>-\frac{3}{4} \ \wedge \ (\frac{1}{x+1}>0 \ \wedge \ \frac{x(2x+3)}{x+1}>0))$$

puesto que $2x^2+4x+3>0$





$x \in <-\frac{3}{4},+\infty> \ \wedge \ <0,+\infty> = <0,+\infty>$

$\therefore\ x \in <0,+\infty>$

38 $\frac{x}{|x^2+4|} > \frac{x-3}{x^2+x+4}$

Solución

Aplicando la propiedad: $\forall$ x $\in$ R, $x^2 \geq 0$ de donde

$x^2+4>0 \;\Lambda\; x^2+x+4>0$, entonces

$|x^2+4| = x^2+4$ luego reemplazando se tiene:

$$\frac{x}{x^2+4} > \frac{x-3}{x^2+x+4} \Leftrightarrow x(x^2+x+4) > (x-3)(x^2+4)$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2+4x > x^2-3x^2+4x-12$$

$$\Leftrightarrow x^2 > -3 \Rightarrow \forall\, x \in R$$

39 $\sqrt[4]{\frac{x||x|-|-12}{|x+2|+1} - \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4}} + \sqrt{9-x} \geq 0$

Solución

$\sqrt[4]{\frac{x||x|-|-12}{|x+2|+1} - \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4}} + \sqrt{9-x} \geq 0$, entonces

$$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} - \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0 \;\Lambda\; 9-x \geq 0$$

$$\frac{x||x-1|-12}{|x+2|+1} \geq \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \;\Lambda\; 9-x \geq 0$$

además como $\frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0$, entonces:

$$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} > \frac{||1-x|-3|}{|x-1|+4} \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9 \text{ de donde}$$

$\frac{x||x|-1|-12}{|x+2|+1} \geq 0 \;\Lambda\; x \leq 9$ como $|x+2|+1>0$ entonces

$x\,|x-1| - 12 \geq 0 \;\; \Lambda \;\; x \leq 9$ ... **(1)**

Por definición: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, entonces

si $x < 0 \Rightarrow x|-x-1| - 12 \geq 0 \Rightarrow x|x+1| - 12 \geq 0$

como $|x+1| = \begin{cases} x+1\ , & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \langle -\infty, 0\rangle = \langle -\infty,-1\rangle \cup [-1,0\rangle$

si $x \in \langle -\infty,-1\rangle \Rightarrow |x+1| = -x-1$ como

$x|x+1| - 12 \geq 0 \Rightarrow -x^2 - x - 12 \geq 0 \Rightarrow x^2 + x + 12 \leq 0$

$\Rightarrow \nexists\ x \in R$, tal que $x^2 + x + 12 \leq 0$; por lo tanto ϕ

si $x \in [-1,0\rangle \Rightarrow |x+1| = x+1 \Rightarrow x(x+1) - 12 \geq 0$

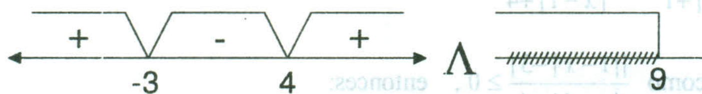
$x^2 + x - 12 \geq 0 \Rightarrow (x+4)(x-3) \geq 0$

Luego $x \in [-1,0\rangle \;\Lambda\; \langle -\infty,-4] \cup [3,+\infty\rangle = \phi$

Ahora si $x \geq 0 \Rightarrow x|x-1| - 12 \geq 0 \;\; \Lambda \;\; x \leq 9$

$\Rightarrow x(x-1) - 12 \geq 0 \;\; \Lambda \;\; x \leq 9$

$\Rightarrow x^2 - x - 12 \geq 0 \;\; \Lambda \;\; x \leq 9 \Rightarrow (x-4)(x+3) \geq 0 \;\; \Lambda \;\; x \leq 9$



$x \in \langle -\infty,-3] \cup [4,+\infty\rangle \;\; \Lambda \;\; x \leq 9$

$x \in \langle -\infty,-3] \cup [4,9]$

$\therefore$ como $x \geq 0 \;\; \Lambda \;\; x \in (\langle -\infty,-3] \cup [4,9])$ $\therefore x \in [4,9]$

(40) $\left|\frac{1}{x+1}\right| < \left|\frac{x}{x^2+2x+1}\right|$

Solución

$$\left|\frac{1}{x+1}\right| < \left|\frac{x}{x^2+2x+1}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{|x+1|} < \frac{|x|}{|x+1|^2}$$

$$\frac{1}{|x+1|} < \frac{|x|}{|x+1|^2} \text{ para } x \neq -1 \Rightarrow 1 < \frac{|x|}{|x+1|} \text{ de donde}$$

$$|x+1| < |x| \text{ para } x \neq -1 \Rightarrow x^2+2x+1 < x^2,\ x \neq -1$$

$$2x+1 < 0,\ x \neq -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{2},\ x \neq -1$$

$$\therefore\ x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,-\frac{1}{2}\rangle$$

(41) $\left|\frac{x+1}{x+3}\right|^2 - 2\left|\frac{x+1}{x+3}\right| > 0$

Solución

Completando cuadrados se tiene: $\left|\frac{x+1}{x+3}\right|^2 - 2\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + 1 > 1$ de donde

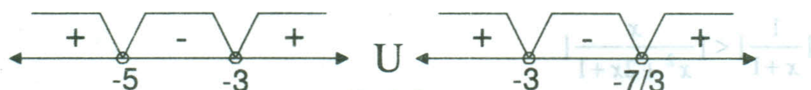
$$\left(\left|\frac{x+1}{x+3}\right| - 1\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x+3}\right| - 1 > 1 \text{ v } \left|\frac{x+1}{x+3}\right| - 1 < -1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x+3}\right| > 2 \text{ v } \left|\frac{x+1}{x+3}\right| < 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x+1}{x+3}\right| > 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x+3} > 2 \text{ v } \frac{x+1}{x+3} < -2$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+3} - 2 > 0 \text{ v } \frac{x+1}{x+3} + 2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+5}{x+3} < 0 \text{ v } \frac{3x+7}{x+3} < 0$$



$$x \in \langle -5,-3 \rangle U \langle -3,-\frac{7}{3} \rangle$$

(42) $[| \frac{5-3x}{x} |] = 2$

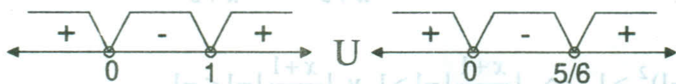
Solución

$[| \frac{5-3x}{x} |] = 2 \iff 2 \le \frac{5-3x}{x} < 3$

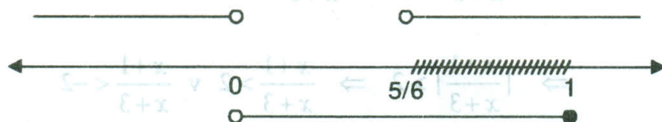
$2 \le \frac{5-3x}{x} < 3 \iff 2 \le \frac{5-3x}{x} \wedge \frac{5-3x}{x} < 3$

$\iff 2 - \frac{5-3x}{x} \le 0 \wedge \frac{5-3x}{x} - 3 < 0$

$\iff \frac{5x-5}{x} \le 0 \wedge \frac{6x-5}{x} > 0$



$x \in \langle 0,1] \wedge x \in \langle -\infty,0 \rangle U \langle \frac{5}{6},+\infty \rangle$



La solución es: $x \in \langle \frac{5}{6},1]$

(43) $[| \frac{x}{2\sqrt{x}-1} |] = 0$

Solución

$$[|\frac{x}{2\sqrt{x}-1}|]=0 \Leftrightarrow 0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1$$

$$0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1 \Leftrightarrow 0\le \frac{x}{2\sqrt{x}-1} \wedge \frac{x}{2\sqrt{x}-1}<1 \qquad \ldots (1)$$

la expresión esta definida para $2\sqrt{x}-1\neq 0$, $x\geq 0$

$$2\sqrt{x}\neq 1 \Rightarrow 4x\neq 1 \Rightarrow x\neq \frac{1}{4}$$

Por lo tanto analizaremos en: $[0,\frac{1}{4}> U <\frac{1}{4},+\infty>$

si $x>\frac{1}{4}$ entonces en **(1)** se tiene: $x\geq 0 \wedge x<2\sqrt{x}-1$

$$x\geq 0 \wedge x-2\sqrt{x}+1<0$$

$$x\geq 0 \wedge (\sqrt{x}-1)^2<0 \Rightarrow x \notin \phi$$

si $0\le x<\frac{1}{4} \Rightarrow x\le 0 \wedge x>2\sqrt{x}-1 \Rightarrow x\le 0 \wedge (\sqrt{x}-1)^2\geq 0$

$\Rightarrow x\le 0 \wedge x\geq 0$ $\qquad\therefore x=0$

(44) $[|-x|]>0$

Solución

$[|-x|]>0 \Rightarrow [|-x|]\geq 1 \Leftrightarrow -x\geq 1$

como $-x\geq 1 \Rightarrow x\le -1 \Rightarrow x\in <-\infty,-1]$

(45) $[|-x|]<0$

Solución

$[|-x|]<0 \Leftrightarrow -x<0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x\in <0,+\infty>$

(46) $[| 2x-1 |] = -3$

Solución

$[| 2x-1 |] = -3 \Leftrightarrow -3 \le 2x - 1 < -2$

$\Leftrightarrow -2 \le 2x < -1$

$\Leftrightarrow -1 \le x < -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in [-1,-\frac{1}{2}>$

(47) $[| \sqrt{x}+1 |] = -1$

Solución

$[| \sqrt{x}+1 |] = -1 \Leftrightarrow -1 \le \sqrt{x}+1 < 0$. La solución es ϕ puesto que $\sqrt{x}+1>0$

(48) $[| x^2-2x-8 |] = \frac{1}{2}$

Solución

Como $\frac{1}{2} \notin Z \Rightarrow$ no tiene solución.

(49) $[| \sqrt{x-[| x |]} |] = 0$

Solución

$[| \sqrt{x-[| x |]} |] = 0 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x-[| x |]} < 1$

$\Leftrightarrow 0 \le x-[| x |] < 1$

$\Leftrightarrow [| x |] \le x < [| x |]+1$, $\forall$ x $\in$ R

(50) $[| x^2 |] \le 15$

Solución

$[| x^2 |] \le 15 \Rightarrow [| x^2 |] < 16 \Rightarrow x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4$

$\therefore x \in <-4,4>$

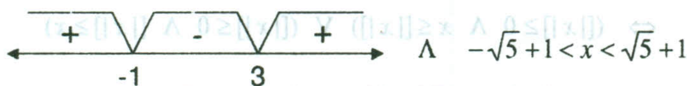
(51) $[|x^2-2x-3|]=0$

Solución

$[|x^2-2x-3|]=0 \Leftrightarrow 0\le x^2-2x-3<1$

$0\le x^2-2x-3<1 \Leftrightarrow 0\le x^2-2x-3 \wedge x^2-2x-3<1$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)\ge 0 \wedge (x-1)^2<5$



$\wedge \quad -\sqrt{5}+1<x<\sqrt{5}+1$

$\Leftrightarrow x\in\langle-\infty,-1]U[3,+\infty\rangle \wedge x\in\langle 1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}\rangle$





$\therefore x\in\langle 1-\sqrt{5},-1]U[3,1+\sqrt{5}\rangle$

(52) $\dfrac{x}{[|-x|]}<0$

Solución

$\dfrac{x}{[|-x|]}<0 \Leftrightarrow (x>0 \wedge [|-x|]<0) \vee (x<0 \wedge [|-x|]>0)$

$\Leftrightarrow (x>0 \wedge x>0) \vee (x<0 \wedge x\le -1)$

$\Leftrightarrow (x>0 \vee x\le -1)$

$\Leftrightarrow x\in\langle-\infty,-1]\cup\langle 0,+\infty\rangle$

(53) $\dfrac{x+|x|}{|x|-[|x|]}\le 2$

Solución

Se conoce que $|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0\end{cases}$

i) si x > 0 $\Rightarrow \dfrac{2x}{x-[|x|]}\leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-[|x|]}\leq 1$

$$\frac{x}{x-[|x|]}-1\leq 0 \Rightarrow \frac{x-x+[|x|]}{x-[|x|]}\leq 0 \Rightarrow \frac{[|x|]}{x-[|x|]}\leq 0$$

$$\frac{[|x|]}{x-[|x|]}\leq 0 \Leftrightarrow ([|x|]\geq 0 \;\Lambda\; x-[|x|]\leq 0) \;V\; ([|x|]\leq 0 \;\Lambda\; x-[|x|]\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow ([|x|]\geq 0 \;\Lambda\; x\leq[|x|]) \;V\; ([|x|]\leq 0 \;\Lambda\; [|x|]\geq x)$$

$$\Leftrightarrow (x\geq 0 \;\Lambda\; x\in Z_0^+) \;V\; (x<1 \;\Lambda\; x\in R)$$

$$\Leftrightarrow (x\in Z_0^+) \;V\; (x<1)$$

$\Leftrightarrow$ x ∈ <-∞,1> $\qquad$ ∴ x ∈ <0,+∞> Λ (<-∞,1>) = <0,1>

ii) Si x < 0, $x\in Z^-$ $\Rightarrow$ |x| = -x

$\dfrac{0}{-x-[|x|]}\leq 2 \Rightarrow 0\leq 2 \Rightarrow$ x < 0, $x\in Z^-$ $\qquad$ ∴ x ∈ Z^-

∴ x ∈ Z^- U<0,1>

(54) Demostrar que ∀ x ∈ R; $|x|\geq\sqrt[3]{[|x^3|]}$

Solución

Por propiedad: ∀ x ∈ R, $[|x|]\leq x<[|x|]+1$

Si x ∈ R $\Rightarrow x^3\in R$,

Luego ∀ $x^3\in R$: $[|x^3|]\leq x^3<[|x^3|]+1 \Rightarrow [|x^3|]\leq x^3$ **... (1)**

además ∀ x ∈ R: x ≤ |x| $\Rightarrow x^3\leq|x^3|$ **... (2)**

Luego (2) en (1) se tiene: ∀ x ∈ R, $[|x^3|]\leq x^3\leq|x|^3 \Rightarrow [|x^3|]\leq|x|^3$

$\sqrt[3]{[|x^3|]}\leq|x| \Rightarrow |x|\geq\sqrt[3]{[|x^3|]}$, ∀ x ∈ R

(55) $[| x[| x |] |] = x$

Solución

Se conoce que $[| x |] \in Z$ entonces como $[| x[| x |] |] = x \in Z$

Es decir $x \in Z \Rightarrow [| x |] = x \in Z \Rightarrow x[| x |] \in Z$

Luego: $[| x[| x |] |] = x \Rightarrow [| x.x |] = x$

$[| x^2 |] = x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

por lo tanto $[| x[| x |] |] = x \Rightarrow$ $x \in \{0,1\}$

(56) $[| \, | x | + 1 \, |] < 2$

Solución

Aplicando la propiedad $[| x + n |] = n + [| x |]$, $n \in Z$

$[| \, | x | + 1 \, |] < 2 \Rightarrow [|| x |]] + 1 < 2 \Rightarrow [|| x |]] < 1$

como $[|| x |]] < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ $\therefore x \in \langle -1,1 \rangle$

(57) $[| \frac{3x+1}{3x-2} |] \leq 3$

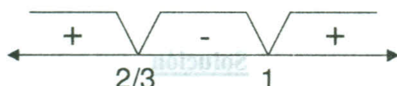
Solución

Aplicando la propiedad $[| x |] \leq a \Rightarrow x < a + 1$

$$[| \frac{3x+1}{3x-2} |] \leq 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{3x-2} < 4 \Rightarrow \frac{3x+1}{3x-2} - 4 < 0$$

$$\frac{3x+1-4(3x-2)}{3x-2} < 0 \Rightarrow \frac{3x+1-12x+8}{3x-2} < 0$$

$\frac{-9x+9}{3x-2} < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{3x-2} > 0$, aplicando el criterio de los puntos críticos.



Como la inecuación es $\frac{x-1}{3x-2}>0$, entonces la solución es: $x \in <-\infty,\frac{2}{3}> U <1,+\infty>$

(58) $[|x^2-2x-2|]<13$

Solución

Por la propiedad: si $[|x|]<a \Rightarrow$ x < a

$[|x^2-2x-2|]<13 \Rightarrow x^2-2x-2<13 \Rightarrow x^2-2x+1<16$

$(x-1)^2<16 \Rightarrow$ -4 < x – 1 < 4 $\Rightarrow$ -3 < x < 5

$\therefore$ x ∈ <-3,5>

(59) $2[|x+1|]^2-11[|x|]\le -4$

Solución

Como $[|x+1|]=[|x|]+1$ entonces: $2([|x|]+1)^2-11[|x|]\le -4$ desarrollando

$2[|x|]^2+4[|x|]+2-11[|x|]\le -4$

$2[|x|]^2-7[|x|]+6\le 0 \Rightarrow (2[|x|]-3)([|x|]-2)\le 0$

+ - +
3/2 2

como $(2[|x|]-3)([|x|]-2)\le 0$ entonces: $[|x|]\in[\frac{3}{2},2] \Rightarrow [|x|]=2 \Rightarrow 2\le x<3$

$\therefore$ x ∈ [2,3>

(60) $[|2x-|x||]=x$

Solución

Se sabe por propiedad que si $[|a|]\in Z \wedge [|a|]=a \Rightarrow$ a ∈ Z

Luego como $[|2x-|x||]=x \Rightarrow$ x ∈ Z $\Rightarrow$ 2x – |x| = x

De donde |x| = x $\Rightarrow x\in Z_0^+$

$\therefore$ La solución es {0,1,2,...,n}

(61) $|[|\frac{1}{2x}|] - \sqrt{\frac{x-1}{x}}| < \sqrt{x}$

Solución

Calculando los valores de x en donde la expresión esta definida, es decir:

$\frac{x-1}{x} \geq 0 \ \wedge \ x \geq 0$ de donde $x \in [1,+\infty>$

ahora calcularemos $[|\frac{1}{2x}|]$ cuando $x \in [1,+\infty>$

como $x \in [1,+\infty> \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2$ invirtiendo

$0 < \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow [|\frac{1}{2x}|] = 0$, por lo tanto:

$$|[|\frac{1}{2x}|] - \sqrt{\frac{x-1}{x}}| < \sqrt{x} \Rightarrow |0 - \sqrt{\frac{x-1}{x}}| < \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{x}$$

como $\sqrt{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x} < x \Rightarrow x^2 - x + 1 > 0$

como $x^2 - x + 1 > 0$, $\forall x \in R$ entonces para $x \in [1,+\infty>$, $x^2 - x + 1 > 0$

Por lo tanto la solución es: $x \in [1,+\infty>$

(62) $\log_{1/3}(2x+5) < -2$

Solución

Aplicando la propiedad: $\log_a x < b$ sí $0 < a < 1 \Leftrightarrow x > a^b$

$\log_{1/3}(2x+5) < -2 \Leftrightarrow 2x + 5 > (\frac{1}{3})^{-2}$

$2x + 5 > 9 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in <2,+\infty>$

(63) $\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$

Solución

$\log_a x > b$, a > 1 $\Leftrightarrow$ $x > a^b$ $\wedge$ $x > 0$

$\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2 \Rightarrow \log_2(\frac{3x+2}{1-2x}) > 2$

$\log_2(\frac{3x+2}{1-2x}) > 2 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{1-2x} > 0 \wedge \frac{3x+2}{1-2x} > 2^2$

$\Leftrightarrow \frac{3x+2}{2x-1} < 0 \wedge \frac{3x+2}{1-2x} - 4 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x+2}{2x-1} < 0 \wedge \frac{11x-2}{2x-1} < 0$



$x \in \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \rangle \wedge x \in \langle \frac{2}{11}, \frac{1}{2} \rangle$ $\therefore x \in \langle \frac{2}{11}, \frac{1}{2} \rangle$

(64) $\log_{1/5}(2x^2 - 3x + 5) < \log_{1/5}(x^2 + 2x + 1)$

Solución

$\log_a P(x) < \log_a Q(x) \Leftrightarrow$ P(x) > Q(x) Λ (P(x) > 0 Λ Q(x) > 0), 0 < a < 1

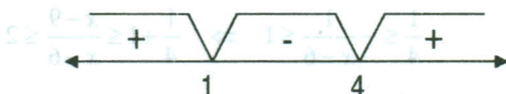
$\log_{1/5}(2x^2 - 3x + 5) < \log_{1/5}(x^2 + 2x + 1)$, $0 < \frac{1}{5} < 1$



$2x^2 - x + 5 > x^2 + 2x + 1 \wedge (2x^2 - 3x + 5 > 0 \wedge x^2 + 2x + 1 > 0)$

$x^2 - 5x + 4 > 0 \wedge x \neq -1$

$(x-4)(x-1) > 0 \ \wedge \ x \neq -1$



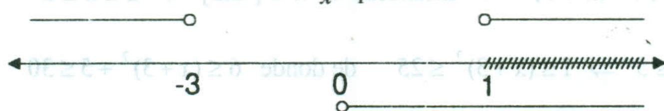
$x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle \ \ x \neq -1$

$\therefore x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle -1,1\rangle \cup \langle 4,+\infty\rangle$

(65) $\log_x\left(\frac{x+3}{x-1}\right) > 1$

Solución

La variable x debe cumplir $x > 0 \ \wedge \ \frac{x+3}{x-1} > 0$



Como $x > 1$ aplicamos la propiedad: $\log_x\left(\frac{x+3}{x-1}\right) > 1 \ \Rightarrow \ \frac{x+3}{x-1} > x^1 = x$

$$\frac{x+3}{x-1} > x \ \Rightarrow \ \frac{x+3}{x-1} - x > 0 \ \Rightarrow \ \frac{x+3-x^2+x}{x-1} > 0$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x-1} < 0 \ \Rightarrow \ \frac{(x-3)(x+1)}{x-1} < 0$$

- + - +
-1 1 3

$x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle$

La solución es: $x \in \langle 1,+\infty\rangle \ \wedge \ (\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle)$

$\therefore x \in \langle 1,3\rangle$

(66) Hallar el menor de los números M tales que: $\left|\frac{x-9}{x-6}\right| \leq M$, sí $x \in [2,5]$

Solución

$\frac{x-9}{x-6} = 1 - \frac{3}{x-6}$, como $x \in [2,5] \Rightarrow 2 \leq x \leq 5$

$$-4 \leq x-6 \leq -1 \ \Rightarrow \ -1 \leq \frac{1}{x-6} \leq -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}\le -\frac{1}{x-6}\le 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}+1\le \frac{x-9}{x-6}\le 2$$

$$\frac{5}{4}\le \left|\frac{x-9}{x-6}\right|\le 2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{M=2}$$

(67) Hallar el mayor número M de tal manera que: $\frac{|x^2+6x+14|}{x^3+27}\ge M$, si $x\in[-2,2]$

Solución

$x^2+6x+14=(x+3)^2+5$ entonces: si $x\in[-2,2] \Rightarrow -2\le x\le 2$

$1\le x+3\le 5 \Rightarrow 1\le (x+3)^2\le 25$ de donde $6\le (x+3)^2+5\le 30$

$6\le x^2+6x+14\le 30$ **... (1)**

como $x\in[-2,2] \Rightarrow -2\le x\le 2 \Rightarrow -8\le x^3\le 8$

$$19\le x^3+27\le 35 \Rightarrow \frac{1}{35}\le \frac{1}{x^3+27}\le \frac{1}{19}$$ **... (2)**

de (1) y (2) se tiene: $\frac{6}{35}\le \frac{x^2+6x+14}{x^3+27}\le \frac{30}{19}$

$$\therefore\ \frac{|x^2+6x+6|}{x^3+27}\ge \frac{6}{35} \quad\Rightarrow\quad \boxed{M=\frac{6}{35}}$$

(68) Hallar el número mayor de m y el número M tal que para todo $x\in[\frac{1}{2},1]$ se cumple: $m\le \frac{x+2}{x+3}\le M$

Solución

A la expresión $\frac{x+2}{x+3}$ escribiremos en la forma: $\frac{x+2}{x+3}=1-\frac{1}{x+3}$

como $x\in[\frac{1}{2},1] \Rightarrow \frac{1}{2}\le x\le 1$ sumando 3

$\frac{7}{2} \le x+3 \le 4$, invirtiendo $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+3} \le \frac{2}{7}$, multiplicando por -1

$-\frac{2}{7} \le -\frac{1}{x+3} \le -\frac{1}{4}$ sumando 1

$1-\frac{2}{7} \le 1-\frac{1}{x+3} \le 1-\frac{1}{4}$ entonces $\frac{5}{7} \le \frac{x+2}{x+3} \le \frac{3}{4}$

de donde $m=\frac{5}{7}$ y $M=\frac{3}{4}$

1.41 EJERCICIOS PROPUESTOS

I Hallar los valores de x que satisfacen a las siguientes ecuaciones.

(1) $|2x+3|+4=5x$ **Rpta.** $x=\frac{7}{3}$

(2) $|3x-1|=2x+5$ **Rpta.** $\{-\frac{4}{5},6\}$

(3) $|x^2-4|=-2x+4$ **Rpta.** $\{0,2,-4\}$

(4) $|\frac{x}{x-1}|=\frac{4}{x}$ **Rpta.** $\{2,-2+2\sqrt{2}\}$

(5) $(x-4)^2-2|x-4|-15=0$ **Rpta.** $\{-1,9\}$

(6) $|2x+9|=x-1$ **Rpta.** ϕ

(7) $|x^2-3x-7|=3$ **Rpta.** $\{-1,-2,4,5\}$

(8) $|\frac{x+8}{x+4}|=3$ **Rpta.** $\{-5,-2\}$

(9) $|3x+1|=7-x$ **Rpta.** $\{-4,\frac{3}{2}\}$

(10) $|x^2+2|=2x+1$ **Rpta.** $\{1\}$

(11) $|3x-5|+x-7=0$ **Rpta.** $\{-1,3\}$

(12) $|5x-3|=|3x+5|$ **Rpta.** $\{-\frac{1}{4},4\}$

(13) $|2x-6|=|4-5x|$ **Rpta.** $\{-\frac{2}{3},\frac{10}{7}\}$

(14) $|6x+3|=|18+x|$ **Rpta.** $\{-3,3\}$

(15) $|3x-1|=|5x-15|$ **Rpta.** $\{2,7\}$

(16) $|5x+3|=3x-1$ **Rpta.** ϕ

(17) $||x^2-1|-x|=x$ **Rpta.** $\{1,-1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\}$

(18) $|2x-3|+2=|x-6|$ **Rpta.** $\{-1,\frac{7}{3}\}$

(19) $|3x-1|-|x+2|=1$ **Rpta.** $\{-\frac{1}{2},2\}$

(20) $|x-4|^2-5|x-4|+6=0$ **Rpta.** $\{1,2,6,7\}$

(21) $2|x^2-2|+5=6|2x^2-3|$ **Rpta.** $\{\pm\sqrt{2},\pm 2\}$

(22) $|6x+3|=|18+x|$ **Rpta.** $\{-3,3\}$

(23) $3||x+1|-4|^2-5||x+1|-4|=2$ **Rpta.** $\{-7,-3,1,5\}$

(24) $||x|-3|=|3x+2|$ **Rpta.** $\{-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\}$

(25) $||x+2|-1|^2-5||x+2|-1|-6=0$ **Rpta.** $\{-9,5\}$

(26) $|2x-3|-1=|x-3|$ **Rpta.** $\{-1,\frac{7}{3}\}$

(27) $||x^2-5x+15|-x^2+8|=3x+9$ **Rpta.** $\{\frac{7}{4},16\}$

(28) $|x+1|+2|x-2|=|x-8|$ **Rpta.** $\{-\frac{5}{2},\frac{11}{4}\}$

(29) $3|x+1|-2|x-2|=2x-1$ **Rpta.** $\{\frac{2}{7},8\}$

(30) $2||x-5|+2|^2-11||x-5|-2|+12=0$ **Rpta.** $\{3,7\}$

II. Hallar el valor de las siguientes expresiones:

(31) $\frac{|12+5x|-|12-4x|}{x}$ sí $x \in <1,3>$ **Rpta.** 9

(32) $\frac{|7x+10|-|5x-10|}{2x}$ sí $x \in <0,1>$ **Rpta.** 6

(33) $\frac{|9x+8|-|2x-8|}{x}$ sí $x \in <1,2>$ **Rpta.** 11

(34) $\frac{|2x+3|-|3-x|}{x}$ si $x \in <0,1>$ **Rpta.** 3

(35) $\frac{|5x-20|-|3x-20|}{x}$ si $x \in <-3,-2>$ **Rpta.** -2

(36) $\frac{|6x+32|-4|8-x|}{5x}$ si $x \in <-3,-2>$ **Rpta.** 2

(37) $\frac{|4x+1|-|x-1|}{x}$ sí $x \in <0,1>$ **Rpta.** 5

(38) $\frac{|7x+2|-|3x+2|}{x}$ si $x \in <0,3>$ **Rpta.** 4

(39) $\frac{3|3x-8|-|3x+24|}{2x}$ si $x \in <-5,-4>$ **Rpta.** -6

(40) $\dfrac{|5x+4|-|4+4x|}{x}$ si $x \in <0,3>$ **Rpta.** 1

III. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones.

(41) $|\dfrac{x+2}{2x-3}|<4$ **Rpta.** $<-\infty,\dfrac{10}{9}> U <2,+\infty>$

(42) $|\dfrac{6-5x}{3+x}| \le \dfrac{1}{2}$ **Rpta.** $[\dfrac{9}{11},\dfrac{5}{3}]$

(43) $|4+\dfrac{1}{x}|<5$ **Rpta.** $<-\infty,-\dfrac{1}{9}> U <1,+\infty>$

(44) $|x+\dfrac{8}{x}| \le 6$ **Rpta.** [-4,-2] U [2,4]

(45) $|\dfrac{x^2+3x+11}{x-2}| \le 3$ **Rpta.** [-5,-1]

(46) $|5-\dfrac{1}{x}|<1$ **Rpta.** $<\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{4}>$

(47) $|x+\dfrac{1}{x}| \le 6$ **Rpta.** $[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]\ U\ [3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$

(48) $|\dfrac{3-2x}{2+x}|<4$ **Rpta.** $<-\infty,-\dfrac{11}{2}>\ U <-\dfrac{5}{6},\infty>$

(49) $|\dfrac{x+3}{6-3x}| \le 2$ **Rpta.** $<-\dfrac{3}{2},-1> U <-1,-\dfrac{3}{4}>$

(50) $|\dfrac{2x}{x+1}|>6$ **Rpta.** $<-\dfrac{3}{2},-1> U <-1,-\dfrac{3}{4}>$

(51) $|\dfrac{x-1}{x}|>1$ **Rpta.** $<-\infty,0> U <0,\dfrac{1}{2}>$

(52) $|\dfrac{3-3x}{x-1}|>2$ **Rpta.** <-∞,1> U <1, ∞>

(53) $|\frac{6x-4}{3+x}| \geq \frac{1}{2}$ **Rpta.** $<-\infty,-3> U <-3,\frac{5}{13}] U [1,\infty>$

(54) $|\frac{2x-5}{4-x}| \geq 1$ **Rpta.** $<-\infty,1] \cup [3,4> \cup <4, \infty>$

(55) $|\frac{x+3}{6-2x}| \geq \frac{1}{2}$ **Rpta.** $[0,3> \cup <3, \infty>$

(56) $|\frac{3x^2-1}{x-2}| > -6$ **Rpta.** $<-\infty,2> \cup <2, \infty>$

(57) $|x^2-4| < -2x+4$ **Rpta.** $<-4,0>$

(58) $|\frac{x+3}{x+2}| < 5-x$ **Rpta.** $<-\infty,22-\sqrt{17}> U <-2,1+2\sqrt{2}>$

(59) $|\frac{x+3}{x+1}| < 4x+3$ **Rpta.** $<0, \infty>$

(60) $|x-2| \leq 2x$ **Rpta.** $<\frac{2}{3},\infty>$

(61) $\frac{|x^2-9|-2x}{|x+5|+5} < 0$ **Rpta.** $<\sqrt{10}-1,\sqrt{10}+1>$

(62) $|3x-9| < x+1$ **Rpta.** $<2,5>$

(63) $|\frac{x-2}{x+4}| \leq \frac{x+3}{x-6}$ **Rpta.** $<6, \infty>$

(64) $|x^2+3x|+x^2-2 > 0$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{2}{3}] U [\frac{1}{2}, \infty>$

(65) $|\frac{x+3}{x+16}| > \frac{3}{x-4}$ **Rpta.** $<-\infty,4>$

(66) $|4x^2-8x+4| \leq 4x+10$ **Rpta.** $[\frac{3-\sqrt{15}}{2},\frac{3+\sqrt{15}}{2}>$

(67) $|x+5|>2x-3$ **Rpta.** $<-\infty,8>$

(68) **a)** $\dfrac{|2x-1|+1}{x^2-2x-3}\le 0$ **Rpta.** $<-1,3>$

b) $|4x-3|>x+2$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{1}{5}>U<5,\infty>$

(69) $|x^2-4|>-2x+4$ **Rpta.** $<-\infty,-4>$ U $<0,2>$ U $<2,\infty>$

(70) $|2x+1|\ge 2+x$ **Rpta.** $<-\infty,-1]$ U $[1,\infty>$

(71) $|4x+3|>x+2$ **Rpta.** $<-\infty,-1>U<-\frac{1}{3},\infty>$

(72) $|3x+8|\ge 8x-3$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{11}{5}]$

(73) Demostrar que:

a) Si $|x|<3 \Rightarrow \dfrac{1}{x-7}\in<-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{10}>$

b) Si $|x-3|<1 \Rightarrow \dfrac{9}{5}<\dfrac{x+5}{x+1}<\dfrac{7}{3}$

c) Si $|x|<2 \Rightarrow |\dfrac{x-3}{x+4}|<\dfrac{5}{2}$

d) Si $|x|<1 \Rightarrow |\dfrac{x+1}{x-2}|<2$

e) Si $|x-3|<1 \Rightarrow |\dfrac{x+5}{x-1}|<7$

f) Si $|x-2|<1 \Rightarrow |x^2-4|<5$

g) Si $|x|<3 \Rightarrow |\dfrac{x-3}{x-4}|<\dfrac{3}{4}$

h) Si $|x-4|<1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x-2}<1$

i) Si $|x-3|<1 \Rightarrow \dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{x+4}<\dfrac{1}{6}$

j) Si $|x|<1 \Rightarrow |\dfrac{x-2}{x+3}|<\dfrac{3}{2}$

k) Si $|x-2|<\dfrac{1}{2} \Rightarrow |x^2-4|<\dfrac{9}{2}|x-2|$

l) Si $|x-5|<1 \Rightarrow \dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{x-3}<1$

(74) Sabiendo que: $b>0$ y $|x-a|<2b$ probar que: $\dfrac{1}{x-a+2b}\in<\dfrac{1}{5},1>$

(75) Demostrar que si x,a ∈ <-∞,-1] U [1, ∞> entonces: $|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}|\leq|x-a|$

(76) $|\frac{x}{2}|^2+3|\frac{x}{2}|\leq\frac{7}{4}$ **Rpta.** $-1\leq x\leq 1$

(77) $||x|+2|\leq|x^2|$ **Rpta.** <-∞,-2] U [2, ∞ >

(78) $|x-2|^2-3|x-2|-4<0$ **Rpta.** <-2,6>

(79) $|x-1|^2+2|x-1|-3<0$ **Rpta.** <0,2>

(80) $|x-2|^2-2|x-2|-15>0$ **Rpta.** <-3,7>

(81) $|x|^2+|x|<\frac{15}{4}$ **Rpta.** $<-\frac{3}{2},\frac{3}{2}>$

(82) $2\leq|x|^2+|x|$ **Rpta.** <-∞,-1] U [1, ∞>

(83) $|x^3-1|^2-|x^3-1|-3\leq 0$ **Rpta.** $[\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}]$

(84) $|x-3|^2-3|x-3|-18>0$ **Rpta.** <-∞,-3> U <9, ∞>

(85) $|x-1|^2+5|x-1|-36>0$ **Rpta.** <-∞,-3> U <5,+∞>

(86) $|\frac{x+1}{x+3}|^2-2|\frac{x+1}{x+3}|>0$ **Rpta.** $<-5,-3>U<-3,-\frac{7}{3}>$

(87) | x – 1 | > | x | – 2 **Rpta.** R

(88) | x – 3 | + 2| x | < 5 **Rpta.** $<-\frac{2}{3},2>$

(89) $x^2+2|x+3|-10<0$ **Rpta.** $[1-\sqrt{17},-1+\sqrt{5}]$

(90) $|2x-5|-|x-2|+|x|^2\geq 7$ **Rpta.** $<-\infty,-\sqrt{6}]U[2\sqrt{2},+\infty>$

(91) $x^2 - |3x+2| + x \geq 0$ **Rpta.** $< -\infty, -2-\sqrt{2}]U[1+\sqrt{3}, +\infty >$

(92) $|3x-2| < |x+6|$ **Rpta.** <-1,4>

(93) $|x+2| < |x|^2$ **Rpta.** <-∞,-1> U <2,+∞>

(94) $|3x^2 - 2x + 1| > 3|x^2 + x - 7|$ **Rpta.** $< -\infty, -\frac{1+\sqrt{481}}{12} > U < \frac{1-\sqrt{481}}{12}, \frac{22}{5} >$

(95) $|x-1| + |x+1| < 4$ **Rpta.** <-2,2>

(96) $|2x^2 - 4x - 6| \geq |2x^2 - 3x - 9|$ **Rpta.** $< -\infty, \frac{5}{4}]$

(97) $|x+6| > |x+9| + |x-2|$ **Rpta.** φ

(98) $|4x+2| \geq |x-1| + 3|x+1|$ **Rpta.** $[\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty >$

(99) $|3x^3 - 2x^2 - 7x - 2| > |x^3 + 6x^2 - 9x - 14|$ **Rpta.** <-∞,-2> U <3, ∞>

(100) $|10 - 3x + x^2| \leq |x^2 + x - 6|$ **Rpta.** [4, ∞>

(101) $|2x^2 + x - 1| < |2x^2 - x - 1|$ **Rpta.** $< -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} > U < 0, \frac{1}{\sqrt{2}} >$

(102) $|x-6| - |x-3| \leq |x-1|$ **Rpta.** $< -\infty, -2]U[\frac{10}{3}, +\infty >$

(103) $(|x-1| + |x-2|)(|1-x| - |x-2|) \leq x^2 - 6$ **Rpta.** <-∞,-1] U [3, ∞>

(104) $|\frac{1}{6-3x}| \leq \frac{2}{|x+3|}$ **Rpta.** $< -\infty, \frac{15}{7} - \frac{3\sqrt{30}}{35}]\ U\ [\frac{25}{7}, \frac{3\sqrt{30}}{35}]$

(105) $|\frac{x}{x-3}| \leq \frac{x+12}{4}$ **Rpta.** $< -\infty, -\frac{3\sqrt{33}}{2}]\ U\ [\frac{\sqrt{33}-3}{2}, 3 > U < 3, 4]$

(106) $2x + 1 < \frac{3}{|x+2|}$ **Rpta.** $< -\infty, -2 > U < -2, \frac{-5+\sqrt{33}}{4} >$

(107) $\dfrac{3}{|2x-3|} \le \dfrac{5}{x^2+x+1}$ **Rpta.** $[\dfrac{13+5\sqrt{13}}{2}, \dfrac{-13+5\sqrt{13}}{2}]$

(108) $|\dfrac{x}{1-|x|}| > \dfrac{1}{x}$ **Rpta.** $<-\infty,-1> U <-1,0> U <\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},1> U <1,+\infty>$

(109) $\dfrac{|x^2-2x-48|(|x^2-2x|-|x-12|)}{|x-2|-6} \le 0$ **Rpta.** $\{-6\}$ U $<-4,-3]$ U $[4, \infty>$

(110) $\dfrac{2-|2-x|-x}{|x-x^2|-2} < 0$ **Rpta.** $<2, \infty>$

(111) $\dfrac{|x|}{1+|x|} \ge \dfrac{1}{x}$ **Rpta.** $<-\infty,0> U [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty>$

(112) $|\dfrac{5}{2x-1}| \ge |\dfrac{x}{x-2}|$ **Rpta.** $[-1-\sqrt{6},\dfrac{1}{2}> U <\dfrac{1}{2},-1+\sqrt{6}> U <2,\infty>$

(113) $|\dfrac{x}{x-2}| \ge |x+3|$ **Rpta.** $[-1-\sqrt{7},-\sqrt{6}]\ U\ [1+\sqrt{7},2>\ U\ [\sqrt{6},+\infty>$

(114) $\dfrac{x+1}{|x^2+1|} < \dfrac{1}{x}$ **Rpta.** $<0,1>$

(115) $\dfrac{|x^2-16|}{x+4} \le \dfrac{x^2}{|x-1|}$ **Rpta.** $<-\infty,-4> U[\dfrac{4}{5},1> U <1,+\infty>$

(116) $\dfrac{|2x^2+10x|}{|4x|} \le 3x$ **Rpta.** $[1,+\infty>$

(117) $\dfrac{x+4}{|x^2+4x+4|} > \dfrac{x-2}{x^2+4}$ **Rpta.** $R-\{-2\}$

(118) $\dfrac{1}{||x|+1|} > x-1$ **Rpta.** $<-\infty, \sqrt{2}>$

(119) $\frac{|4x^2-9|}{|2x+5|}\geq 0$ **Rpta.** $\forall\ x\in R-\{-\frac{5}{2}\}$

(120) $|x+1|-2|x|+3|x-2|<6$ **Rpta.** $<\frac{1}{4},\frac{11}{2}>$

(121) $\frac{3-|x^2-4x|}{|x-5|+x^2}\leq 0$ **Rpta.** $<-\infty,2-\sqrt{7}]\ U\ [1,3]\ U\ [2+\sqrt{7},+\infty>$

(122) $3|2x+6|-|x+\frac{5}{x}|\leq 6$ **Rpta.** $<-\infty,-3]\ U\ [-1,-\frac{5}{7}]\ U<0,\frac{-6+\sqrt{61}}{5}]$

(123) $|\frac{x^2-16}{x-3}|+\frac{8(x+4)}{9-x^2}\leq 0$ **Rpta.** [-4,-3> U <3,5]

(124) $|\frac{x-1}{x^2-4x+8}|\leq|\frac{1}{x-1}|$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{7}{2}]-\{1\}$

(125) $|\frac{x+2}{x}|\geq|\frac{1}{x-2}|$ **Rpta.** $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]-\{0\}$

(126) $\frac{2-|2-x|-x}{|x^2-x|-2}\geq 0$ **Rpta.** <-∞,-1> U <-1,2>

(127) $\frac{|x|^3-4x^2+20}{|x|+1}\geq 4$ **Rpta.** <-∞,-4] U [-2,2] U [4,+∞>

(128) $\frac{|6x-x^2|-4}{4-|x|}>-1$ **Rpta.** <-4,0> U <0,4> U <5,7>

(129) $(|x+2|+|x-2|)(|1-x|-|2-x|)\geq x^2-6$ **Rpta.** [-1,3]

(130) $|x-1|-|x|+|2x-3|>x+2$ **Rpta.** $<-\infty,\frac{2}{5}>U<6,+\infty>$

(131) $(\sqrt{|x-1|-3}-\sqrt{5-|x-4|})(\sqrt{|x-1|-3}+\sqrt{5-|x-4|})\leq|x|-6$ **Rpta.** [4,7]

(132) $\dfrac{(|x|+2)(|x|-2)\sqrt{x^2+4}}{(|x^2+3|-4x)\sqrt{x^2+5}} \geq 0$ **Rpta.** $<-\infty.-2]\ U <1,2]\ U <3,+\infty>$

(133) $|\dfrac{3|x|-x}{x+1}| < \dfrac{1}{x+1}$ **Rpta.** $<-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}>$

(134) $|\dfrac{1-|x|}{x-3}| > 2$ **Rpta.** $<\dfrac{7}{3},5>-\{3\}$

(135) $\dfrac{(x+3)(x-5)|x|}{|x|^2+2} < 0$ **Rpta.** $<-3,5> - \{0\}$

(136) $|\dfrac{3x-x^2}{x+2}| \geq x$ **Rpta.** $<\infty,\dfrac{1}{2}]-\{-2\}$

(137) $\dfrac{(x+3)(x-5)|x|}{|x|^2+2} \leq 0$ **Rpta.** $<-3,0>\ U <0,5>$

(138) $(|x|-1)(2x+1)(|x|+3) \geq 0$ **Rpta.** $[-1,-\dfrac{1}{2}]\cup[1,+\infty>$

(139) $|6x^2+9x-3|<|2x^2-9x+2|$ **Rpta.** $<-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}>\cup<\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}>$

(140) $|x^2-5|^2-|x^2-5| \leq 12$ **Rpta.** $[-3,-1]\cup[1,3]$

(141) $(|x-2|+|x-3|)(|2-x|-|3-x|) \geq |x^2-1|$ **Rpta.** $[\sqrt{3}-1,2]$

(142) $\dfrac{|x^2-2|+x}{x+2} \leq 3$ **Rpta.** $<-\infty,4]-\{-2\}$

(143) $\dfrac{|x-6|-x+|x+2|}{x-2} < 3$ **Rpta.** $<-\infty,2>\cup<\dfrac{9}{2},+\infty>$

(144) $\dfrac{|x-4|+|2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2$ **Rpta.** $<0,2>$

(145) $\frac{|x-5|+|x+1|}{x-1}\leq 3$ **Rpta.** $<-\infty,1>\cup[3,+\infty>$

(146) $\frac{|x-8|-x+|x+4|}{x+2}<3$ **Rpta.** $<-\infty,-2>\cup<\frac{3}{2},+\infty>$

(147) $\frac{|x|-3}{5-|x|}\geq\frac{2-|x|}{|x|+1}$ **Rpta.** $<-5,-\frac{13}{5}]\cup[\frac{13}{5},5>$

(148) $(\sqrt{|x-1|-3}-\sqrt{5-|x-4|})(\sqrt{|x-1|-3}+\sqrt{5-|x-4|})\leq x-6$ **Rpta.** $[4,7]$

(149) $(\sqrt{|x-2|-4}-\sqrt{6-|x-3|})(\sqrt{|x-2|-4}+\sqrt{6-|x-3|})\leq|x-2|-5$ **Rpta.** $[-3,-2]\cup[6,9]$

(150) $\sqrt{\frac{|x+1|.||x-1|-2|}{|x-1|}-1}+\sqrt{\frac{x}{|x^2+4|}-\frac{x-3}{x^2+x+4}}\geq 0$

Rpta. $<-\infty,-3]\cup[\frac{1}{2}(1+\sqrt{17}),3>\cup[\frac{1}{2}(3+\sqrt{17}),+\infty>$

(151) $\sqrt{\frac{x||x+1|-2|-6}{|x-2|+5}-\frac{||x+3|-1|}{|x+1|+2}}+\sqrt{9-x}\geq 0$ **Rpta.** $[4,9]$

(152) $\frac{|x-2|-x^2}{8x-|9-x^2|}\geq 0$

(153) $\frac{|x^2+2|(x^2+x-12)}{|x^2+x+1|}<0$

(154) $1\leq\frac{1}{|x|-1}\leq 2$

(155) $\frac{x^2-3x+|x-1|+4}{|x-1|+x^2+10x+27}\leq 0$

(156) $|x^2+2x+3|+|x^2-1|<6$

(157) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{|x^2+\pi|(x^2-5x+6)}<0$

(158) $|x-1|-|x|+|2x-3|>x+2$

(159) $\frac{(x^2-9)(x^2+x+1)}{|x^2+9|+3}\geq 0$

(160) $\frac{|x^2-x|-2}{|x|+1}\geq 0$

(161) $\frac{|x^2-1|}{(x-2)(x-4)}<1$

(162) $\dfrac{|x+5|-4x+|x-2|}{|x^2+2|}>0$

(163) $||x|-|2x+3||<||x|-|2x+2||$

(164) $\dfrac{|x+2|-x^2}{|x+5|+8}<0$

(165) $|x^2-4|+8>|x-2|+4x$

(166) $\dfrac{|3x+2|\sqrt{x^2+5}}{-x^2+6x-3}>0$

(167) $\dfrac{|3x^2+5x+2|}{x^2+5}\le 0$

(168) $\dfrac{|x-2|^2}{|x^2+4|}\le\dfrac{x^2}{x(x+2)+2(x+3)}$

(169) $|x-1|-|x+2|+|x+4|\le 8$

(170) $\dfrac{-2|x^2|+|x^2-x|+1}{x^2-5x+6}\le 0$

(171) $\dfrac{|x^2-16|}{x+4}\le\dfrac{x^2+4}{|x-1|}$

(172) $\dfrac{x^2+3-|x^2-2x-15|}{|9-x^2|-8x}<0$

(173) $\dfrac{|4x-x^2|-5}{1+\sqrt{x^2}}\ge 0$

(174) $\dfrac{x^3-x^2+4x}{|x^2-3x+2|}\ge 0$

(175) $1<\dfrac{x^2+|x|-3}{1+|x|}$

(176) $\dfrac{x-|x+1|-|x|}{||x|-1|}\le 0$

(177) $4<\dfrac{(x+2)^2+|x+2|-2}{|x+2|+2}<25$

(178) $\dfrac{|x^2-x|-2}{|x|-1}\ge 0$

(179) $\dfrac{|x-3|+7-x}{|x+3|-2}\ge 0$

(180) $\dfrac{|2x-x^2|-3}{|x^2-2x-15|-x^2-3}\le 0$

(181) $\dfrac{|x|}{||x|-4|}\le x-1$

(182) $\dfrac{|x^2-x|-2|x^2\cos\pi|+1}{x^2-5x-6\cos\pi}\le 0$

(183) $\dfrac{1}{||x|+1|}>2x+1$

(184) $\left|\dfrac{x-1}{x^2-4x+8}\right|\le\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

(185) $\left|\dfrac{1-|x|}{x-3}\right|>2$

(186) $\dfrac{|x|-|2x-1|}{x(x-1)} > 0$

(187) $\dfrac{|x^2-1|+2x+|x|}{||x^2+1|+3|} \geq ||x^2+6|-3|$

(188) $x^2+x+1-|x^3-1| > 0$

(189) $\dfrac{x-|x+1|-|x|}{||x|-1|} \leq 0$

(190) $\dfrac{|x^2+|3x||}{|x|} \leq |x|-4$

(191) $\dfrac{|4x-x^2|-5}{-\cos\pi-\sqrt{x^2}} \geq 0$

(192) $|x^2+2x+3|+|x^2-1| < 6$

(193) $\dfrac{\sqrt{|x-3|-|x-1|}}{x^2-9} \leq 0$

(194) $\dfrac{|x-x^2|.(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-6x} \geq 0$

(195) $\dfrac{|\sqrt{x}-8|-\sqrt{x}}{|x^2-4|} \geq 0$

(196) $\dfrac{|16-x^2|-x^2}{x^2-|2-x|} > 0$

(197) $\dfrac{|x^2+|3x||}{|x|} \leq |x|-4$

(198) $|\sqrt{x^2-6x+9}-3| > \sqrt{3-x}$

(199) $x^2+x+1-|x^3-1| > 0$

(200) $|x^2-5x+7| \geq x^2-1$

(201) $\dfrac{3-|x^2-4x|}{|x-5|+x^2} < 0$

(202) $(x^2-6x+8)\sqrt{12--|4-x^2|} < 0$

(203) $\dfrac{||x-1|+2|-|x-1|^2}{x^2+2} \geq 0$

(204) $\dfrac{(|4x-x^2|-5)\sqrt{x(x-1)(x-3)}}{|x|-1} \leq 0$

(205) $\dfrac{|x-4|}{4-|x|} > -1$

(206) $\dfrac{|x-3|^3+2(x-3)^2-5|x-3|-6}{(x-2)^2-2|x-2|-24} \leq 0$

(207) $\left|\dfrac{x^2-6x+7}{x-1}\right| < \dfrac{2}{x-1}$

(208) $\dfrac{|4-x|+|2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2$

(209) $\left|\dfrac{4x}{3}-8\right| < \left|\dfrac{x}{3}-6\right|+|x-2|$

(210) $\dfrac{|3x^2+5x+2|-4}{x^2+5} \geq 0$

(211) $\dfrac{x^3-x^2+4x}{|x^2-3x+2|} \geq 0$

(212) $\frac{x^2-16}{\sqrt{|x-4|-|x-1|}} \geq 0$ (213) $\frac{|4x-x^2|-5}{|x|-1} \geq 0$

IV. Encontrar el menor número M con la propiedad de que para todo x ∈ R se cumple:

(1) $2x-x^2 \leq M$ **Rpta.** M = 1

(2) $1-4x-x^2 \leq M$ **Rpta.** M = 3

(3) $2-x^{2/3}-x^{1/3} \leq M$ **Rpta.** $M=\frac{9}{4}$

(4) $2x^{2/3}-x^{4/3} \leq M$ **Rpta.** M = 1

(5) $1+6x-x^2 \leq M$ **Rpta.** M = 10

(6) $3+36x-12x^2 \leq M$ **Rpta.** M = 30

V. Encontrar el número mayor M con la propiedad de que para todo x ∈R se cumple:

(1) $M \leq 3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}$ **Rpta.** $M=\frac{55}{6}$

(2) $M \leq x^{2/5}-x^{1/5}--2$ **Rpta.** $M=-\frac{9}{4}$

(3) $M \leq 9x^2-48x-36$ **Rpta.** M = -100

(4) $M \leq 5x^2-20x+16$ **Rpta.** M = -4

(5) Si 2x + 3 ∈ [7,11] encontrar el valor M que satisface a la siguiente desigualdad $\frac{x+5}{x-7} \leq M$ **Rpta.** $M=-\frac{7}{5}$

(6) Si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ encontrar el mayor valor M que satisface a la desigualdad $M \leq \frac{x+2}{x-2}$

Rpta. $-\frac{5}{3}$

(7) Sí $\frac{1}{x} \in b[<-\infty,1> U <2,+\infty>]$. Hallar el menor valor de M tal que $|\frac{x-1}{2x+5}| \leq M$

(8) Sí |x – 3| < 1. Hallar el número M tal que: $|\frac{x+5}{x+1}| < M$

(9) Hallar M tal que sí |x| < 2 $\Rightarrow$ $|\frac{x-3}{x+4}| < M$

(10) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^3 - 2x^2 + 3x - 4| \leq M$

(11) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x+2}{x-2}| \leq M$ sí $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

(12) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^2 - 3x + 4| \leq M$ sí $x \in [-2,2]$

(13) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^2 + 4x - 3| \leq M$ sí $x \in [-2,4]$

(14) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x+2}{x-4}| \leq M$ sí $x \in [5,8]$

(15) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^3 + 2x^2 - 3x - 6| \leq M$ sí $x \in [-2,5]$

(16) Encontrar un número M positivo tal que: $|x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 5| \leq M$ sí $x \in [-3,-1]$

(17) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x^2 - 6x + 2}{x+5}| \leq M$ sí $x \in [-\frac{9}{2}, 4]$

(18) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x+7}{x^2 + 4x + 4}| \leq M$ sí $x \in [-1,3]$

(19) Encontrar un número M positivo tal que: $|\frac{x^3 - 3x + 5}{x^2 - 2x - 5}| \leq M$ sí $x \in [0,4]$

(20) Hallar el mayor número N tal que: $|\frac{x^2 + 6x + 14}{x^3 + 27}| \geq N$ si $x \in [-2,2]$

(21) Si $\frac{1}{x} \in (<-\infty,1> U <2,+\infty>)$, Determinar el menor número M tal que $|\frac{x-2}{x+4}| \leq M$

(22) Determinar el número M tal que: $|\frac{x-3}{x-4}| \leq M$, $\forall$ x $\in$ <1,3>

(23) Hallar el menor número M tal que: $|\frac{x^3+14}{x^2-4x+14}| \leq M$, sí x $\in$ [-1,2]

(24) Hallar un número M tal que: sí |x| < 1 $\Rightarrow$ $|\frac{x+1}{x+3}| < M$

VI. Resolver las siguientes ecuaciones:

(1) $[|3x|] = x+2$ **Rpta.** x = 1

(2) $[|3x|] = 2x+2$ **Rpta.** $x = 2, \frac{5}{2}$

(3) $[|\frac{|x-2|+3}{2}|] = 5$ **Rpta.** <-7,-5] U [9,11>

(4) $[|2-|x||] = 1$ **Rpta.** [-1,0> U <0,1]

(5) $[|3x-5|] = 2x+1$ **Rpta.** $\{6, \frac{13}{2}\}$

(6) $[|\sqrt{3-x}|] = 2$ **Rpta.** <-6,-1]

(7) $[|\frac{|x-1|-1}{3}|] = 2$ **Rpta.** <-9,-6] U [8,11>

(8) $[||\frac{|x|-2}{|x|}||] = -1$ **Rpta.** ϕ

(9) $[||\frac{x+3}{2}-3||] = -1$ **Rpta.** ϕ

(10) $[||\frac{x-1}{x+3}||] = 5$ **Rpta.** $[-4, -\frac{19}{5} > U < -\frac{17}{7}, -\frac{7}{3}]$

(11) $[|\,|\frac{2x}{x+1}|\,|] = 3$ **Rpta.** $[-3,-2> U <-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}]$

(12) $[|\frac{2x+3}{5}|] = 3$ **Rpta.** $<-\frac{23}{2},-9]\ U\ [6,\frac{17}{2}>$

(13) $[|\,|2x^2-1|\,|] = 1$ **Rpta.** $<-\sqrt{\frac{3}{2}},-1]\ U\ \{0\}\ U\ [1,\sqrt{\frac{3}{2}}>$

(14) $[|\frac{x+2}{x+3}|] = 2$ **Rpta.** $<\frac{11}{2},8]$

(15) $[|\frac{|x-2|+3}{2}|] = 4$ **Rpta.** [-1,0> ∪ <0,1]

(16) [| 2 - | x | |] = 1 **Rpta.** [7,9>

(17) $[|\frac{2x-1}{x+3}|] = 4$ **Rpta.** $[-\frac{13}{2},-\frac{16}{3}>$

(18) $[|x^2-2x|] = 3$ **Rpta.** $<1-\sqrt{5},-1]\cup[3,1+\sqrt{5}>$

(19) [| 2x |] - | x − 1| = 2x − 3 **Rpta.** $\{-2,\frac{10}{3},\frac{11}{3},4\}$

(20) $|[|x^2|]-1| = 3$ **Rpta.** $<-\sqrt{5},-2]\cup[2,\sqrt{5}>$

(21) $[|\frac{|x-2|+|2x-1|-2}{3}|] = 1$ **Rpta.** $<-\frac{5}{3},-\frac{2}{3}]\cup[\frac{8}{3},\frac{11}{3}>$

(22) $[|x-1|]^2 + 2[|x|]^2 = 57$ **Rpta.** [-4,-3>

VII. Resolver las siguientes inecuaciones:

(1) $[|\frac{x^2+1}{x+2}|] < 2$ **Rpta.** <-∞,-2> U <-1,3>

(2) $[|4x^2-5x-4|] \le 1$ **Rpta.** $<-\frac{3}{4},2>$

(3) $[\![\, |2x^2+5x|-2 \,]\!] < 1$ **Rpta.** $< -3,-\frac{3}{2} > \cup < -1,\frac{1}{2} >$

(4) $|\, [\![-x]\!] - 1 \,| < 2$ **Rpta.** <-3,0]

(5) $[\![\, x^2-1 \,]\!] \geq 0$ **Rpta.** <-∞,-1] U [1,+∞>

(6) $[\![\, \sqrt{3}-2x \,]\!] < \sqrt{3}$ **Rpta.** <0,+∞>

(7) $[\![\, x^2-1 \,]\!] \leq 0$ **Rpta.** $< -\sqrt{2},\sqrt{2} >$

(8) $[\![\, \frac{5+x}{5-x} \,]\!] < 1$ **Rpta.** <0,5>

(9) $[\![\, 2x-\frac{10}{x} \,]\!] \geq 1$ **Rpta.** $[-2,0> \cup [\frac{5}{2},+\infty>$

(10) $[\![\, x^2-4 \,]\!] \leq -1$ **Rpta.** <-2,2>

(11) $[\![\, |\frac{2x+3}{x+1}-1| \,]\!] \leq 1$ **Rpta.** $< -\infty,-\frac{2}{3} > \cup < 6,+\infty >$

(12) $[\![\, \frac{|x|+3}{4}-1 \,]\!] \geq 1$ **Rpta.** $< -\infty,-5] \cup [5,+\infty >$

(13) $[\![\, 2x-\frac{10}{x} \,]\!] \geq 1$ **Rpta.** $[-2,0> \cup [\frac{5}{2},+\infty>$

(14) $[\![x]\!]^2 - 2[\![x]\!] - 2 < 0$ **Rpta.** [0,2]

(15) $\frac{\sqrt{|x|-3}}{[\![\, x^2-2x-19 \,]\!]} \leq 0$ **Rpta.** $< 1-2\sqrt{5},-3] \cup [3,1+2\sqrt{5} >$

(16) $\sqrt{[\![x]\!]^2-12}\,([\![x]\!]^2 - [\![x]\!] - 6) \geq 0$ **Rpta.** <-∞,-3> ∪ <4,+∞>

(17) $\frac{\sqrt{|x|-2}}{[\![\, x^2-2x-3 \,]\!]} \leq 0$ **Rpta.** [2,3>

⑱ $[|x-2[|x|]|](x^2-4)\geq 0$

⑲ $[|x-2|].(x^2-x+2)>0$

㉑ $([|x|]-2)\sqrt{|x^2+2|}(x^2-4x+3)>0$

⑳ $\dfrac{[|-x|]-2}{6-[|x|]}\geq 0$

㉒ $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{x^2-[|x|]-4}<0$

㉓ $([|x|]-x)(x-2)(x-3)^2>0$

㉔ $\dfrac{|x|-1}{[|x|]-1}<1$

㉕ $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}}{|x|[|x-1|]-9}\geq 0$

㉖ $||x-1|-[|x|]|<x$

㉗ $\sqrt{\dfrac{-2x-11}{5x+26}}\geq [|\dfrac{x-2}{x+7}|]\dfrac{|x|}{x}$

㉘ $\dfrac{(|x-5|+2x+\sqrt{x-5}-[|x-2|]x+5)(x-\frac{17}{3})}{\sqrt{6-x}}\leq 0$

㉙ $\dfrac{\sqrt{2-|x|}}{[|x^2-9|]}\leq 0$

㉚ $\dfrac{(x^2+4x+5)\sqrt{x-1}(2^x+\operatorname{sen}x)(x+2)}{([|x|]-\frac{1}{2})(x^2-2x-3)}\geq 0$

㉛ $[|\dfrac{4x+1}{4x+2}|]\leq 4$

VIII. Resolver la inecuación logarítmica.

① $\log_{1/2}|2x-3|>-3$ **Rpta.** $<-\frac{5}{2},\frac{11}{2}>-\{\frac{3}{2}\}$

② $\log_2(x-3\sqrt{x+1}+3)<1$ **Rpta.** [-1,0> U <3,15>

③ $\log_7\dfrac{|x^2+4x|+3}{x^2+|x-5|}\geq 0$ **Rpta.** $[\frac{2}{5},+\infty>$

④ $\log_2[\dfrac{4x-11}{2x^2-4x-6}]\leq -1$ **Rpta.** $[2,\frac{11}{4}>U<4,+\infty>$

⑤ $\log[\dfrac{|2x-3|}{x+1}]>1$ **Rpta.** $<\frac{1}{2}(\sqrt{21}-3),1>$

(6) $\log_{(x-4)}(3-x) < 2$ **Rpta.** ϕ

(7) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+6) < -2$ **Rpta.** $<2,+\infty>$

(8) $\log_{x}(\frac{x+3}{x-1}) > 1$ **Rpta.** $<1,3>$

(9) $\log_{2}|3-4x| > 3$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{5}{4}> \cup <\frac{11}{4},+\infty>$

(10) $\log_{3}|3-4x| > 2$ **Rpta.** $<-\infty,-\frac{3}{2}> \cup <3,+\infty>$

(11) $\log_{6}[|\frac{x-2}{x-5}|+35] > 2$ **Rpta.** $<\frac{7}{2},5> \cup <5,+\infty>$

(12) $\log_{(\frac{25-x^2}{16})}(\frac{24-2x-x^2}{14}) > 1$ **Rpta.** $<-3,1> \cup <3,4>$

(13) $\log_{x}(\frac{4x-5}{|x-2|}) \geq 1$ **Rpta.** $<-1+\sqrt{6},2> \cup <2,5]$

(14) $\log_{6}(x-3\sqrt{x+1}+3) < 1$ **Rpta.** $[-1,0> \cup <3,15>$

(15) $\log_{5}(3x-5) > \log_{5}(7-2x)$ **Rpta.** $<\frac{12}{5},\frac{7}{2}>$

(16) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+3) \geq -1$ **Rpta.** $[0,1> \cup <3,4]$

(17) $\log_{2}(|x-2|-1) > 1$ **Rpta.** $<-\infty,-1> \cup <5,\infty>$

(18) $\log_{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}(\frac{3-2x}{1-x}) \geq 0$ **Rpta.** $<0,1> \cup [2,+\infty>$

(19) $\log_{x^2}(2+x) < 1$

(20) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4) > \log_{\frac{1}{2}}(4x-7)$

(21) $\log_{2}(x^2)+\log_{2}(x^4) > 3$

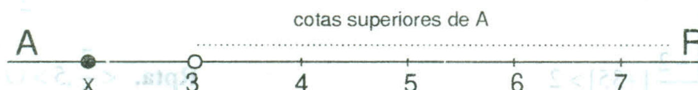
(22) $\log_{\frac{1}{3}}(8-2x) \geq 3$

1.42 CONJUNTOS ACOTADOS.-

a) DEFINICION.- Llamaremos **cota superior** de un conjunto $A \subset R$ a todo número $k \in R$ tal que $x \leq k$, $\forall x \in A$, ósea que cualquier número que sea mayor o igual que los elementos de A se llama "cota superior de A".

Cuando A tiene alguna cota superior, diremos que el conjunto A es acotado superiormente.

Ejemplo.- Sea $A = <-\infty,3>$ y la cota superior $k = 5$



Observamos que cualquiera de los números reales mayores que 3 e incluso el 3 es cota superior de A.

De todas estas cotas superiores de A, él número 3 es la menor. Luego daremos la siguiente definición.

b) DEFINICION.- A la menor de las cotas superiores de un conjunto $A \subset R$ y acotado superiormente, se le llama supremos de A o mínima cota superior de A y se denota por Sup(A).

OBSERVACIÓN.-

(1) El supremo de A es también una cota superior de A.

(2) La menor cota superior k = Supremo de A = Sup A esta caracterizada por las condiciones siguientes que es equivalente a la definición.

K = Sup A $\Leftrightarrow \forall x \in A$ y para toda cota superior k' de A, se tiene que $x \leq k \leq k'$

(3) El supremo de un conjunto A, si existe, no es necesariamente un elemento de A, como en el caso de $A = <-\infty,3>$ cuyo supremo es 3 no pertenece al conjunto A.

La existencia del supremo para conjuntos acotados superiormente esta dado por el siguiente axioma.

1.43 AXIOMA DEL SUPREMO O AXIOMA DE LA MÍNIMA COTA SUPERIOR.-

Todo conjunto A de números reales, no vacío y acotado superiormente, tiene una menor cota superior en R.

Ejemplo.- Demostrar que sí A = <-∞,3> entonces Sup A = 3

Solución

Probaremos esta afirmación por el absurdo.

Supongamos que 3 no es la menor cota superior de A, entonces se puede asegurar que existe una cota superior k de A tal que k < 3 y puesto que $k < \frac{k+3}{2} < 3$

Tomamos $k' = \frac{k+3}{2} \Rightarrow k < k' < 3$ **... (1)**

De donde $k' \in A = <-\infty, 3>$, pero siendo 1 cota superior de A debería tenerse $k' < k$ contradiciendo a (1).

La suposición es absurda por lo tanto Sup A = 3.

a) DEFINICION.- Llamaremos cota inferior de un conjunto A ⊂ R a todo número k ∈ R tal que k ≤ x, ∀ x ∈A. Osea que cualquier número que sea menor o igual que los elementos de A se llama "cota inferior de A".

Cuando A tiene alguna cota inferior, diremos que el conjunto A es acotado inferiormente.

Ejemplo.- Sea A = [-2,7> y la cota inferior k = -2.



Se observa que cualquiera de los números reales menores que –2 e incluso el –2 es cota inferior de A.

De todas estas cotas inferiores de A el número –2 es la mayor. Luego daremos la siguiente definición.

b) DEFINICION.- A la mayor de las cotas inferiores de un conjunto $A \subset R$ y acotado inferiormente, se le llama ínfimo de A o máxima cota inferior de A y se denota por inf (A).

OBSERVACIÓN.-

① El ínfimo de A es también una cota inferior de A.

② La mayor cota inferior k = inf(A) = ínfimo de A esta caracterizada por la condición.

$K = \inf(A) \Leftrightarrow \forall x \in A$ y para toda cota inferior k' de A se tiene $k' \leq k \leq x$.

③ El ínfimo de un conjunto puede no ser elemento del conjunto dado.

Ejemplo.- El conjunto A = [-2,7> esta acotado superiormente por 8 e inferiormente por –3, además la mayor cota inferior es –2 y la menor cota superior es 7 por lo tanto: Sup(A) = 7 y Inf(A) = -2 de donde Sup(A) $\notin$ A, Inf(A) $\in$ A

Cuando en un conjunto A se tiene que Sup(A) $\in$ A entonces el Sup(A) también se le llama el máximo de A y si el Inf(A) $\in$ A entonces al ínfimo de A también se le llama el mínimo de A.

c) DEFINICION.- Un conjunto A se dice que es acotado, si es a la vez acotado inferiormente y superiormente.

Ejemplo.- El conjunto A = <1,7> U [30,50] es acotado y Sup(A) = 50, Inf(A) = 1.

Ejemplo.- El conjunto A = <-∞,-5] U <1,+∞> no es acotado inferiormente ni superiormente.

1.44 PRINCIPIO ARQUIMEDIANO.-

Si x es un número real positivo entonces existe un número natural n_0 tal que $0 < \frac{1}{n_0} < x$ (o equivalentemente tal que $xn_0 \geq 1$)

Demostración

Demostraremos por el absurdo. Suponiendo que $nx \le 1, \forall n \in N$

Por lo tanto el conjunto $A = \{nx / n \in N\}$ esta acotado superiormente al menor por k= 1, y por el axioma del supremo el conjunto A posee una menor cota superior k (Sup A) en R que satisface la condición $nx \le k \le 1, \ \forall n \in N$ pero siendo $x > 0 \Rightarrow k - x < k$ y por lo tanto $(k - x)$ no puede ser cota superior de A puesto que k es la menor de todas ellas. Luego existe un elemento de A: $m_1 x$ como $m_1 \in N$ tal que $k - x < m_1 x \le k$ ... (1)

Pues si así no fuese, entonces se tendría que $nx < k - x, \ \forall nx \in A \Rightarrow k - x$ seria cota superior de A lo cual es falso.

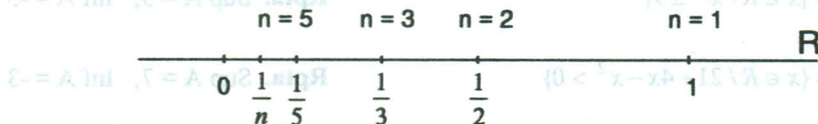
Luego de (1) $\Rightarrow k < (m_1 + 1)x \Rightarrow k < mx$, con $m = (m_1 + 1) \in N$

lo cual es absurdo, pues siendo k = Sup A debería tenerse $mx \le k$, de esta manera el principio queda demostrado por el absurdo.

Ejemplo.- Probar que el conjunto $A = \{\frac{1}{n} / n \in N\}$ es acotado.

Solución

Ubiquemos los elementos de A en una recta para $x = \frac{1}{n}$, $n \in N$.



Ahora encontraremos el supremo y el ínfimo de A como:

$$\forall n \in N \Rightarrow n \ge 1 \Rightarrow 0 < x = \frac{1}{n} \le 1 \qquad \text{... (1)}$$

Cuando n crece los elementos de A se acercan al cero (0) pero sin coincidir con el 0 para $n \in N$ de esta observación se tiene:

$$\text{Sup}(A) = 1 \in A \quad \inf(A) = 0 \notin A$$

Probaremos que inf(A) = 0, de (1) se vio que 0 es una cota inferior, si no fuese la mayor existiría otra cota inferior k mayor que 0 y por principio Arquimediano se tiene que existe un $n_0 \in N$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < k$ lo cual es absurdo pues $\frac{1}{n_0} \in A$ y siendo k cota inferior de A debería cumplirse que $k \le \frac{1}{n_0}$, de manera que Inf A = 0.

1.45 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Si $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, dos conjuntos acotados superiormente tales que $A \subset B$, probar que Sup A ≤ Sup B.

(2) Si $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ son dos conjuntos acotados inferiormente tales que $A \subset B$ probar que Inf (B) ≤ Inf(A).

(3) Hallar supremos y el ínfimo de $A = \{\frac{1-6n}{3n+4} / n \in N\}$, $B = \{\frac{6(-1)^n + 8n}{3n+8} / n \in N\}$

Rpta. $\sup(A) = -\frac{5}{7}$, $\inf(A) = -2$, $\sup(B) = 4$, $\inf(B) = 0.2$

(4) Determinar el supremo y el ínfimo si existen en cada uno de los ejercicios.

a) $A = \{x \in R / x^2 \le 9\}$ **Rpta.** Sup A = 3, Inf A = -3

b) $A = \{x \in R / 21 + 4x - x^2 > 0\}$ **Rpta.** Sup A = 7, Inf A = -3

c) $A = \{\frac{3+2n}{3-2n} / n \in N\}$ **Rpta.** Sup A = 5, Inf A = -7

d) $A = \{x \in R / x^2 - 4x - 12 < 0\}$ **Rpta.** Sup A = 6, Inf A = -2

e) $A = \{x \in R / |x||x+1| \le 2\}$ **Rpta.** Sup A = 1, Inf A = -2

f) $A = \{x \in R / |6 + x - x^2| \le 6\}$ **Rpta.** Sup A = 4, Inf A = -3

(5) Encontrar el supremo y el ínfimo de $A = \{\frac{\cos n\pi}{2+n} / n \in N\}$, $B = \{\frac{6+4n}{2-7n} / n \in N\}$

Rpta. $\sup(A) = \frac{1}{4}$, $\inf(A) = -\frac{1}{3}$, $\sup(B) = -\frac{4}{7}$, $\inf(B) = -2$

(6) Hallar el supremo y el ínfimo si existe de:

$A = \{x \in R / x^2 - 4x - 12 < 0\}$, $B = \{x^2 - 4x - 12 / x \in <-\infty, \infty>\}$

Rpta. Sup (A) = 6, Inf (A) = -2, Sup (B) = $\nexists$, Inf (B) = -16

(7) Dar un ejemplo de dos conjuntos A y B, mediante intervalos tales que Inf $(A \cap B)$ > Sup {Inf(A), Inf(B)}.

(8) Determinar el supremo y el ínfimo si existe de los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x \in R / |4 - x| > x\}$

b) $A = \{x \in R / |x^2 - 4| < 16\}$

c) $A = \{x \in R / |x+6| + |3-x| = 9\}$

d) $A = \{x \in R / |x^2 + 2x - 4| \leq 7\}$

e) $A = \{x \in R / |x-8| - |4x^2 - 1| < 0\}$

CAPITULO II

RELACIONES Y FUNCIONES

2.1. INTRODUCCION.

a) PAR ORDENADO.-

Llamaremos "par ordenado" de números reales a la expresión (a,b) donde a es llamada la primera componente y b es llamada la segunda componente.

Ejemplo.- Son pares ordenados, (3,5), (-2,7), (etc).

b) IGUALDAD DE PARES ORDENADOS.-

Los pares ordenados (a,b) y (c,d) diremos que son iguales si sus correspondientes componentes son iguales, esto es:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Ejemplo.- Los pares ordenados (5,6) y (5,4) no son iguales sus segundas componentes son diferentes.

Luego diremos que dos pares ordenados son diferentes si una de sus componentes correspondientes son diferentes esto es:

$$(a,b) \neq (c,d) \Leftrightarrow a \neq c \text{ y/o } b \neq d$$

Ejemplo.- Determinar el valor de x e y de tal manera que $(5x+2y, -4) = (-1, 2x-y)$

Solución

Para calcular el valor de x e y aplicamos el concepto de igualdad de pares ordenados:

$$(5x + 2y, -4) = (-1, 2x - y) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 2x-y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \end{matrix}$$

c) PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS.-

Consideremos dos conjuntos A y B arbitrarios; llamaremos producto cartesiano de A y B, al conjunto formado por todos los pares ordenados (a,b) de tal manera que la primera componente a pertenece al conjunto A y la segunda componente b pertenece al conjunto B.

La notación del producto cartesiano de A y B es: AxB. Simbólicamente el producto cartesiano se representa:

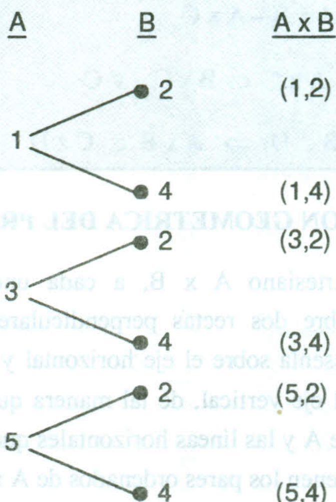
$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Nota: $(a,b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$

Ejemplo.- Sean $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4\}$ Entonces:

$A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

También puede determinarse A x B mediante el método del "diagrama del árbol" el cual nos permite observar el conjunto de pares ordenados, este método consiste en disponer los elementos de A y B del modo siguiente



OBSERVACION.- Cuando los conjuntos A y B son finitos entonces:

$$n(A \times B) = n(A).n(B)$$

donde: n(A): es el número de elementos del conjunto A.

n(B): es el número de elementos del conjunto B.

n(A x B): es el número de elementos del conjunto A x B.

Ejemplo.- Si A={2,4} y B = {1,3,5} entonces: AxB={(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)}

De donde: n(A x B) = n(A).n(B) = (2)(3) = 6

Además se tiene:

B x A = {(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)} de donde se observa que A x B ≠ B x A

d) PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO

① $A \times B \neq B \times A$, no siempre se cumple

② $A \times \phi = \phi \times A = \phi$

③ $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$

④ $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$

⑤ $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$

⑥ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

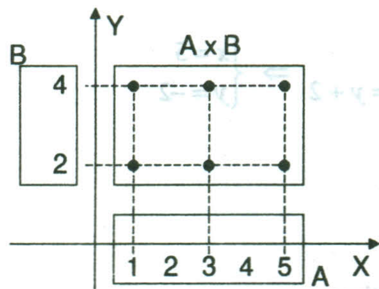
⑦ Si $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C, \forall C$

⑧ Si $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow A \times B \subset C \times D$

e) REPRESENTACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO CARTESIANO.-

En el producto cartesiano A x B, a cada uno de los conjuntos A y B lo representaremos sobre dos rectas perpendiculares, en donde los elementos del conjunto A se representa sobre el eje horizontal y los elementos del conjunto B se representan sobre el eje vertical, de tal manera que las líneas verticales que pasan por los elementos de A y las líneas horizontales que pasan por los elementos de B al interceptarse se obtienen los pares ordenados de A x B.

Ejemplos.-



Sí $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4\}$ entonces:

$A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2)(3,4)(5,2)(5,4)\}$

A los elementos del conjunto A lo representaremos en el eje horizontal y a los elementos del conjunto B lo representaremos en el eje vertical.

OBSERVACION

Como los conjuntos A y B son arbitrarios, entonces consideremos los siguientes casos:

① Si A = B, el producto cartesiano denotaremos por $A \times B = A \times A = A^2$

② Si $A = B = R$ entonces $A \times B = R \times R = R^2$ este producto nos representa al plano cartesiano.

f) DIAGONAL DE UN CONJUNTO.-

Dado un conjunto $A \neq \phi$, a la diagonal del producto cartesiano A x A denotaremos por I_A y es definido por:

$$I_A = \{(x,y) \in A \times A \,/\, y = x\}$$

Ejemplo.- Sí $A = \{1,3,5\}$ entonces:

$A \times A = \{(1,1),(1,3)(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

Entonces: $I_A = \{(1,1),(3,3),(5,5)\}$

g) EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Determinar los valores x e y, en cada caso:

a) $(4, 2x - 10) = (x - 1, y + 2)$

Solución

Mediante la igualdad de pares ordenados se tiene:

$$(4, 2x-10) = (x-1, y+2) \Rightarrow \begin{cases} 4 = x-1 \\ 2x-10 = y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

b) $(y-2, 2x+1) = (x-1, y+2)$

Solución

Mediante la igualdad de pares ordenados se tiene:

$$(y-2, 2x+1) = (x-1, y+2) \Rightarrow \begin{cases} y-2 = x-1 \\ 2x+1 = y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

(2) Dados los conjuntos $A = \{x \in z \,/\, -1 \le x \le 3\}$; $B = \{x \in z \,/\, 1 \le x \le 4\}$

$C = \{x \in z \,/\, 1 \le x \le 4\}$

Hallar los siguientes conjuntos y graficar:

a) $A \times B$ **b)** $B \times C$ **c)** $(A - C) \times B$

Solución

Tabulando los conjuntos dados se tiene:

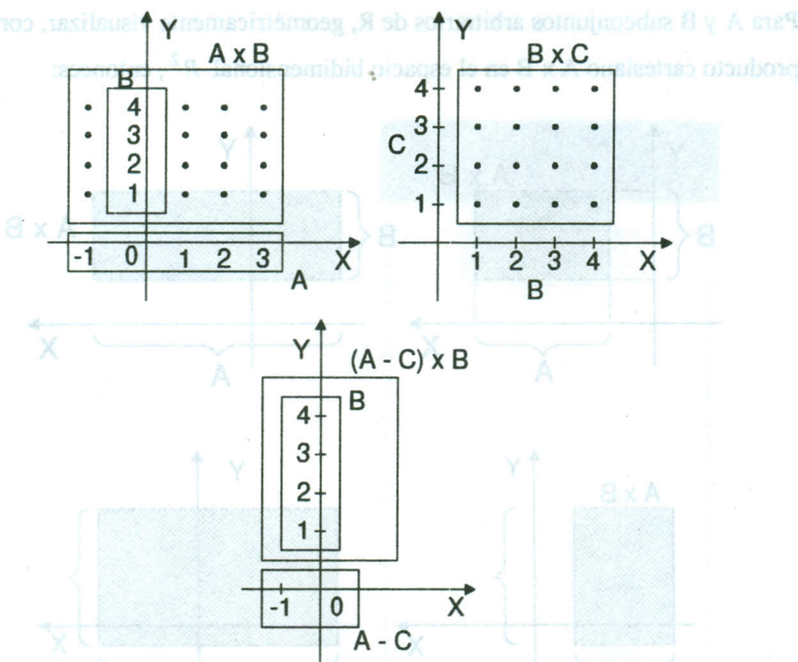
$A = \{-1,0,1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{1,2,3,4\}$

a) $A \times B = \{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(-1,4),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,1),(1,2),(1,3)(1,4),(2,1),$
$(2,2)(2,3)\ (2,4)(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

b) $B \times C = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2,),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),$
$(4,2),(4,3),(4,4)\}$

c) $A - C = \{-1,0\}$

$(A - C) \times B = \{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(-1,4),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$



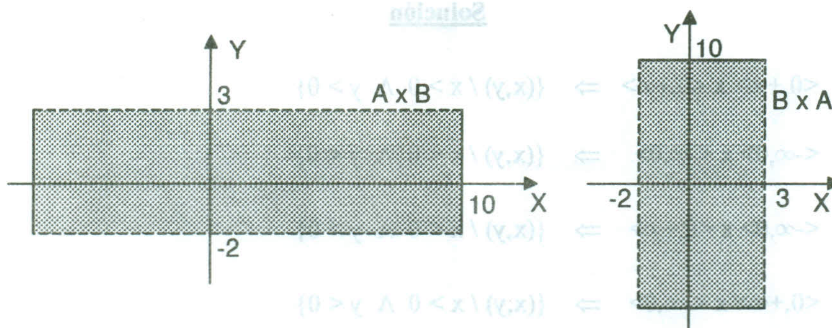
③ A = {x ∈ R / x – 3 < 7}, B = {y ∈ R / -2 < y < 3}. Graficar A x B, B x A

Solución

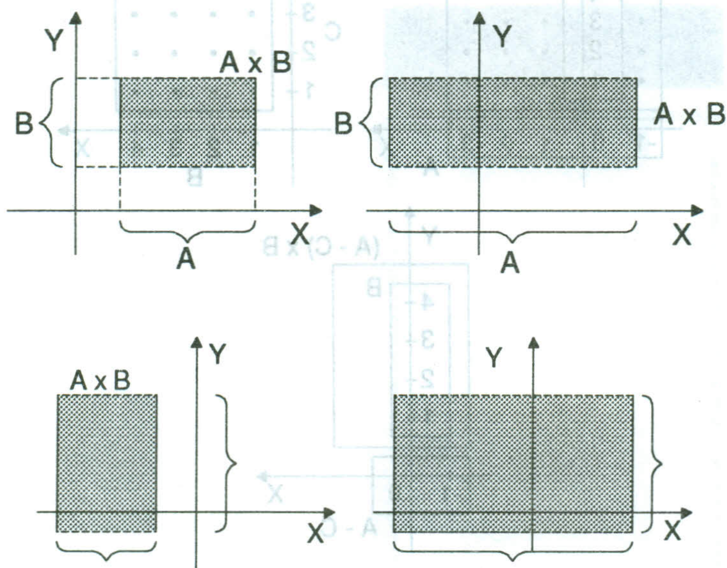
Como $x - 3 < 7 \Rightarrow x < 10$

A x B = {(x,y) / x < 10 Λ -2 < y < 3}

B x A = {(x,y) / -2 < x < 3 Λ y < 10}



(4) Para A y B subconjuntos arbitrarios de R, geométricamente visualizar, como superficie, el producto cartesiano A x B en el espacio bidimensional R^2, entonces:



(5) Que parte del plano cartesiano se obtiene si se representa gráficamente los siguientes productos cartesianos.

a) <0,+∞> x <0,+∞>

b) <-∞,0> x <-∞,0>

c) <-∞,0> x <0,+∞>

d) <0,+∞> x <-∞,0>

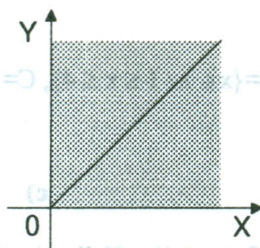
<u>Solución</u>

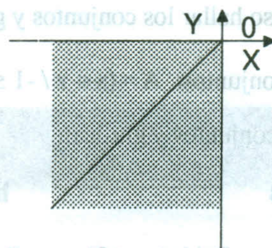
a) <0,+∞> x <0,+∞> ⇒ $\{(x,y) / x > 0 \wedge y > 0\}$

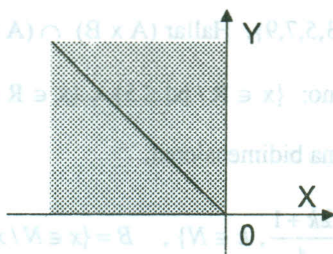
b) <-∞,0> x <-∞,0> ⇒ $\{(x,y) / x < 0 \wedge y < 0\}$

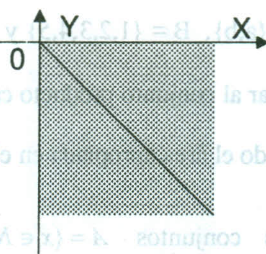
c) <-∞,0> x <0,+∞> ⇒ $\{(x,y) / x < 0 \wedge y > 0\}$

d) <0,+∞> x <-∞,0> ⇒ $\{(x,y) / x > 0 \wedge y < 0\}$









h) EJERCICIOS PROPUESTOS.

I. En cada caso determinar los valores de x e y.

(1) (x,4) = (-2,y)

(2) (4, 2x – 10) = (x – 1, y + 2)

(3) (y – 2, 2x + 1) = (x – 1, y + 2)

(4) (5x + 2y, -4) = (-1, 2x – y)

(5) (x + 4, 6) = (10, y – x)

(6) (x + 5, 3 – y) = (7,2)

(7) (x + y, 3) = (5, y – x)

(8) (x – 7y, 2x – 6y) = (15,-10)

(9) (3x – 8y, 4x + 3y) = (4 – 2x – 10y, 2x + 4y + 7)

(10) (5x + 2y, -4) = (-1, 2x – y)

(11) $(x^3 - 19,\ x^2y - 6) = (y^3,\ xy^2)$

(12) (2x – y, x + y + 3) = (x + y + 1, 2x + y)

(13) $(\frac{x+y}{2} - 1,\ \frac{x-y}{2} + 1) = (\frac{y-x}{2} + 2,\ \frac{x+y}{2} - 2)$

II. En cada caso hallar los conjuntos y graficar:

(1) Dado los conjuntos: $A = \{x \in z / -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in z / 1 \leq x \leq 4\}$, $C = \{x \in z / 1 \leq x \leq 4\}$;

Hallar los conjuntos y graficar:

a) A x B **b)** B x C **c)** (A – C) x B

(2) Sea $A = \{x \in R / 1 \leq x \leq 3\}$ y $B = \{y \in R / 2 \leq y \leq 4\}$. Hallar A x B y graficar

(3) Sean $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ y $E = \{3,5,7,9\}$. Hallar $(A \times B) \cap (A \times E)$

(4) Representar al conjunto producto cartesiano: $\{x \in R / |x| \leq 5\} \times \{x \in R / -2 \leq x < 3\}$

Sombreando el área apropiada en el sistema bidimensional.

(5) Dado los conjuntos $A = \{x \in N / x = \frac{2k+1}{4}, k \in N\}$, $B = \{x \in N / x^2 - 14x + 40 = 0\}$, $C = \{x \in N / x^2 - 1 = 0\}$, entonces el número de elementos del conjunto $[(A \cap B) \cup C] \times (B - C)$ es.

(6) Si $A = \{x \in R / 2 < x < 5\}$ y $B = \{x \in R / 1 < x < 4\}$. Graficar A x B, luego graficar BxA.

(7) Si $A = \{x \in R / 2 \leq x \leq 5\}$, $T = \{x \in R / 1 \leq x < 4\}$. Graficar T x A, luego graficar AxT.

(8) Si $A = \{\frac{x^3+2}{3} / (x-2)(x+3)(x-5) = 0\}$ y $B = \{\frac{x^2}{2} + 3 / x(x+2)(x-4) = 2\}$ $\forall x \in R$

Hallar A x B, B x A y graficar.

(9) Si $A = \{x \in N / x = \frac{2k-1}{3}, k \in N\}$, $B = \{x \in N / x^2 + 1 \leq 12\}$. Hallar $(A \cap B) \times (B - A)$

(10) Si $A = \{x^2 - 1 / 0 \leq x \leq 5, x \in z\}$, $B = \{x^2 + 1 / -5 \leq x \leq -3, x \in z\}$,

$C = \{x^3 + 4 / (x-1)(x+2)(x-3) = 0, x \in z\}$. Hallar A x B, A x C, B x C

(11) Si $A = \{\frac{1}{x} / x \in z \wedge -2 \leq x < 4\}$, $B = \{x \in N / x \leq 2 \wedge x \in \{3,2,4,5\}\}$

Hallar y graficar A x B y B x A

(12) Si $A = \{3x + 1 / (x \in N \ \Lambda \ x \leq 3) \ V \ (x \in z \ \Lambda \ 0 \leq x < 5)\}$

Calcular la diagonal del producto A x A y luego grafique.

(13) Dado $A = \{x \in < / -12 < x + 6 < 20\}$ y $B = \{x \in z / 10 < x^2 < 400\}$

Cuantos elementos tiene A x B.

(14) Dados los conjuntos: $A = \{x \in N / x < 3\}$, $B = \{x \in N / x \text{ es par y } x < 5\}$,

$C = \{x \in N / x \text{ es impar y } x \leq 4\}$. Hallar el conjunto $(A \cap B) \times (C - A)$

(15) Sí $A = \{x \in z^+ / x = \dfrac{2k-1}{3},\ k \in z^+\}$ y $B = \{x \in z^+ / x^2 + 1 \leq 12\}$. Hallar $(A \cap B) \times (B - A)$

(16) Si A y B son dos conjuntos arbitrarios demostrar que: $A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \ V \ B = \phi$

(17) Demostrar que: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(18) Demostrar que: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(19) Demostrar que: $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

(20) Demostrar que: Si $A \subset B$ entonces $A \times B \subset B \times B$

(21) Demostrar que: Si $A \subset B$ entonces $A \times A \subset A \times B$

(22) Demostrar que: $A \times (E - B) = (A \times E) - (A \times B)$

(23) Demostrar que: $(A \cap B) \times (E \cap F) = (A \times E) \cap (B \times F)$

(24) Demostrar que: $(A \times E) \cup (B \times F) \subseteq (A \cup B) \times (E \cup F)$

(25) Demostrar que: $A \subset B$ y $E \subset D$ implica que $A \times E \subset B \times D$

2.2 RELACIONES BINARIAS.-

a) **DEFINICION.-** Consideremos dos conjuntos A y B no vacíos, llamaremos relación binaria de A en B ó relación entre elementos de A y B a todo subconjunto R del producto cartesiano A x B, esto es:

R es una relación de A en B $\Leftrightarrow$ $R \subseteq A \times B$

Ejemplo.- Sean A = {2,4} y B = {1,3,5} entonces

A x B = {(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)}

Los siguientes conjuntos de pares ordenados son relaciones de A a B:

$R_1 = \{(2,1),(2,5)\}$, $R_2 = \{(2,3),(4,1),(4,5)\}$, $R_3 = \{(2,1),(4,3),(2,3)\}$, $R_4 = A x B$

Pero los siguientes conjuntos de pares ordenados no son relaciones de A en B:

$R_5 = \{(1,2),(4,1),(4,5)\}$, $R_6 = \{(2,1),(4,1),(3,4)\}$ puesto que (1,2) ∉ A x B, (3,4) ∉ A x B por lo tanto $R_5 \not\subset A x B$, $R_6 \not\subset A x B$.

Observación.-

1. Si A = B, entonces R es una relación en A ó, R es una relación entre elementos de A.
2. La definición 1.1 establece una comparación entre elementos de pares ordenados, motivo por el cual se le llama "relación binaria".
3. Si R es una relación entre elementos de A y B, al conjunto A le llamaremos conjunto de partida y al conjunto B le llamaremos conjunto de llegada.
4. Generalizando: una relación R, entre los elementos del conjunto de los números reales R, está determinado por una función proposicional P(x,y); esto es:

$$E = \{(x,y) \in R x R / P(x,y)\}$$

5. Cuando el par ordenado (a,b) satisface a la función proposicional P(x,y) de la relación R, diremos que (a,b) ∈ R en caso contrario (a,b) ∉ R.
6. Si A tiene p elementos y B tiene q elementos entonces ∃ 2^n relaciones entre A y B donde n = pq.

Ejemplos.- Sí A = {1,3} y B = {2,4} entonces A x B = {(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)}

El número de relación que se obtendrá de A x B es $2^{2x2} = 2^4 = 16$ es decir: que se puede formar 16 relaciones:

{(1,2)}, {(1,2),(3,2)}, {(1,4)}, {(3,2)}, {(3,4)}, {(1,2),(1,4)}, {(1,4),(3,2)}, {(1,2),(3,4)}, {(1,4),(3,4)}, {(3,2),(3,4)}, {(1,2),(1,4),(3,2)}, {(1,2),(1,4),(3,4)}, {(1,4),(3,2),(3,4)}, {(1,2),(3,2),(3,4)}, {(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)}, ϕ

b) DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACION BINARIA.

Consideremos una relación R de A en B: es decir que $R \subset A \times B$.

El dominio de la relación R denotado por D_R es el conjunto definido por:

$$D_R = \{a \in A / \exists\ b \in B \ \wedge\ (a,b) \in R\}$$

El rango de la relación R denotado por R_R es el conjunto definido por:

$$R_R = \{b \in B / \exists\ a \in A \ \wedge\ (a,b) \in R\}$$

Ejemplo.- Si R = {(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)} entonces $D_R = \{1,2\}$, $R_R = \{3,4,5\}$

OBSERVACION.-

Para determinar el dominio de una relación, primero se despeja "y" enseguida se analiza los valores que pueden tomar "x" para que la variable "y" sea real.

Para determinar el rango de una relación se despeja "x", enseguida se analiza los valores que puedan tomar "y" para que la variable "x" sea real.

Ejemplo.- Determinar el rango y dominio de la siguiente relación:

$$R = \{(x,y) \in RxR / x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0\}$$

Solución

En primer lugar despejamos la variable "y" para obtener el dominio, es decir: $x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0$, completando cuadrado

$(y+5)^2 = 100 - x^2$ de donde $y = -5 \pm \sqrt{100 - x^2}$

Ahora analizaremos los valores que pueda tomar x para que "y" sea número real es decir:

$100 - x^2 \geq 0$ de donde: $x^2 \leq 100 \Rightarrow -10 \leq x \leq 10$ $\therefore D_f = [-10,10]$

Ahora despejamos la variable "x" para obtener el rango, como $x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0$ $\Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{75 - 10y - y^2}$ entonces analizando los valores que puede tomar "y" para que x sea número real se tiene: $75 - 10y - y^2 \geq 0$

donde $(y+5)^2 \leq 100$ $\Rightarrow$ $-10 \leq y + 5 \leq 10$ $\Rightarrow$ $-15 \leq y \leq 5$ $\therefore$ $R_f = [-15,5]$

c) PROPIEDADES DE LA RELACION BINARIA.-

Las relaciones binarias gozan de las siguientes propiedades:

① **Propiedad Reflexiva.-** Una relación R en A, diremos que es reflexiva si (a,a) ∈ R para todo a ∈ R esto es:

R es reflexiva en A $\Leftrightarrow$ ∀ a ∈ A, (a,a) ∈ R

② **Propiedad Simétrica.-** Una relación R en A diremos que es simétrica si (a,b) ∈ R implica que (b,a) ∈ R, esto es:

R es simétrica $\Leftrightarrow$ ∀ (a,b) ∈ R $\Rightarrow$ (b,a) ∈ R

③ **Propiedad Transitiva.-** Una relación R en A, diremos que es transitiva sí:

(a,b) ∈ R ∧ (b,c) ∈ R implica que (a,c) ∈ R, esto es:

R es transitiva $\Leftrightarrow$ ∀ a,b,c ∈ A, [(a,b) ∈ R ∧ (b,c) ∈ R $\Rightarrow$ (a,c) ∈ R]

④ **Propiedad Antisimétrica.-** Una relación R en A, diremos que es antisimétrica sí:

∀ a,b ∈ A, (a,b) ∈ R y (b,a) ∈ R implica que: a = b, esto es:

R es antisimetrica $\Leftrightarrow$ ∀ a,b ∈ A, [(a,b) ∈ R ∧ (b,a) ∈ R $\Rightarrow$ a = b]

⑤ **Propiedad de Equivalencia.-**

Una relación R en A, diremos que es de equivalencia si es: reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo.- Si A = {1,2,3,4,5,6} las relaciones en A.

a) $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ es reflexiva en A.

b) $R_2 = \{(1,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ no es reflexiva en A por que falta (2,2).

Ejemplo.- Si A = {2,3,5,7}, las relaciones en A

a) $R_1 = \{(5,3),(2,7),(3,5),(7,2),(2,2)\}$ es simétrica porque $(x,y) \in R_1 \Rightarrow (y,x) \in R_1$

b) $R_2 = \{(5,3),(2,7),(3,5),(2,2)\}$ no es simétrica porque falta (7,2).

Ejemplo.- Si A = {1,3,7,9} las relaciones en A.

a) $R_1 = \{(7,1),(2,2),(1,2)\}$ no es transitiva porque $(7,1) \in R_2 \wedge (1,2) \in R_2 \Rightarrow (7,2) \in R_2$

Ejemplo.- Si A = {1,2,3,4,5} la relación R en A dado por R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)} es una relación de equivalencia porque es reflexiva, simétrica y transitiva en A.

Ejemplo.- Sea Z = conjunto de los números enteros y la relación R definida sobre Z en R = {(x,y) ∈ Z x Z / x – y = 3m, m ∈ Z} es una relación de equivalencia. En efecto:

① R es reflexiva porque: a – a = 0 = 0.3 ∀ a ∈ Z es decir: (a,a) ∈ R, ∀ a ∈ Z

② R es simétrica porque: Sí a – b = m.3 ⇒ b – a = -(a – b) = (-m).3

∀ a,b ∈ Z ⇒ (a,b) ∈ R ⇒ (b,a) ∈ R ,

③ R es transitiva porque: Sí a – b = m.3 y b – c = m'.3 entonces

a – c = (a – b) + (b – c) = m.3 + m'.3

a – c = (m + m')3 ⇒ a – c =m.3, ∀ a,b,c ∈ Z

es decir: (a.b) ∈ R ∧ (b,c) ∈ R ⇒ (a,c) ∈ R, ∀ a,b,c ∈ Z.

Por lo tanto R es una relación de equivalencia.

d) DETERMINACION DE UNA RELACION BINARIA.

Teniendo en cuenta que una relación es un conjunto de pares ordenados, entonces a una relación determinaremos por extensión o por compresión.

1ra. Por Extensión.-

Una relación queda determinada por extensión cuando se menciona cada uno de los pares ordenados de la relación.

Ejemplos.-

a) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$, $R_2 = \{(a,b),(c,d),(e,f)\}$

b) Si A = {2,3,6,9} y B = {1,4,5,6,12}

Expresa por extensión cada una de las relaciones:

① R = {(x,y) ∈ A x B / y = 2x}

Solución

R = {(2,4),(3,6),(6,12)}

② R = {(x,y) ∈ A x B / x + y = 12}

Solución

R = {6,6}

2da. Por Comprensión.-

Una relación queda determinada por comprensión cuando se da una propiedad que caracteriza a todos los pares ordenados que conforman la relación.

Ejemplos.-

a) Si A = Z conjunto de los números enteros la relación R={(x,y)∈Zx Z / y = x} es una relación expresada por comprensión.

b) Si U = {x ∈ N / x ≤ 7}. Determinar por comprensión la relación:

R = {(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),(7,5)}

Solución

Se observa que la diferencia entre la primera componente y la segunda componente es dos unidades por lo tanto expresaremos por comprensión:

$$R = \{(x,y) \in U \times U \,/\, x - y = 2\}$$

e) RELACION INVERSA.-

Si $R \subset A \times B$ es una relación de A en B; entonces a la relación inversa de R lo denotaremos por R^{-1} y está definido por:

$$R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \,/\, (x,y) \in R\}$$

Ejemplo.- Sí R= $\{(3,2),(3,1),(4,2),(4,5),(6,8)\} \Rightarrow R^{-1} = \{(2,3),(1,3),(2,4),(5,4),(8,6)\}$

Ejemplo.- Hallar la inversa de las siguientes relaciones.

a) $R = \{(x,y) \in R \times R \,/\, x + 3y = 12\}$

Solución

Para determinar la inversa de una relación se despeja x, es decir: $x = 12 - 3y$

Luego se permuta x por y es decir: $y = 12 - 3x$

$$\therefore\ R^{-1} = \{(x,y) \in RxR \,/\, y = 12 - 3x\}$$

b) $R = \{(x,y) \in R \times R \,/\, 3x + 4y = 5 \ \wedge\ 1 \le x \le 7\}$

Solución

Primeramente despejamos x de $3x + 4y = 5$ es decir: $x = \dfrac{5-4y}{3}$, $1 \le x \le 7$

Ahora veremos como va variando y; como $1 \le x \le 7 \Rightarrow 1 \le \dfrac{5-4y}{3} \le 7$

$3 \le 5 - 4y \le 21 \Rightarrow -4 \le y \le \dfrac{1}{2}$

Luego $x = \dfrac{5-4y}{3}$, $-4 \le y \le \dfrac{1}{2}$, por lo tanto al permutar x por y se tiene:

$$y = \frac{5-4x}{3}, \quad -4 \le x \le \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; R^{-1} = \{(x,y) \in R\,x\,R \,/\, y = \frac{5-4x}{3},\; -4 \le x \le \frac{1}{2}\}$$

2.3. GRAFICA DE UNA RELACION DE R EN R.-

a) Definición.- Llamaremos gráfica de una relación de R en R al conjunto de puntos P(x,y) cuyas coordenadas satisfagan a dicha relación, teniendo en cuenta que una relación puede estar expresada en una de las formas:

$$E(x,y) = 0 \;\vee\; E(x,y) < 0 \;\vee\; E(x,y) > 0 \;\vee\; E(x,y) \le 0 \;\vee\; E(x,y) \ge 0.$$

b) Discusión de la Gráfica de una Relación.

Para trazar la gráfica de una relación dada por la ecuación E(x,y) = 0, daremos el siguiente criterio.

1ra. Determinación de las intersecciones con los ejes coordenados.

- **Intersección con el eje X:** $E(x,y) \cap$ eje $x = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = 0\} = P$

Es decir: para hallar el punto P de intersección con el eje X se hace y = 0 en la ecuación E(x,y) = 0, ósea que se resuelve la ecuación E(x,0) = 0

- **Intersección con el eje Y:** $E(x,y) \cap$ eje $y = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x = 0\} = Q$

Es decir: para hallar el punto Q de intercesión con el eje Y se hace x = 0 en la ecuación E(x,y) = 0, ósea que se resuelve la ecuación E(0,y) = 0.

2da. Determinación de la simetría con respecto a los ejes coordenados.

- **Simetría con respecto al eje X.**

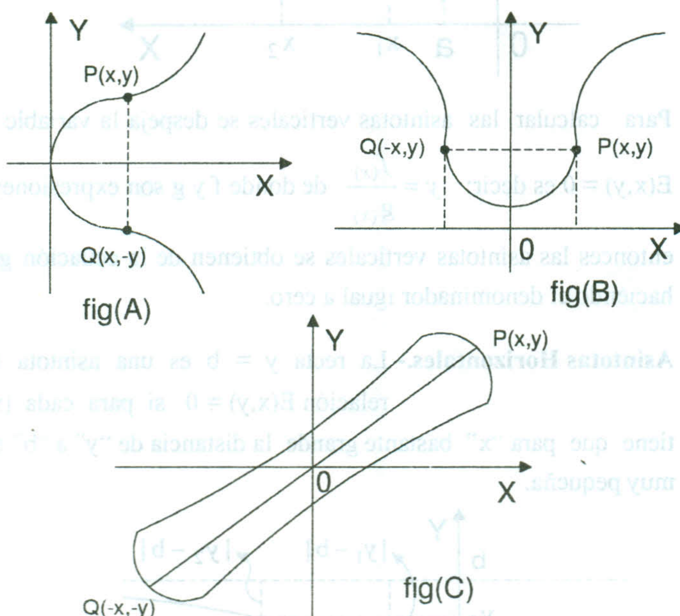
Existe simetría con respecto a eje X si se cumple E(x,y) = E(x,-y). Fig. (a)

- **Simetría con respecto al eje Y.**

  Existe simetría con respecto al eje Y si se cumple E(x,y) = E(-x,y) Fig. (b)

- **Simetría con respecto al origen.**

  Existe simetría con respecto al origen si se cumple E(x,y) = E(-x,-y). Fig. (c)



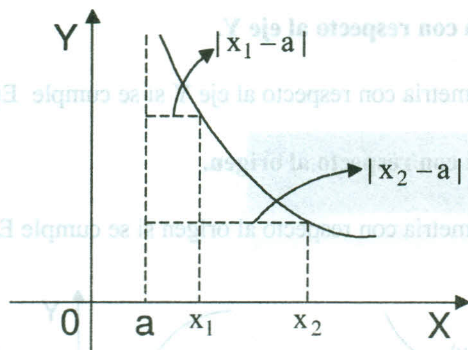
3ra. Determinación de la extensión de la curva.

Consiste en determinar el dominio y el rango de la relación.

4ta. Determinación de las Ecuaciones de las Asíntotas.

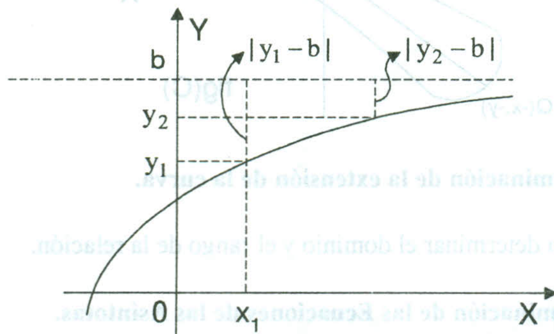
Trataremos solamente de las asíntotas verticales y horizontales.

- **Asíntotas Verticales.-** La recta x=a, es una asíntota vertical de la relación E(x,y) = 0, si para cada (x,y) ∈ E(x,y), se tiene que para "y" bastante grande la distancia de "x""a""a" es decir |x–a| es muy pequeño.



Para calcular las asíntotas verticales se despeja la variable y de la ecuación E(x,y) = 0 es decir: $y=\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$ de donde f y g son expresiones solamente de x, entonces las asíntotas verticales se obtienen de la ecuación g(x) = 0, es decir haciendo el denominador igual a cero.

- **Asíntotas Horizontales.-** La recta y = b es una asintota horizontal de la relación E(x,y) = 0 sí para cada (x,y) ∈ E(x,y) sé tiene que para "x" bastante grande la distancia de "y" a "b" es decir |y − b| es muy pequeña.



Para calcular las asíntotas horizontales se despeja la variable x de la ecuación E(x,y) = 0, es decir: $x=\frac{f_{(y)}}{g_{(y)}}$ donde f y g son expresiones solamente de y, entonces las asíntotas horizontales se obtienen de la ecuación g(y) = 0 es decir haciendo el denominador igual a cero.

5ta. Tabulación.

Consiste en calcular un número determinado de pares ordenados a partir de la ecuación $E(x,y) = 0$.

6ta. Trazado de la curva.- Mapeo de los pares ordenados.

OBSERVACION

(1) Diremos que el par (a,b) pertenece a la relación $E(x,y) = 0$ sí y solo sí $E(a,b) = 0$.

Ejemplo.- Discutir y graficar la relación: $R = \{(x,y) \in R \times R \,/\, xy - 2y - x = 0\}$

Solución

A la relación dada escribiremos en la forma: $R(x,y) = xy - 2y - x = 0$

1° Intersección con los ejes coordenados:

- Con el eje X; hacemos, $y = 0$; $R(x,0) = 0 - 0 - x = 0 \Rightarrow x = 0$

- Con el eje Y; hacemos, $x = 0$; $R(0,y) = 0 - 2y - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

2° Simetrías:

- Con respecto al eje X: $R(x,y) = R(x,-y)$

  pero $x(-y) - 2(-y) - x \neq xy - 2y - x$, por lo tanto no existe simetria con el eje X.

- Con respecto al eje Y: $R(x,y) = R(-x,y)$

  pero $xy - 2y - x \neq -xy - 2y + x$, por lo tanto no existe simetría con el eje Y.

- Con respecto al origen: $R(x,y) = R(-x,-y)$

  pero $xy - 2y - x \neq (-x)(-y) - 2(-y) - (-x)$, por lo tanto no existe simetria con el origen.

3° Extensión:

- Calculamos el dominio, para esto despejamos y es decir: $y = \dfrac{x}{x-2}$.

  Luego $D_R = R - \{2\}$

- Calculamos el rango, para esto despejamos x es decir: $x=\dfrac{2y}{y-1}$

Luego $R_R = R-\{1\}$

4° Asíntotas:

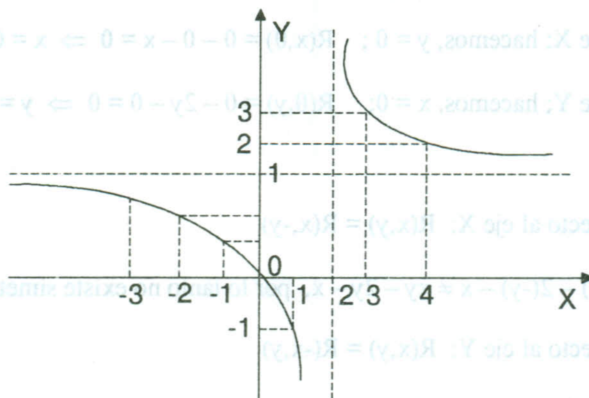
- **Asíntota Vertical:** se despeja y: $y=\dfrac{x}{x-2}$ la ecuación de la asíntota vertical es x=2

- **Asíntota horizontal:** se despeja x:

$x=\dfrac{2y}{y-1}$, la ecuación de la asíntota horizontal es y = 1.

5° Tabulación:

X	0	1	3	4	-1	-2
Y	0	-1	3	2	0.3	0.5



2.4. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Hallar el dominio y rango de la relación: $R=\{(x,y)\in RxR \,/\, xy^2-x+3y^2+1=0\}$

Solución

Calculando el dominio de la relación R, para esto despejamos y de la ecuación

$$xy^2-x+3y^2+1=0 \;\Rightarrow\; (x+3)y^2=x-1 \;\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$$

Analizando los valores que pueda tomar x para que y sea real, en este caso debe cumplirse: $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$.



Luego $D_R = < -\infty, -3 > U[1, +\infty >$

Ahora calculamos el rango de la relación R.

Para esto despejamos x de la ecuación: $xy^2 - x + 3y^2 + 1 = 0$

$$x(y^2 - 1) = -3y^2 - 1 \Rightarrow x = -\frac{3y^2 + 1}{y^2 - 1}$$

Luego los valores que puede tomar y para x sea real es que y ≠ ± 1

Por lo tanto $R_R = R - \{-1,1\}$

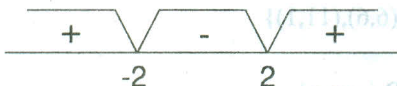
(2) Hallar el dominio y el rango de la relación: $R = \{(x, y) \in R \, x \, R \, / \, x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0\}$

Solución

Sea $x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$ **... (1)**

Para calcular el dominio de la ecuación (1) despejamos $y = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{x^2 - 4}}$

Ahora analizaremos los valores que pueda tomar x para que y sea real, en este caso debe cumplir: $\frac{x^2}{x^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)(x-2)} \geq 0$



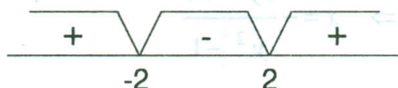
La solución es x ∈ <-∞,-2> U <2,+∞>

Para x = 0 también se verifica. Por lo tanto: $D_R = < -\infty, -2 > U < 2, +\infty > U \{0\}$

Ahora calculamos el rango de la relación para esto despejamos x de la ecuación (1)

$x = \pm\sqrt{\dfrac{4y^2}{y^2-4}}$, analizando los valores que pueda tomar y para que x sea real, en este caso se tiene $\dfrac{4y^2}{y^2-4} \geq 0$

$\forall$ y $\in$ R, $y^2 \geq 0 \Rightarrow$ y = 0 se cumple, $\dfrac{4y^2}{y^2-4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{(y-2)(y+2)} \geq 0$



La solución es y $\in$ <-∞,-2> U <2,+∞>

Por lo tanto: $R_R = <-\infty,-2> U <2,+\infty> U\{0\}$

(3) Sí A = {2,3,6,9,11} y B = {1,4,5,6,12,14}

Expresar por extensión cada una de las siguientes relaciones:

a) R = {(x,y) $\in$ R A x B / y = 3x}

Solución

R = {(2,6)}

b) R = {(x,y) $\in$ A x B / x + y = 12}

Solución

R = {(6,6),(11,1)}

c) R = {(x,y) $\in$ A x B / y = x}

Solución

R = {(6,6)}

(4) Si el universo es U = {1,2,3,4,5} determinar por comprensión cada una de las relaciones:

a) R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)}

Solución

R = {(x,y) ∈ U x U / y = x}

b) R = {(3,1),(4,2),(5,3)}

Solución

R = {(x,y) ∈ U x U / y = x - 2}

(5) La relación R = {(x,y) ∈ Z x Z / x – y = 2k, k ∈ Z}. Es una relación de equivalencia

Solución

a) Reflexiva: Si x = y ⇒ y – x = 0

⇒ x – x = 2(0), 0 ∈ Z

Luego ∀ (x,x) ∈ R ∴ R es reflexiva.

b) Simetría: Como x – y = 2k, multiplicando por –1 se tiene: y – x = 2(-k), -k ∈ Z

Luego (y,x) ∈ R ∴ R es simétrica

c) Transitiva: Sí (x,y) ∈ R ⇒ $x - y = 2k_1$, $k_1 \in Z$

(y,z) ∈ R ⇒ $y - z = 2k_2$, $k_2 \in Z$

$x - z = 2(k_1 + k_2)$, $k_1 + k_2 \in Z$

Luego (x,z) ∈ R ∴ R es transitiva. Por lo tanto R es de equivalencia.

(6) La relación R definida por: R = {(x,y) ∈ R x R / |x – y| ≤ 4}, R es de equivalencia.

Solución

a) Reflexiva: ∀ x ∈ R, |x – x| = 0 ≤ 4 ⇒ (x,x) ∈ R ∴ R es reflexiva

b) Simétrica: (x,y) ∈ R ⟹ |x − y| ≤ 4

⟹ |y − x| ≤ 4 ⟹ (y,x) ∈ R ∴ R es simétrica.

c) R no es transitiva: para esto tomemos dos pares ordenados

(7,4) ∈ R ⟹ |7 − 4| = 3 ≤ 4

(4,1) ∈ R ⟹ |4 − 1| = 3 ≤ 4

(7,1) ∈ R ⟹ |7 − 1| = 6 ≰ 4, luego R no es transitiva.

Por lo tanto R no es de equivalencia.

⑦ Determinar sí la relación: $R=\{(x,y)/\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\ x,y\in R^{+}\}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Solución

a) Reflexiva: Sí $x\in R^{+}\ \Rightarrow\ \sqrt{x}+\sqrt{x}\neq 1,\ x\neq\frac{1}{4}$.

Luego (x,x) ∉ R ⟹ R no es reflexiva.

b) Simétrica: Sí (x,y) ∈ R ⟹ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

$\sqrt{y}+\sqrt{x}=1\ \Rightarrow$ (y,x) ∈ R

Por lo tanto R es simétrica.

c) Transitiva: Sí (x,y) ∈ R entonces: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

(y,z) ∈ R entonces $\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$

$$\sqrt{x}+\sqrt{z}=2(1-\sqrt{y})\neq 1$$

⟹ (x,z) ∉ R, por lo tanto no es transitiva.

(8) Discutir y graficar la relación: $R=\{(x,y)\in RxR\,/\,x^2y-4y+x=0\}$

Solución

La relación dada también se escribe así: $R(x,y)=x^2y-4y+x=0$

Ahora haremos la discusión correspondiente:

1ra. Intersección con los ejes coordenados

- Con el eje X, hacemos y = 0; R(x,0) = 0 – 0 + x = 0 $\Rightarrow$ x = 0

- Con el eje Y, hacemos x = 0; R(0,y) = 0 – 4y + 0 = 0 $\Rightarrow$ y = 0

2da. Simetrías

- Con respecto al eje X: R(x,y) = R(x,-y).

  Pero $x^2(-y)-4(-y)+x\neq x^2y-4y+x$, por lo tanto no existe simetría en el eje X.

- Con respecto al eje Y: R(x,y) = R(-x,y)

  Pero $x^2y-4y+x\neq(-x)^2y-4y-x$, por lo tanto no existe simetría con el eje Y.

- Con respecto al origen: R(x,y) = R(-x,-y)

  $x^2y-4y+x=(-x)^2-4(-y)-x$, por lo tanto si existe en el origen.

3ra. Extensión.

- Calculamos el dominio, para esto despejamos y, $y=\dfrac{-x}{x^2-4}$

  el dominio es: R = {-2,2}

- Calculamos el rango, para esto despejamos x

  $x^2y-4y+x=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+16y^2}}{2y}$; y≠ 0

  el rango es todos los reales R, puesto que y = 0, x = 0, la ecuación se verifica.

4ta. Asíntotas

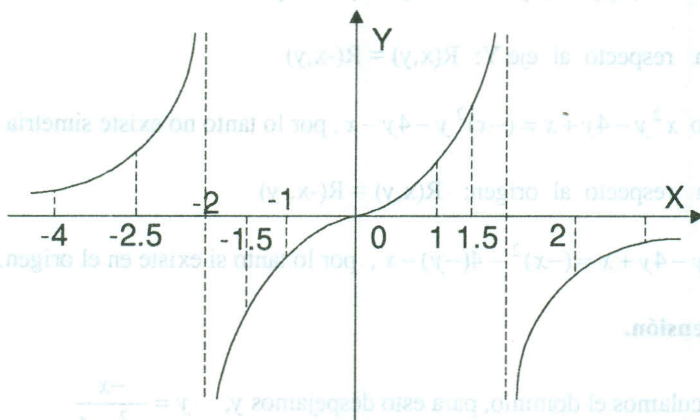
- Asíntotas Verticales: se despeja y, $y = \frac{-x}{x^2 - 4}$, las ecuaciones de las asíntotas verticales se obtienen de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ de donde x = -2, x = +2 es decir: x = ± 2 son las asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales, se despeja x, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16y^2}}{2y}$

La ecuación de la asintota horizontal es y = 0

5ta. Tabulación.

x	-4	-2.5	-1.5	-1	0	1	1.5	2.5	4
y	0.3	1.1	-0.9	-0.3	0	0.3	0.9	1.1	-0.3



(9) Discutir y graficar la relación: $R = \{(x, y) \in RxR / x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0\}$

Solución

A la relación dada escribiremos en la forma: $R(x, y) = x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$

Ahora haremos la discusión correspondiente.

1ra. Intersecciones con los ejes coordenados.

- Con el eje X, hacemos y = 0 de donde $R(x,0) = 0 - 4x^2 - 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

- Con el eje Y, hacemos x = 0 de donde $R(0,y) = 0 - 0 - 4y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

2da. Simetrías:

- Con respecto al eje X: R(x,y) = R(x,-y)

  Como $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = x^2(-y)^2 - 4x^2 - 4(-y)^2$

  Por lo tanto existe simetría en el eje X.

- Con respecto al eje Y: R(x,y) = R(-x,y)

  Como $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = (-x)^2y^2 - 4(-x)^2 - 4y^2$

  Por lo tanto existe simetría en el eje Y.

- Con respecto al origen: R(x,y) = R(-x,-y)

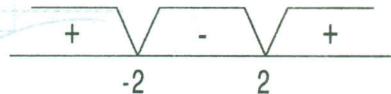
  Como $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = (-x)^2(-y)^2 - 4(-x)^2 - 4(-y)^2$

  Por lo tanto existe simetría en el origen.

3ra. Extensión.

- Calculamos el dominio para esto despejamos y, $y = \pm\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2-4}}$

y es real sí $\dfrac{4x^2}{x^2-4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{(x-2)(x+2)} \geq 0$



x ∈ <-∞,-2> U <2,+∞> por lo tanto $\therefore D_R = <-\infty,-2> U <2,+\infty> U\{0\}$

- Calculamos el rango, para esto despejamos x, $x = \pm\sqrt{\dfrac{4y^2}{y^2-4}}$

x es real si $\frac{4y^2}{y^2-4} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(y-2)(y+2)} \geq 0$

+ - +
-2 2

$y \in <-\infty,-2> U <2,+\infty>$. Por lo tanto $\therefore\ R_R = <-\infty,-2> U <2,+\infty> U\{0\}$

4ta. Asintotas.

- **Asintotas verticales:** se despeja $y = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{x^2-4}}$

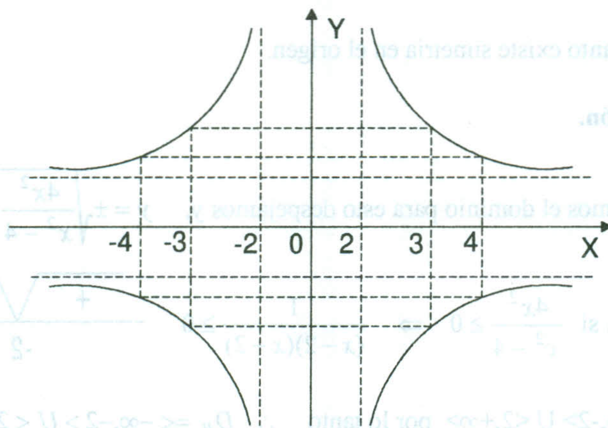
Las asintotas verticales se obtiene de la ecuación $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

- **Asintotas horizontales:** se despeja $x = \pm\sqrt{\frac{4y^2}{y^2-4}}$

Las asintotas horizontales se obtienen de la ecuación $y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

5ta. Tabulación.

x	± 3	± 4	0
y	$\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}$	$\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$	0



(10) Discutir y graficar la relación. $R = \{(x,y) \in RxR \,/\, yx^2 - 4y - x^2 = 0\}$

Solución

A la relación dada escribiremos en la forma: $R(x,y) = yx^2 - 4y - x^2 = 0$

Ahora haremos la discusión correspondiente

1ra. Intersección con los ejes coordenados.

- Con el eje X, hacemos y = 0, de donde $R(x,0) = 0 - 0 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

- Con el eje Y, hacemos x = 0, de donde $R(0,y) = 0 - 4y - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

2da. Simetrías

- Con respecto al eje X: R(x,y) = R(x,-y)

  pero $yx^2 - 4y - x^2 \neq -yx^2 - 4(-y) - x^2$

  por lo tanto no existe simetría en el eje X.

- Con respecto al eje Y: R(x,y) = R(-x,y)

  como $yx^2 - 4y - x^2 = y(-x)^2 - 4y - (-x)^2$

  por lo tanto existe simetría en el eje Y.

- Con respecto al origen: R(x,y) = R(-x,-y)

  pero $yx^2 - 4y - x^2 \neq -y(-x)^2 - 4(-y) - (-x)^2$

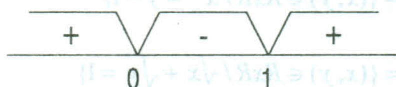
  por lo tanto no existe simetría en el origen.

3ra. Extensión.

- Calculamos el dominio, para esto despejamos y de donde $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$, y es real si $x \neq \pm 2$, luego entonces $\therefore D_R = R - \{-2,2\}$

- Calculamos el rango, para esto despejamos x., $x = \pm\sqrt{\frac{4y}{y-1}}$

  x es real sí: $\frac{4y}{y-1} \geq 0$



$y \in \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $\therefore$ $R_R = \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, +\infty \rangle$

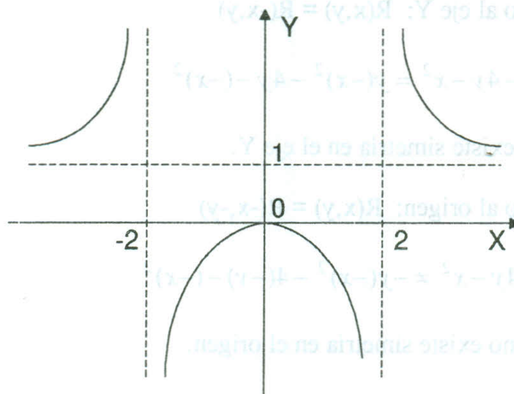
4ta. Asintotas

- **Asintotas verticales,** se despeja y, $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$, las asintotas verticales se obtienen de la ecuación $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

- **Asintotas horizontales,** se despeja x, $x = \pm\sqrt{\dfrac{4y}{y-1}}$, las asintotas horizontales se obtienen de la ecuación $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$.

5ta. Tabulación.

x	0	±1	±1.5	±2.5	±3
y	0	-0.3	-1.2	2.7	1.8



2.5. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Hallar el dominio y rango de las relaciones.

a) $R = \{(x, y) \in RxR / y = x^2 - 4x,\ y \le 0\}$

b) $R = \{(x, y) \in RxR / y = \sqrt{4 - x^2}\}$

c) $R = \{(x, y) \in RxR / x^2 = y - 1\}$

d) R = {(x,y) ∈ RxR / xy–2y–x=0}

e) $R = \{(x, y) \in RxR / \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1\}$

f) $R = \{(x, y) \in RxR / x^2 y^2 + xy = 5\}$

g) $R=\{(x,y)\in RxR \,/\, y=\dfrac{1}{2x^2-3x-5}\}$ **h)** $R=\{(x,y)\in RxR \,/(x^2-4)y=y^2\}$

i) $R=\{(x,y)\in RxR \,/\, x^2y^2-2x+y^2-4=0\}$

j) $R=\{(x,y)\in RxR \,/(x^2-6x+5)y^2=4y-1\}$

(2) Sí $U=\{x\in Z^+ \,/\, x$ impar Λ $x\le 8\}$. Tabular las siguientes relaciones en U

a) $R = \{(x,y) \in U \times U / x = 3 \lor y = 5\}$ **b)** $R = \{(x,y) \in U \times U / x + y = 8\}$

c) $R = \{(x,y) \in U \times U / xy = 21\}$ **d)** $R=\{(x,y)\in U \times U$ / x divide a $20\}$

(3) En el conjunto de los naturales N se define una relación R de la siguiente forma:

$R=\{(x,y)\in NxN \,/\, x^2+x=y^2+y\}$

es decir si es una relación de equivalencia, justifique su respuesta.

(4) En R se define las siguientes relaciones, $\forall$ x,y $\in$ R

a) $R = \{(x,y) \in R \times R / |x-1| = |y-1|\}$ **b)** $R=\{(x,y)\in RxR \,/\, x^2-x=y^2-y\}$.

Demostrar que son relaciones de equivalencia.

(5) Siendo A = {1,2,3,4,5,6} estudiar las propiedades de las relaciones binarias.

a) $R = \{(x,y) \in A \times A / x + y > 0\}$ **b)** $R = \{(x,y) \in A \times A / x - y < 2\}$

c) $R = \{(x,y) \in A \times A / x \le y\}$

Rpta. a y c es de equivalencia, b) es reflexiva

(6) En A = {1,2,3,4} se considera la relación $R = \{(x,y) \in A \times A / x = y \lor x + y = 3\}$

Es de equivalencia. **Rpta.** Si

(7) En Z define la relación R: $R=\{(x,y)\in ZxZ \,/\, x^2+x=y^2+y\}$. Graficar R.

(8) Clasificar la relación R definida en Z x Z mediante $(a,b)R(a',b') \iff ab'=ba'$

Rpta. R es de equivalencia.

(9) Definimos en el conjunto Z x (Z – 0) la siguiente relación (a,b) R (c,d) $\Leftrightarrow$ ad = bc

Es una relación de equivalencia **Rpta.** R es una relación de equivalencia

(10) Demostrar que la relación dada por: R = {(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)}

En el conjunto A = {a,b,c,d} es una relación de equivalencia.

(11) Discutir y graficar las relaciones siguientes:

a) $xy^2 - 3y^2 - 1 = 0$ **b)** $y^2(x^2 - 4) = x + 2$

c) $y^2 = \dfrac{x^2}{3-x}$ **d)** $y = \dfrac{1}{2x^2 - 3x - 5}$

e) $x^2y^2 - x^2 + y^2 + 1 = 0$ **f)** $x^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 = 0$

g) $xy - 2x - y - 2 = 0$ **h)** $y^2(x+1) = 4$

(12) Discutir y graficar las relaciones siguientes:

a) $xy^2 + xy - 6x - 3 = 0$ **b)** $y = \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{x^2}$

c) $y^2 = \dfrac{4x^2}{x^2 - 4}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 5x + 2}$

e) $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ **f)** $y = \dfrac{x(x+3)}{(x+2)(x-2)}$

g) $yx^2 - 25y - x = 0$ **h)** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$

(13) Discutir y graficar las relaciones siguientes:

a) $y = \dfrac{x^2 - 25}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{4x - 5}{2(x^2 - 1)}$

c) $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$ **d)** $xy^2 - 4x^2 - 3y^2 + 12x = 0$

(14) Discutir y graficar la relación R definida por: $R = \{(x,y) \in RxR / y = \frac{(2x-1)^2 - \ldots}{x^2-7x+1 \ldots}\}$

2.6. FUNCIONES.-

Se va a introducir el concepto de función, hablando libremente una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla (procedimiento o mecanismo) que nos transporta de un conjunto a otro de manera que asociamos cada elemento A un único elemento en B.

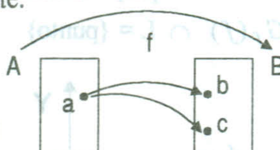
a) DEFINICION.- Consideremos dos conjuntos cualquiera A y B, a la relación binaria f de A en B le llamaremos función de A en B, si y solo si, verifica:

i) $f \subseteq A \times B$

ii) $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$

esto quiere decir, que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Gráficamente:



f es función, sí b = c

Observaciones:

(1) Una función f de A en B denotaremos por: f: A ⟶ B; ó $A \xrightarrow{f} B$ y se lee "f es una función de A en B", donde el conjunto A le llamaremos conjunto de partida y el conjunto B le llamaremos conjunto de llegada.

(2) Si el par $(a,b) \in f$, escribiremos b = f(a) y se dice que b es la imagen de "a" por f ó también, que b = f(a) es el valor de f en el punto a.

(3) Sí A = B = R, a la función f: R ⟶ R, se denomina función real de variable real.

(4) Teniendo en cuenta la parte 2) se tiene la siguiente notación:

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x,y) \in f$$

donde y = f(x) se lee "y es función de x" ó "y es la imagen de x por f".

(x,y) ∈ f se lee "el par (x,y) pertenece a f".

Ejemplo.- f(1) = 3 ⇔ (1,3) ∈ f

(5) De la parte 4), a la función f se puede escribir en la forma:

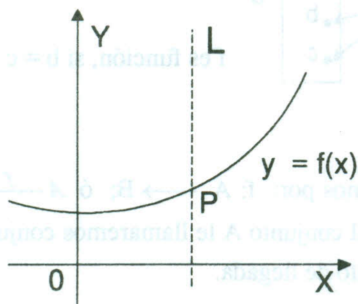
$$f = \{(x,y) \in R \times R \, / \, y = f(x)\}$$

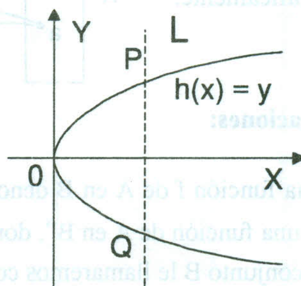
donde la ecuación y = f(x) es llamada regla de correspondencia.

Observación: Una consecuencia inmediata de la definición a), es que toda función es una relación pero no toda relación es una función.

Ejemplo.- La relación: R = {(1,2),(2,3),(3,4),(2,5)} no es una función, puesto que para el elemento 2 existen dos elementos 3 y 5 tales que (2,3),(2,5) ∈ R, que contradice a la definición de función.

b) DEFINICION GEOMETRICA.- f es una función ⇔ cualquier recta perpendicular al eje X corta a la gráfica de f en un solo punto. Es decir: $G_f(f) \cap L = \{punto\}$





$G_1(f) \cap L = \{p\}$, $G_2(h) \cap L = \{P,Q\}$

f es función ⇒ h no es función

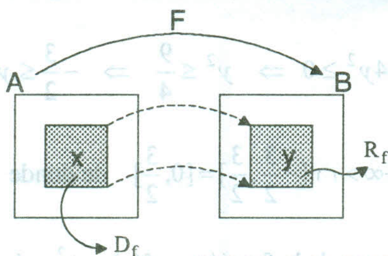
2.7. DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION.-

Sea f: A ⟶ B una función de A en B, llamaremos dominio de la función f, al conjunto de todas sus primeras componentes, al cual denotaremos por D_f, es decir:

$$D_f = \{x \in A / \exists\ y \in B \ \wedge\ (x,y) \in f\} \subseteq A$$

y llamaremos rango de la función f al conjunto de las imágenes de todos los elementos de A, mediante f al cual denotaremos por R_f es decir:

$$R_f = \{y \in B / \exists\ x \in A \ \wedge\ (x,y) \in f\} \subseteq B$$



Ejemplo.- Sea f = {(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)} su dominio y rango es: $D_f = \{1,3,5,7\}$; $R_f = \{2,4,6,8\}$

2.8. CRITERIO PARA EL CALCULO DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION.

El dominio de una función f se determina analizando todos los valores posibles que pueda tomar x, de tal manera que f(x) sea real, salvo el caso en que dicho dominio sea especificado.

El rango de una función f se determina despejando la variable x en función de "y", luego se analiza todos los valores posibles que pueda tomar "y", de tal manera que x sea real.

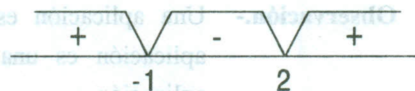
Ejemplo.- Hallar el dominio y rango de la función $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$

Solución

Calculando el dominio: como y = f(x,) entonces:

$y = \sqrt{2 + x - x^2}$ luego "y" es real si, $2 + x - x^2 \geq 0$, de donde

$x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \leq 0$



Luego el dominio es: $\therefore D_f = [-1,2]$

Calculando el rango: como $y = \sqrt{2+x-x^2}$, $y \geq 0$

$y^2 = 2 + x - x^2$, despejamos x, es decir: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-4y^2}}{2}$

Luego x es real si $9 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \dfrac{9}{4} \Rightarrow -\dfrac{3}{2} \leq y \leq \dfrac{3}{2}$

Por lo tanto $R_f = [0,+\infty> \cap [-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}] = [0,\dfrac{3}{2}]$ de donde $\therefore R_f = [0,\dfrac{3}{2}]$

Ejemplo.- Hallar el rango de la función: $f(x) = x^2 - 4x + 7$, $x \in [2,3]$

Solución

En este caso el dominio esta especificado $x \in [2,3]$ ahora calculando el rango: como $y = f(x) = x^2 - 4x + 7$. Despejamos x es decir: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4y-12}}{2} = 2 \pm \sqrt{y-3}$

$x = 2 \pm \sqrt{y-3} \in [2,3] \Rightarrow 2 \leq 2 \pm \sqrt{y-3} \leq 3$

$0 \leq \pm\sqrt{y-3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{y-3} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y - 3 \leq 1$

$3 \leq y \leq 4 \Rightarrow y \in [3,4]$ por lo tanto $\therefore R_f = [3,4]$

2.9. APLICACIONES DE A EN B.-

A una función f, le llamaremos aplicación de A en B, si y solo si: $D_f = A$.

En forma simbólica: Un conjunto $f \subseteq A \times B$ es una aplicación de A en B $\Leftrightarrow \forall x \in A$, $\exists y \in B$, tal que $y = f(x)$.

Observación.- Una aplicación es un caso particular de una función, luego toda aplicación es una función, pero toda función no siempre es una aplicación.

Nota.- Algunos autores consideran a la función y aplicaciones como sinónimos, en estos apuntes, a las aplicaciones las consideraremos como casos particulares de las funciones.

Ejemplo.- Sean A = {1,3,5}, B = {2,4,6}, calculando A x B

A x B = {(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)}

a) El conjunto f = {(1,4),(3,2)} es función donde $D_f = \{1,3\}$ y $R_f = \{4,2\}$ pero f no es una aplicación de A en B puesto que $D_f \neq A$.

b) El conjunto f={(1,2),(3,4),(5,6)} es una función donde: $D_f = \{1,3,5\}$ y $R_f = \{2,4,6\}$ como $D_f = A$ entonces f es una aplicación de A en B.

2.10. FUNCIONES ESPECIALES.-

① **FUNCION CONSTANTE.-** A la función f, le llamaremos función constante, si su regla de correspondencia es:

f(x) = c, donde c es una constante.

También a la función constante, se puede definir por:

f = {(x,y) ∈ R x R / y = c, c constante}

donde su dominio es $D_f = R$, su rango es $R_f = \{c\}$ y su gráfica es:

Y
c
f(x) = c
0
X

② **FUNCION IDENTIDAD.-** A la función f, le llamaremos función identidad, si su regla de correspondencia es:

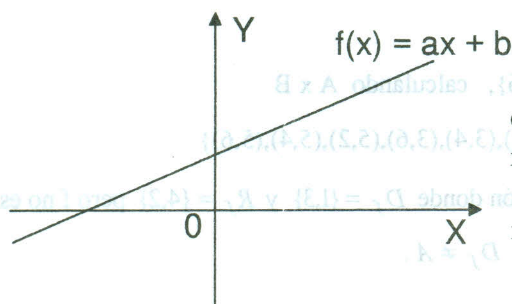
f(x) = x

También a la función identidad se define:

f = {(x,y) ∈ R x R / y = x}, donde $D_f = R$, $R_f = R$ y su gráfica es:

Y
f(x) = x
0
X

③ FUNCION LINEAL.- A la función f, le llamaremos función lineal, si su regla de correspondencia es:

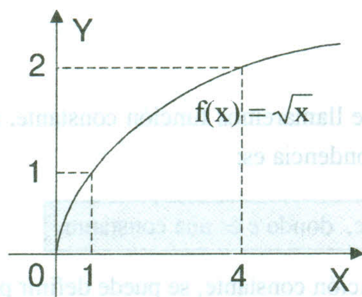


$$f(x) = ax + b$$

donde a,b son constantes y a ≠ 0. También a la función lineal se puede expresar en la forma:

f = {(x,y)∈Rx R / y = ax + b}, donde $D_f = R$ y $R_f = R$; a,b ∈ R y a ≠ 0, cuya gráfica es:

④ FUNCION RAIZ CUADRADA.- A la función f, le llamaremos función raíz cuadrada, si su regla de correspondencia es:



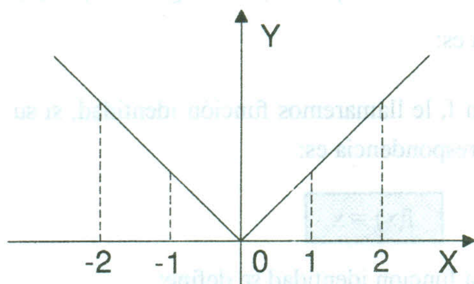
$$f(x) = \sqrt{x}$$

También se puede expresar en la forma:

$$f = \{(x,y) \in RxR \,/\, y = \sqrt{x}\}$$

donde $D_f = R^+$ y $R_f = [0,+\infty>$

⑤ FUNCION VALOR ABSOLUTO.- A la función f, le llamaremos función valor absoluto, si su regla de correspondencia es:



$$f(x) = |x|, \text{ donde } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

También se puede expresar en la forma:

$$f = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = |x|\}$$

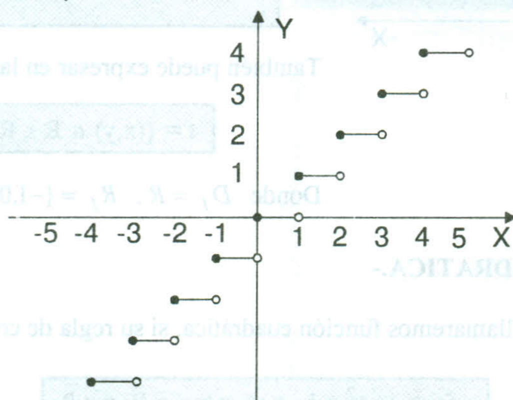
Donde $D_f = R$ y $R_f = [0,+\infty>$ y su gráfica es:

⑥ FUNCION MAXIMO ENTERO.- A la función f, le llamaremos función máximo entero, si su regla de correspondencia es:

$$f(x)=[|x|] \quad \text{donde } [|x|]=n \iff n\le x<n+1,\ n\in Z$$

También se puede expresar en la forma: $f=\{(x,y)\in RxR\,/\,y=[|x|]\}$

donde $D_f=R$ y $R_f=Z$



Si $x\in[0,1> \iff f(x)=[|x|]=0 \Rightarrow$ f(x) = 0

Si $x\in[1,2> \iff f(x)=[|x|]=1 \Rightarrow$ f(x) = 1

Si $x\in[2,3> \iff f(x)=[|x|]=2 \Rightarrow$ f(x) = 2

Si $x\in[3,4> \iff f(x)=[|x|]=3 \Rightarrow$ f(x) = 3

.   .   .

.   .   .

.   .   .

Si $x\in[-1,0> \iff f(x)=[|x|]=-1 \Rightarrow$ f(x) = -1

Si $x\in[-2,-1> \iff f(x)=[|x|]=-2 \Rightarrow$ f(x) = -2

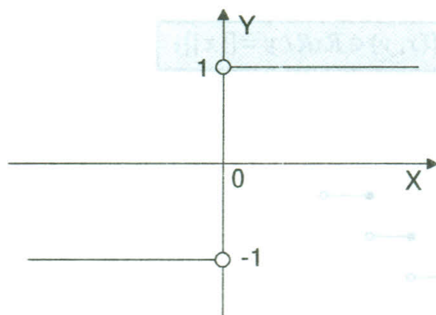
Si $x\in[-3,-2> \iff f(x)=[|x|]=-3 \Rightarrow$ f(x) = -3

.   .   .

.   .   .

.   .   .

(7) **FUNCION SIGNO.-** A la función f, le llamaremos función signo, si su regla de correspondencia es:



$$f(x) = sig(x), \text{ donde } sig(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

También puede expresar en la forma:

$$f = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = sig(x)\}$$

Donde $D_f = R$, $R_f = \{-1,0,1\}$ y su gráfica es:

(8) **FUNCION CUADRATICA.-**

A la función f, le llamaremos función cuadrática, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a,b,c \in R,\ a \neq 0$$

También a la ecuación cuadrática se expresa así:

$$f = \{(x,y) \in RxR \,/\, y = ax^2 + bx + c,\ a,b,c \in R,\ a \neq 0\}$$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con eje perpendicular al eje X en el cual se presenta dos casos.

Si a > 0 la gráfica se abre hacia arriba.

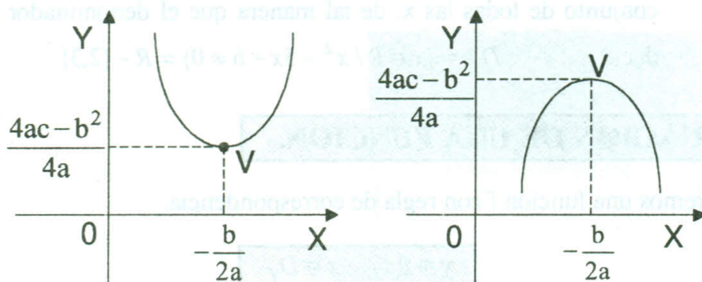
Si a < 0 la gráfica se abre hacia abajo.

El dominio de la función cuadrática es: $D_f = R$, El rango se determina completando cuadrados.

Como $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a}$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Luego el vértice de la parábola es: $V(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$



Si a > 0 se tiene:

$D_f = R$

$R_f = [\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty >$

Si a < 0, se tiene:

$D_f = R$

$R_f = <-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$

⑨ FUNCION POLINOMIAL.-

A la función f, le llamaremos función polinomial, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 , \ x \in R$$

donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ son números reales, $a_n \neq 0$.

Ejemplo.- $f(x) = 5x^5 + 7x^4 + 3x + 6$, es una función polinomial.

⑩ FUNCIÓN RACIONAL.-

A la función f, le llamaremos función racional, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} ; \ n, m \in Z^+$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$, $b_0, b_1, ..., b_m$ son constantes reales y $b_m \neq 0$

Ejemplo.- La función $f(x)=\dfrac{x^2+5x-17}{x^2-5x+6}$, es una función racional cuyo dominio es el conjunto de todas las x, de tal manera que el denominador no se anule, es decir: $D_f=\{x\in R\,/\,x^2-5x+6\neq 0\}=R-\{2,3\}$

2.11. EVALUACION DE UNA FUNCION.-

Consideremos una función f con regla de correspondencia.

$$y = f(x),\quad x\in D_f$$

Si x toma valores específicos, por ejemplo: $x=x_0$, entonces $y_0=f(x_0)$ se dice que la función ha sido evaluada, en otras palabras es:

Cuando $x=x_0$ el valor de la función es $f(x_0)$

Ejemplo.- Si $f(x)=2x^3+x^2+x+2$, el valor de f en el punto x = 2 es f(2) es decir:

$$f(2)=2(2)^3+(2)^2+2+2=16+4+2+2=24$$

Ejemplo.- Si $f(x)=x^2+x+1$ entonces $f(z)=z^2+z+1$

$$f(\sqrt{y})=y+\sqrt{y}+1$$

Ejemplo.- Si $f(x)=5^x$, probar que f(x + y) = f(x).f(y)

Solución

$$f(x+y)=5^{x+y}=5^x.5^y=f(x).f(y)$$

$\therefore$ f(x + y) = f(x).f(y)

2.12. FUNCIONES DEFINIDAS CON VARIAS REGLAS DE CORRESPONDENCIA.

En las funciones definidas con dos o mas reglas de correspondencia, su dominio y rango se determinan de la siguiente forma:

Suponiendo que la función f es definida por:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in D_{f_1} \\ f_2(x), & x\in D_{f_2} \end{cases}, \text{ donde } D_{f_1}\cap D_{f_2}=\phi$$

el dominio de f(x) se determinan así: $D_f = D_{f_1}\cup D_{f_2}$

el rango de la función f(x) se calcula por: $R_f = R_{f_1}\cup R_{f_2}$

Esta forma de calcular dominio y rango de una función con dos reglas de correspondencia, también se extiende a funciones de tres o mas reglas de correspondencia.

Ejemplo.- Calcular el dominio y rango de la función: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ \ x\geq 1 \\ x^2-2 & si\ \ x<0 \end{cases}$

Solución

Calculando su dominio se tiene: $\begin{cases} f_1(x)=2x+1, & si\ \ x\geq 1 \\ f_2(x)=x^2-2, & si\ \ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{f_1}=[1,+\infty> \\ D_{f_2}=<-\infty,0> \end{cases}$

Luego su dominio de f(x) es: $D_f = D_{f_1}\cup D_{f_2} = [1,+\infty>\cup<-\infty,0>$

$$\therefore\ D_f = <-\infty,0>\cup[1,+\infty>$$

Ahora calcularemos el rango:

Si $x\geq 1 \Rightarrow y=2x+1$ despejamos x: $x=\frac{y-1}{2}\geq 1 \Rightarrow y\geq 3$ de donde: $y\in[3,+\infty>$

Si $x<0 \Rightarrow y=x^2-2$, despejando x se tiene: $x=-\sqrt{y+2}<0 \Rightarrow \sqrt{y+2}>0 \Rightarrow y>-2$

de donde: $y\in<-2,+\infty>$

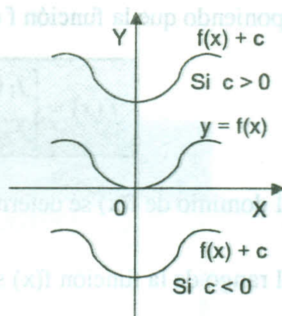
Luego el rango de la función f es dada por: $R_f = <-2,+\infty>\cup[3,+\infty> = <-2,+\infty>$

2.13. TRAZADO DE GRAFICOS ESPECIALES.-

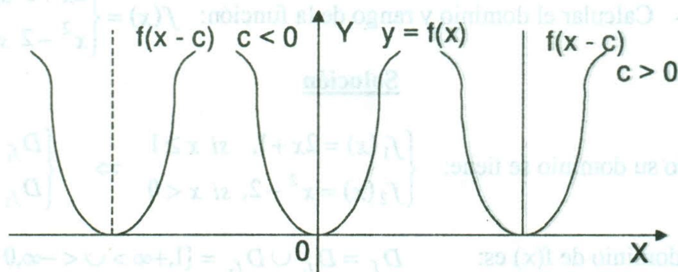
Cuando se conoce una función y = f(x), en base a esta función, se puede construir otra función en una forma rápida mediante el siguiente criterio:

1er. Si se tiene la gráfica de y = f(x) entonces la gráfica de la función:

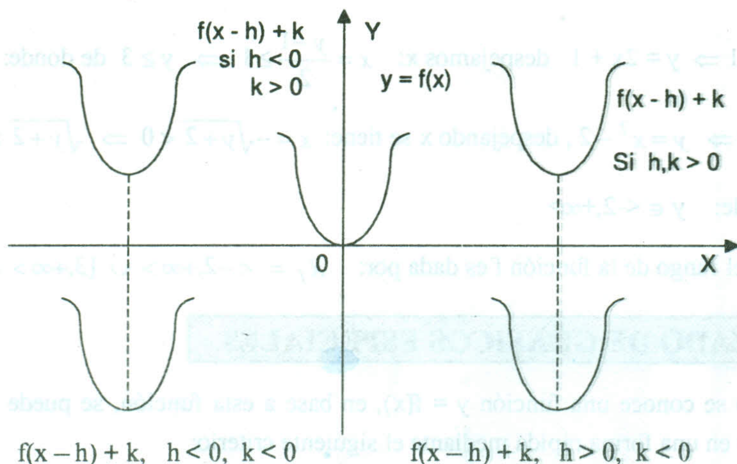
F(x) = f(x) + c se obtiene desplazando verticalmente la gráfica de y = f(x) en c unidades, siendo hacia arriba si c > 0 y hacia abajo si c < 0.



2do. Si se tiene la gráfica de y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = f(x – c) se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica de y = f(x) en c unidades, siendo hacia la derecha si c > 0 y hacia la izquierda si c < 0.



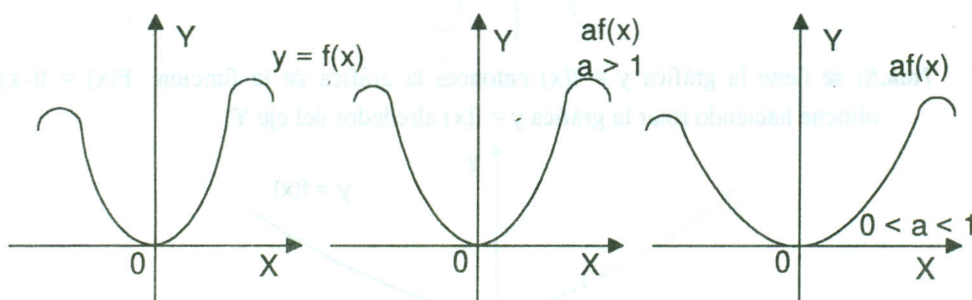
3er. Si se tiene la gráfica de y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = f(x – h) + k se obtiene desplazando horizontal y verticalmente la gráfica y = f(x) en h y k unidades respectivamente.



4ta. Si se tiene la gráfica y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = af(x), a > 0 se obtiene de la siguiente manera:

i) Si a > 1 la gráfica esta estirándose verticalmente en un factor a en base al eje X.

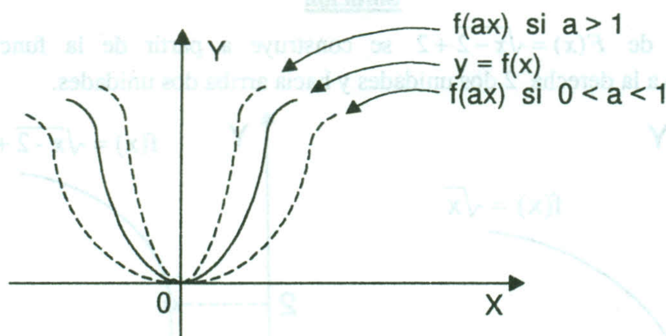
ii) Si 0 < a < 1, la gráfica esta encogiéndose verticalmente en su factor a.



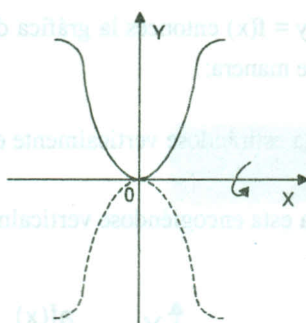
5ta. Si se tiene y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = f(ax), a > 0 se obtiene de la siguiente manera:

i) Si a > 1, la gráfica se encoge horizontalmente en un factor a en base al eje Y.

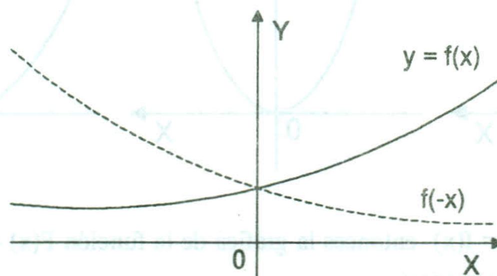
ii) Si 0 < a < 1, la gráfica se estira horizontalmente en un factor a en base al eje Y.



6ta. Si se tiene la gráfica y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = -f(x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje X.



7ma. Si se tiene la gráfica y = f(x) entonces la gráfica de la función F(x) = f(-x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje Y.

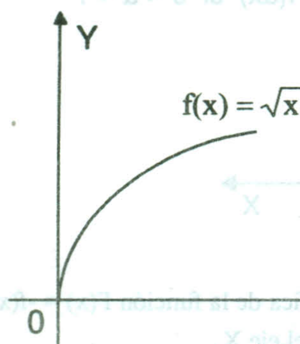


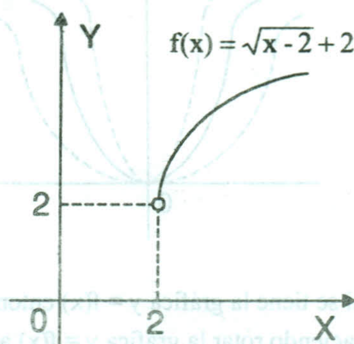
8va. Si se tiene la gráfica y = f (x) entonces la gráfica de la función F(x) = -f(-x) se obtiene haciendo rotar la gráfica y = f(x) alrededor del eje X y el eje Y.

Ejemplo.- Graficar la función $F(x)=\sqrt{x-2}+2$

Solución

La gráfica de $F(x)=\sqrt{x-2}+2$ se construye a partir de la función $f(x)=\sqrt{x}$, trasladando a la derecha 2 dos unidades y hacia arriba dos unidades.

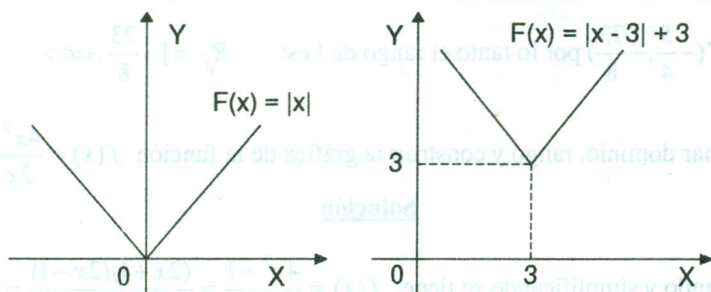




Ejemplo.- Graficar la función F(x) = |x – 3| +3

Solución

La gráfica de F(x) = |x – 3| + 3 se construye a partir de la función f(x) = |x| , trasladando a la derecha 3 unidades y hacia arriba 3 unidades.



2.14. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Determinar el dominio y rango de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Solución

Como $y=f(x)=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y=\sqrt{x^2-1}$. Luego analizamos los valores que x puede tomar para que "y" sea real, y como $y=\sqrt{x^2-1}$ entonces "y" es real si $x^2-1\geq 0$ $\Rightarrow x^2\geq 1 \Rightarrow x\leq -1 \lor x\geq 1$ por lo tanto el dominio es: $D_f=<-\infty,-1]\cup[1,\infty>$

Ahora calculamos el rango, y para esto despejamos x $y=\sqrt{x^2-1}, y\geq 0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y^2+1}$, Luego analizamos los valores que "y" puede tomar para que x sea real y como $x=\pm\sqrt{y^2+1}$ entonces x es real $\forall y \in R$.

Por lo tanto el rango de f es : $R_f=[0,+\infty> \cap R=[0,+\infty>$

② Calcular el rango de $f(x)=2x^2+5x-6$

Solución

Como $y = f(x) \Rightarrow y = 2x^2 + 5x - 6$ es una función cuadrática en estos casos el rango se determina completando cuadrados:

$$y + 6 = 2(x^2 + \frac{5}{2}x\frac{25}{16}) - \frac{25}{8} \quad \text{de donde} \quad y + \frac{73}{8} = 2(x + \frac{5}{4})^2$$

Luego $V(-\frac{5}{4}, -\frac{73}{8})$ por lo tanto el rango de f es: $R_f = [-\frac{73}{8}, +\infty>$

③ Determinar dominio, rango y construir la gráfica de la función $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

Solución

Factorizando y simplificando se tiene: $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} = \frac{(2x + 1)(2x - 1)}{2x + 1} = 2x - 1, x \neq -\frac{1}{2}$

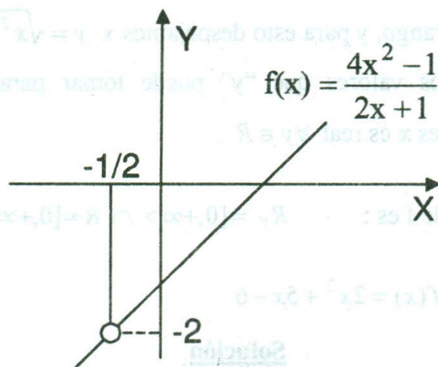
Luego como f(x) = 2x-1 , $x \neq -1/2$ su dominio es: $D_f = R - \{-\frac{1}{2}\}$

Ahora calculando el rango, para esto despejamos x: $y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2}$

como $x \in <-\infty, -\frac{1}{2}> \cup <-\frac{1}{2}, \infty>$ entonces $\frac{y + 1}{2} \in <-\infty, -\frac{1}{2}> \cup <-\frac{1}{2}, \infty>$

$-\infty < \frac{y + 1}{2} < -\frac{1}{2}$ v $-\frac{1}{2} < \frac{y + 1}{2} < \infty$ entonces $-\infty < y < -2$ v $-2 < y < \infty$

Por lo tanto $R_f = <-\infty, -2> \cup <-2, \infty>$

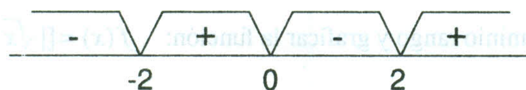


(4) Determinar el dominio y rango de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2-4}}$

Solución

La función f(x) está bien definida si:

$\dfrac{2x}{x^2-4}\geq 0$ entonces $\dfrac{x}{(x+2)(x-2)}\geq 0$, ahora resolvemos la inecuación.



Luego $D_f = \langle -2,0] \cup \langle 2,+\infty \rangle$

Para determinar el rango despejamos x, como y = f(x)

Entonces $y=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2-4}}$, $y\geq 0 \Rightarrow y^2=\dfrac{2x}{x^2-4}$ de donde $y^2x^2-2x-4y^2=0$, $y\geq 0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16y^4}}{2y^2}$, $y\geq 0$,racionalizando $x=\dfrac{-16y^4}{2y^2(2+\sqrt{4+16y^4})}=\dfrac{-8y^2}{2+\sqrt{4+16y^4}}$, $y\geq 0$

x es real si y solo si y $\in$R. Luego $R_f=[0,+\infty\rangle \wedge R=[0,+\infty\rangle$

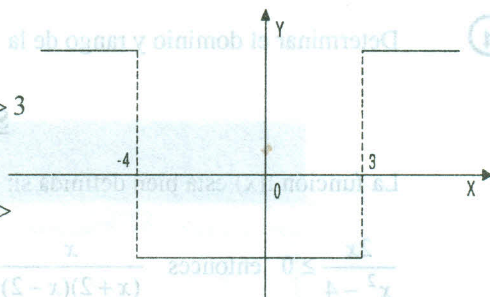
(5) Determinar dominio, rango y graficar la función: $f(x)=sig(\dfrac{x-3}{x+4})$

Solución

Aplicando la definición de la función signo se tiene:

$$f(x)=sig(\frac{x-3}{x+4})=\begin{cases} -1 \text{ si } \dfrac{x-3}{x+4}<0 \\ 0 \text{ si } \dfrac{x-3}{x+4}=0 \\ 1 \text{ si } \dfrac{x-3}{x+4}>0 \end{cases}$$, al resolver cada una de las inecuaciones se tiene:

$$f(x)=sig(\frac{x-3}{x+4})=\begin{cases}-1, & \text{si } -4<x<3\\ 0, & \text{si } \ x=3\\ 1, & \text{si } \ x<-4 \ \text{v} \ x>3\end{cases}$$



Su dominio es: $D_f = <-\infty,-4> \cup <-4,\infty>$

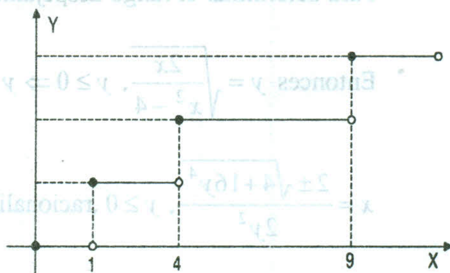
Su rango es $R_f = \{-1,0,1\}$

(6) Determinar el dominio rango y graficar la función: $f(x)=[|\sqrt{x}|]$

Solución

Calculando su dominio se tiene: f(x) está definida si $x \geq 0$, luego $D_f = [0,\infty>$

Por lo tanto su rango es: $R_f = Z_0^+ = \{0,1,2,...\}$



Sí $[|\sqrt{x}|]=0 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$

Si $[|\sqrt{x}|]=1 \ \Rightarrow \ 1 \leq \sqrt{x} < 2 \ \Rightarrow \ 1 \leq x < 4$

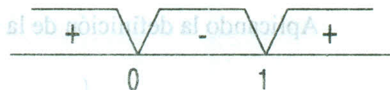
Si $[|\sqrt{x}|]=2 \ \Rightarrow \ 2 \leq \sqrt{x} < 3 \ \Rightarrow \ 4 \leq x < 9$

(7) Determinar el dominio y graficar la función: f(x) = |x| + |x – 1|

Solución

Por definición del valor absoluto se tiene:

$$|x|=\begin{cases} x \ si \ x \geq 0\\ -x \ si \ x<0\end{cases}, \quad |x-1|=\begin{cases} x-1 & si \ x \geq 1\\ -x+1 & si \ x<1\end{cases}$$



Ahora calculando las reglas de correspondencia de f(x)

Si $x<0 \Rightarrow |x|=-x, \quad |x-1|=1-x$

como $f(x)=|x|+|x-1| \Rightarrow f(x)=-x+1-x=1-2x$; para x < 0

Si $0 \le x < 1 \Rightarrow |x| = x, \quad |x-1| = 1-x$

Como $f(x) = |x| + |x-1| = x + 1 - x = 1 \Rightarrow f(x) = 1$, para $0 \le x < 1$

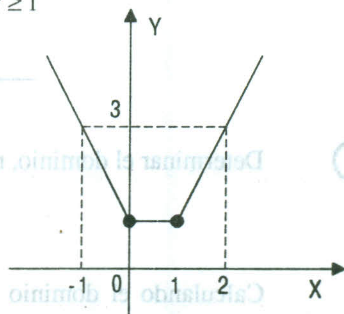
Si $x \ge 1 \Rightarrow |x| = x, \quad |x-1| = x-1$

Como $f(x) = |x| + |x-1| = x + x - 1 = 2x - 1 \Rightarrow f(x) = 2x-1$, para $x \ge 1$

Luego la función toma la forma: $f(x) = \begin{cases} 1-2x & si\ x < 0 \\ 1 & si\ 0 \le x < 1 \\ 2x-1 & si\ x \ge 1 \end{cases}$

Su dominio $D_f = R$, y su rango es $R_f = [1,+\infty>$

El gráfico es como se muestra en la figura:



(8) Determinar el dominio, rango y graficar la función:

$$f(x) = \begin{cases} [|\,x\,|] & si\ [|\,x\,|]\ es\ \ par \\ 2x - [|\,x+1\,|] & si\ [|\,x\,|]\ es\ \ impar \end{cases}$$

Solución

Si x ∈ [0,1> ⇒ $[|\,x\,|] = 0$ es par ⇒ f(x) = 0

Si x ∈ [1,2> ⇒ $[|\,x\,|] = 1$ es impar ⇒ f(x) = 2x - 2

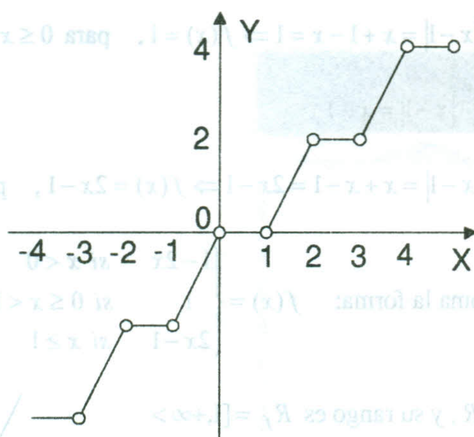
Si x ∈ [2,3> ⇒ $[|\,x\,|] = 2$ es par ⇒ f(x) = 2

Si x ∈ [3,4> ⇒ $[|\,x\,|] = 3$ es impar ⇒ f(x) = 2x - 4

Si x ∈ [-1,0> ⇒ $[|\,x\,|] = -1$ es impar ⇒ f(x) = 2x

Si x ∈ [-2,-1> ⇒ $[|\,x\,|] = -2$ es par ⇒ f(x) = -2

Si x ∈ [-3,-2> $\Rightarrow$ $[|x|]=-3$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = 2x + 2



(9) Determinar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=\sqrt{x-[|x|]}$

Solución

Calculando el dominio de la función f es decir: f(x), está definida si $x-[|x|]\geq 0$ de donde $x\geq [|x|]$ que por definición de máximo entero se cumple ∀x∈R. Luego $D_f=R$

Como $[|x|]=\text{n} \Leftrightarrow \text{n}\leq x<\text{n}+1,\ \text{n}\in Z$

Entonces $f(x)=\sqrt{x-\text{n}}$, ∀ x ∈[n , n+1>, n ∈ Z

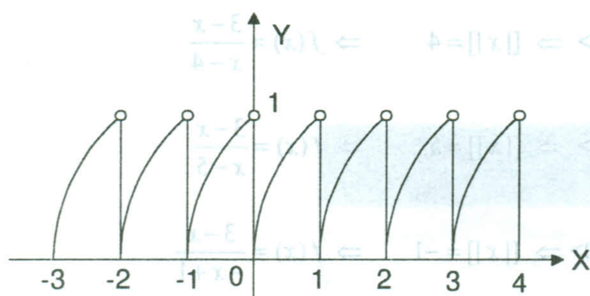
Si x ∈ [0,1> $\Rightarrow$ $[|x|]=0$ $\Rightarrow$ $f(x)=\sqrt{x}$

x ∈ [2,3> $\Rightarrow$ $[|x|]=1$ $\Rightarrow$ $f(x)=\sqrt{x-1}$

x ∈ [2,3> $\Rightarrow$ $[|x|]=2$ $\Rightarrow$ $f(x)=\sqrt{x-2}$

x ∈ [-1,0> $\Rightarrow$ $[|x|]=-1$ $\Rightarrow$ $f(x)=\sqrt{x+1}$

x ∈ [-2,-1> $\Rightarrow$ $[|x|]=-2$ $\Rightarrow$ $f(x)=\sqrt{x+2}$



Luego el rango es: $R_f = [0,1>$

(10) Hallar dominio, rango y graficar la función f definida por $f(x) = \dfrac{3-x}{|x| - [|x|]}$

Solución

Calculando el dominio de la función, es decir:

f(x) es definida si $x - [|x|] \neq 0$ es decir: $D_f = R - \{x / |x| - [|x|] = 0\}$

Como $|x| = [|x|] \Rightarrow$ x ∈ N puesto que |x| ≥ 0. Por lo tanto $D_f = R - N$

Como $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$, analizamos en la forma

Si $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x - [|x|]}$

$x \in [0,1> \Rightarrow [|x|] = 0 \quad \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x} = \dfrac{3}{x} - 1$

$x \in [1,2> \Rightarrow [|x|] = 1 \quad \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$

$x \in [2,3> \Rightarrow [|x|] = 2 \quad \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$

$x \in [3,4> \Rightarrow [|x|] = 3 \quad \Rightarrow f(x) = \dfrac{3-x}{x-3} = -1$

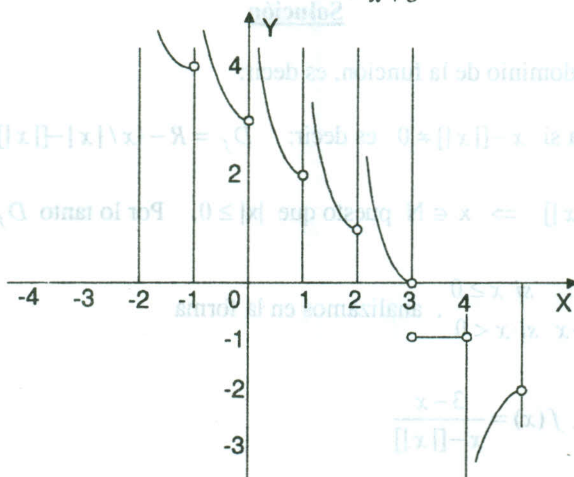
$x \in [4,5> \Rightarrow [|x|]=4 \quad \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x-4}$

$x \in [5,6> \Rightarrow [|x|]=5 \quad \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{x-5}$

$x \in [-1,0> \Rightarrow [|x|]=-1 \quad \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{-x+1}$

$x \in [-2,-1> \Rightarrow [|x|]=-2 \quad \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{-x+2}$

$x \in [-3,-2> \Rightarrow [|x|]=-3 \quad \Rightarrow f(x)=\dfrac{3-x}{-x+3}$



Luego el rango es : $R_f = <-\infty,-2> \cup \{-1\} \cup <0,+\infty>$

(11) Determinar el rango y graficar la función definida por

$f(x)=[|\dfrac{7x-15}{x-1}|]+2x$, si x $\in$<-1,0>

Solución

Por la propiedad $[|x+n|]=n+[|x|]$, n $\in$ Z

$$f(x) = [|\frac{7x-15}{x-1}|] + 2x = [|\frac{7(x-1)}{x-1} - \frac{8}{x-1}|] = [|7 - \frac{8}{x-1}|] + 2x$$

$$f(x) = 7 + [|-\frac{8}{x-1}|] + 2x$$

Ahora definimos $[|-\frac{8}{x-1}|]$ es decir:

Como x $\in \langle -1,0 \rangle \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow -2 < x-1 < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -8 < \frac{8}{x-1} < -4 \Rightarrow 4 < -\frac{8}{x-1} < 8$$

$$\Rightarrow [|-\frac{8}{x-1}|] = 4, 5, 6, 7$$

Además $[|-\frac{8}{x-1}|] = n \Rightarrow n \leq -\frac{8}{x-1} < n+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < -\frac{x-1}{8} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{n+1} < -x+1 \leq \frac{8}{n}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{8}{n+1} < -x < 1 - \frac{8}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{n-8}{n} \leq x < \frac{n-7}{n+1}$$

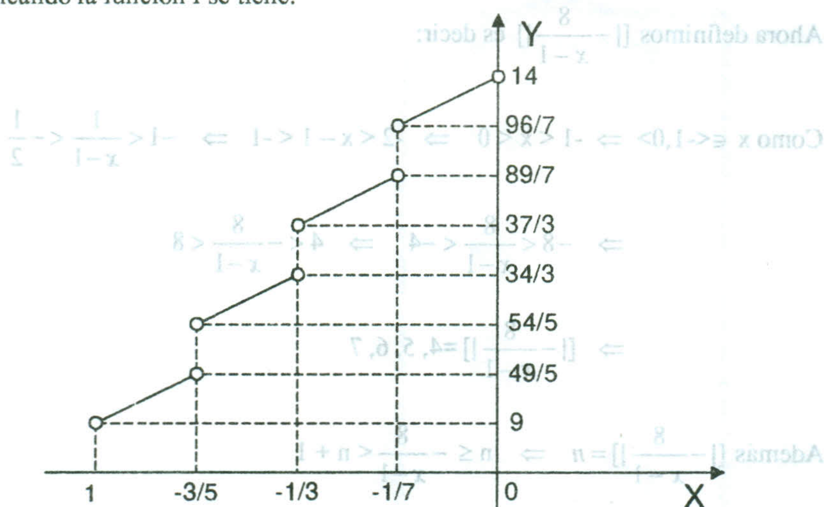
$x \in [\frac{n-8}{n}, \frac{n-7}{n}\rangle$ **entonces x $\in \langle -1,0 \rangle$ para n = 4, 5, 6, 7**

Luego f(x) = 7 + n + 2x, n = 4, 5, 6, 7

Ahora definimos f para cada valor de n

$$f(x)=\begin{cases} 2x+7+4=2x+11 & si \quad x\in <-1,-3/5> \\ 2x+7+5=2x+12 & si \quad x\in <-3/5,-1/3> \\ 2x+7+6=2x+13 & si \quad x\in [-1/3,-1/7> \\ 2x+7+7=2x+14 & si \quad x\in [-1/7,0> \end{cases}$$

Graficando la función f se tiene:



$$R_f = <9,\frac{49}{5}> \cup [\frac{54}{5},\frac{34}{3}> \cup [\frac{37}{3},\frac{89}{7}> \cup [\frac{96}{7},14>$$

(12) Hallar el dominio, rango y graficar la función f(x) definida por: $f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & \text{si } x\le 1 \\ 2+x^2, & \text{si } x>1 \end{cases}$

Solución

El dominio se determina en la forma siguiente: $D_f = <-\infty,1] \cup <1,+\infty> = R$

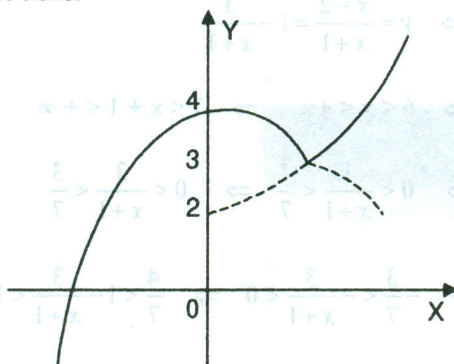
Ahora calculamos el rango:

Si $x \le 1 \Rightarrow y=4-x^2 \Rightarrow x^2=4-y$

$x^2 = -(y-4) \Rightarrow$ V(0, 4) de acuerdo al criterio de la función cuadrática.

Para $x > 1 \Rightarrow y=2+x^2$, de donde $y-2=x^2 \Rightarrow$ V(0, 2)

Ahora graficando se tiene:



Luego $R_f = <-\infty,4] \cup <3,+\infty> = R$

(13) Hallar el rango y graficar la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} x^2-x-12, & si\, x\in[-4,6] \\ \dfrac{x-2}{x+1}, & si\, x\in<6,+\infty> \end{cases}$

Solución

Calculando el rango de la función

Si $x\in[-4,6] \Rightarrow \quad y=x^2-x-12=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4}$

$x\in[-4,6] \Rightarrow -4\le x\le 6$

$\Rightarrow \quad -\frac{9}{2}\le x-\frac{1}{2}<\frac{11}{2}$

$\Rightarrow \quad 0\le (x-\frac{1}{2})^2<\frac{121}{4}$

$\Rightarrow \quad -\frac{49}{4}\le (x-\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4}<\frac{121}{4}-\frac{49}{4}$

$\Rightarrow -\frac{49}{4}\le (x-\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4}<18$

$\Rightarrow \quad -\frac{49}{4}\le y<18 \Rightarrow \quad y\in[-\frac{49}{4},18>$

Si x ∈ < 6, + ∞> $\Rightarrow\ y=\frac{x-2}{x+1}=1-\frac{3}{x+1}$

x ∈ <6, + ∞> $\Rightarrow\ 6<x<+\infty\ \Rightarrow\ 7<x+1<+\infty$

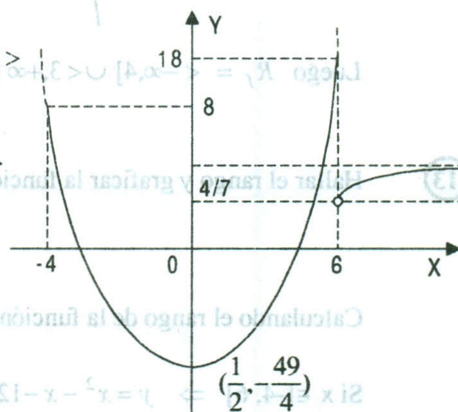
$\Rightarrow\ 0<\frac{1}{x+1}<\frac{1}{7}\ \Rightarrow\ 0<\frac{3}{x+1}<\frac{3}{7}$

$\Rightarrow\ -\frac{3}{7}<-\frac{3}{x+1}<0\ \Rightarrow\ \frac{4}{7}<1-\frac{3}{x+1}<1$

$\Rightarrow\ \frac{4}{7}<y<1\ \Rightarrow\ y\in<\frac{4}{7},1>$

Luego el rango es: $R_f=[-\frac{49}{4},18>\cup<\frac{4}{7},1>$

$\therefore\ R_f=[-\frac{49}{4},18>$



(14) Hallar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{|x+1|}$

Solución

Calculando el dominio de la función f(x) es decir, f(x) está definida si x ≠ -1

Luego el $D_f=R-\{-1\}$

Ahora a la función expresaremos en la forma:

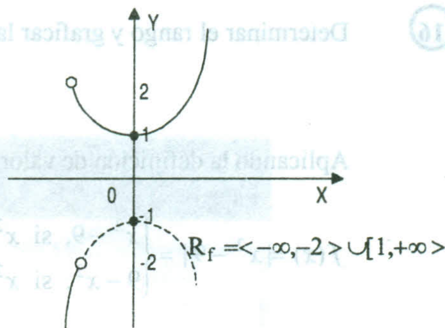
$$f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{|x+1|}=\frac{(x^2+1)(x+1)}{|x+1|},\ \text{como}\ |x+1|=\begin{cases}x+1, & \text{si } x\ge -1\\ -x-1, & \text{si } x<-1\end{cases}$$

Por lo tanto la función f(x) es dada por: $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & si\ x>-1\\ -x^2-1 & si\ x<-1\end{cases}$

Ahora graficando se tiene:

Si x > -1 $\Rightarrow y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2$, V(0,1)

x < -1 $\Rightarrow y = -x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = -x^2$, V(0,-1)



(15) Hallar el dominio, rango y graficar la función: $f(x) = [|x|] + \sqrt{x - [|x|]}$

Solución

La función f(x) está definida si $x - [|x|] \geq 0$

De donde $x \geq [|x|]$ es valida ∀ x ∈ R, luego $D_f = R$

Si x ∈ [0,1 > $\Rightarrow [|x|] = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

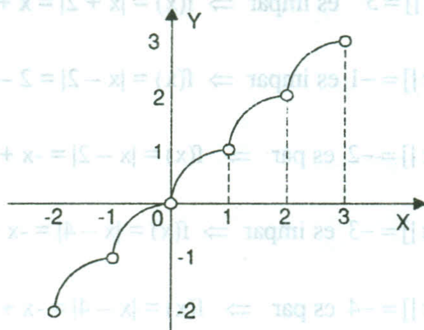
x ∈ [1,2 > $\Rightarrow [|x|] = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$

x ∈ [2,3 > $\Rightarrow [|x|] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + \sqrt{x-2}$

x ∈ [3,4 > $\Rightarrow [|x|] = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + \sqrt{x-3}$

x ∈ [-1,0 > $\Rightarrow [|x|] = -1 \Rightarrow f(x) = -1 + \sqrt{1+x}$

x ∈ [-2,-1> $\Rightarrow [|x|] = -2 \Rightarrow f(x) = -2 + \sqrt{2+x}$

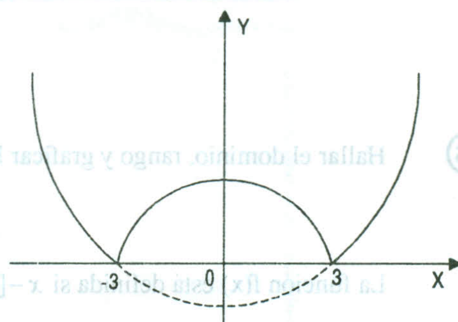


(16) Determinar el rango y graficar la función $f(x) = |x^2 - 9|$

Solución

Aplicando la definición de valor absoluto a la función f(x) expresamos:

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{si } x^2 \geq 9 \\ 9 - x^2, & \text{si } x^2 < 9 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{si } x \in <-\infty,-3] \cup [3,+\infty> \\ 9 - x^2, & \text{si } x \in <-3,3> \end{cases}$$

El rango de la función f(x) es $R_f = [0,+\infty>$

La gráfica es como se muestra en la figura

(17) Construir la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} |x + [|x|]| & si\ [|x|]\ es\ par \\ |x + [|x - 1|]| & si\ [|x|]\ es\ impar \end{cases}$

Solución

Si $x \in [0,1> \Rightarrow [|x|] = 0$ es par $\Rightarrow$ f(x) = |x| = x

$x \in [1,2> \Rightarrow [|x|] = 1$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = |x| = x

$x \in [2,3> \Rightarrow [|x|] = 2$ es par $\Rightarrow$ f(x) = |x + 2| = x + 2

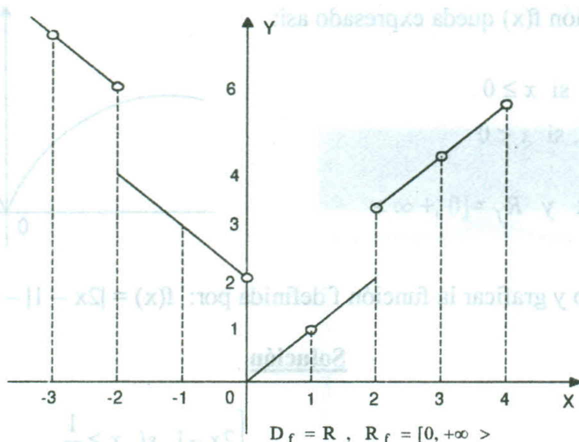
$x \in [3,4> \Rightarrow [|x|] = 3$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = |x + 2| = x + 2

$x \in [-1,0> \Rightarrow [|x|] = -1$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = |x – 2| = 2 – x

$x \in [-2,-1> \Rightarrow [|x|] = -2$ es par $\Rightarrow$ f(x) = |x – 2| = -x + 2

$x \in [-3,-2> \Rightarrow [|x|] = -3$ es impar $\Rightarrow$ f(x) = |x – 4| = -x + 4

$x \in [-4,-3> \Rightarrow [|x|] = -4$ es par $\Rightarrow$ f(x) = |x – 4| = -x + 4



(18) Hallar la gráfica de $f(x)=(x-[|x|])^2$

Solución

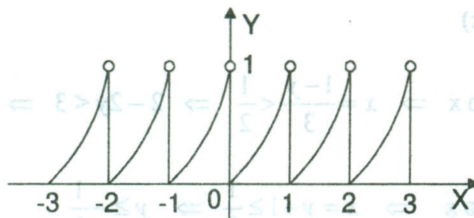
$x \in [0,1> \Rightarrow [|x|]=0 \Rightarrow f(x)=x^2$

$x \in [1,2> \Rightarrow [|x|]=1 \Rightarrow f(x)=(x-1)^2$

$x \in [2,3> \Rightarrow [|x|]=2 \Rightarrow f(x)=(x-2)^2$

$x \in [-1,0> \Rightarrow [|x|]=-1 \Rightarrow f(x)=(x+1)^2$

$x \in [-2,-1> \Rightarrow [|x|]=-2 \Rightarrow f(x)=(x+2)^2$



$D_f=R,\ R_f=[0,1>$

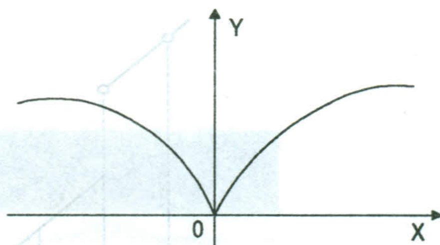
(19) Graficar la función $f(x)=\sqrt{|x|}$

Solución

Por definición $|x|=\begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x<0 \end{cases}$

Luego la función f(x) queda expresado así:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{si } x\geq 0\\ \sqrt{-x}, & \text{si } x<0\end{cases}$$



donde $D_f = R$ y $R_f = [0,+\infty>$

(20) Hallar el rango y graficar la función f definida por: $f(x) = |2x-1|-x$

Solución

Por definición de valor absoluto $|2x-1| = \begin{cases}2x-1 & si \quad x\geq \frac{1}{2}\\ 1-2x & si \quad x<\frac{1}{2}\end{cases}$

Sí $x<\frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 1-2x \Rightarrow f(x) = 1-3x$

$x\geq\frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 2x-1 \Rightarrow f(x) = x-1$

Ahora la función dada se expresa así: $f(x)=\begin{cases}1-3x & si \quad x<\frac{1}{2}\\ x-1 & si \quad x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$

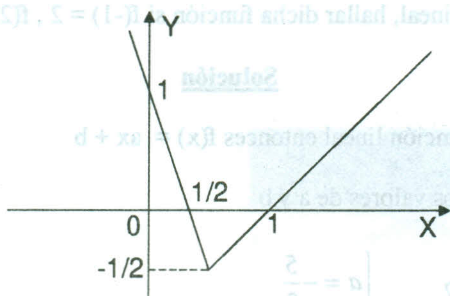
calculando el rango de la función f(x)

si $x<\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1-3x$, despejando x $\Rightarrow x=\frac{1-y}{3}<\frac{1}{2} \Rightarrow 2-2y<3 \Rightarrow y>-\frac{1}{2}$

Si $x\geq\frac{1}{2} \Rightarrow y = x-1$, despejando x $\Rightarrow x = y+1\geq\frac{1}{2} \Rightarrow y\geq-\frac{1}{2}$

Por lo tanto $R_f = <-\frac{1}{2},+\infty> \cup [-\frac{1}{2},+\infty> = [-\frac{1}{2},+\infty>$

Su gráfica es:



(21) Hallar el rango y graficar la función f(x) dado por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \text{ si } x\in[1,2> \\ [|x|]+\sqrt{x-[|x|]}, & \text{ si } x\in[-1,1> \\ \sqrt{-x} & , \text{ si } x\in[-4,-1> \end{cases}$$

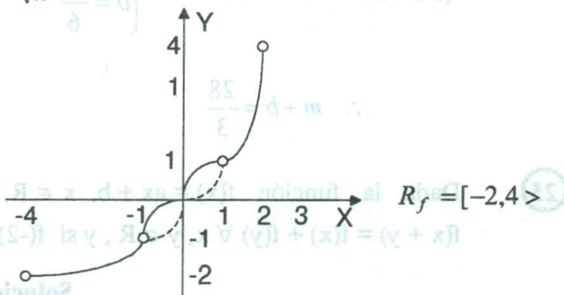
Solución

$x \in [-1,0> \Rightarrow [|x|]=-1 \Rightarrow f(x)=-1+\sqrt{x+1}$

$x \in [0,1> \Rightarrow [|x|]=0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$

Ahora expresaremos a la función:

$$f(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x} & , si\ \ x\in[-4,-1> \\ -1+\sqrt{x+1}, & si\ \ x\in[-1,0> \\ \sqrt{x} & , si\ \ x\in[0,1> \\ x^2 & , si\ \ x\in[1,2> \end{cases}$$



$R_f=[-2,4>$

Graficando cada parte de la función

(22) Si $f(x)=a^x$, Demostrar que f(x + y) = f(x) f(y)

Solución

Como $f(x)=a^2 \Rightarrow f(x+y)=a^{x+y}=a^x.\ a^y=f(x).f(y)$

$\therefore$ f(x + y) = f(x).f(y)

(23) La función f(x) es lineal, hallar dicha función sí f(-1) = 2 , f(2) = -3

Solución

Como f(x) es una función lineal entonces f(x) = ax + b

Ahora calculamos los valores de a y b

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b = 2 \\ f(2) = 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}, \text{ por lo tanto } \quad f(x) = \frac{-5x}{3} + \frac{1}{3}$$

(24) Dada la función f(x) = mx + b, ∀ x∈R, si se sabe que f(3) = 11, f(-3) = 6. Hallar m + b

Solución

Calculando los valores de m y b

$$\begin{cases} f(3) = 3m + b = 11 \\ f(-3) = -3m + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{5}{6} \\ b = \dfrac{51}{6} \end{cases}, \text{ entonces: } \quad m + b = \frac{5}{6} + \frac{51}{6} = \frac{56}{6} = \frac{28}{3}$$

$$\therefore \quad m + b = \frac{28}{3}$$

(25) Dada la función f(x) = ax + b, x ∈ R, donde a y b son constantes reales, sí f(x + y) = f(x) + f(y) ∀ x, y ∈ R , y sí f(-2) = -6. Hallar a y b

Solución

Como f(x + y) = f(x) + f(y)

a(x + y) + b = ax + b + ay + b

a(x + y) + b = a(x + y) + 2b ⇒ b = 0

Luego f(x) = ax + b ⇒ f(x) = ax

f(-2) = -2a = -6 ⇒ a = 3 $\therefore$ a = 3, b = 0

(26) Si $f(x+4) = x^2 + 3x$, Hallar f(a + 1)

Solución

Definiremos la función f(x) para esto se hace una sustitución $z = x + 4 \Rightarrow x = z - 4$

Ahora se sustituye en $f(x+4) = x^2 + 3x \Rightarrow f(z) = (z-4)^2 + 3(z-4) = z^2 - 5z + 4$

Luego la función f(x) es dado por: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Calculando f(a + 1) es decir: $f(a+1) = (a+1)^2 - 5(a+1) + 4 = a^2 - 3a - 4$

$$\therefore \quad f(a+1) = a^2 - 3a - 4$$

(27) Dado el polinomio $P(x) = x^3 + (a+1)x^2 + x$, se define la función f con dominio {0,1,2,3,5}, por f(a) = resto de la división de P(x) entre x + a , calcular f(2) + f(3)

Solución

Calculando el resto de la división de P(x) entre x + a

$$\begin{array}{l|l} x^3 + (a+1)x^2 + x & x + a \\ \hline -x^3 - ax^2 & \\ \hline \quad x^2 + x & \\ \quad -x^2 - ax & \\ \hline \quad\quad (1-a)x & \\ \quad\quad -(1-a)x - a(1-a) & \\ \hline \quad\quad\quad a^2 - a = \text{resto} & \end{array}$$

Como $f(a) = a^2 - a$

f(2) = 4 – 2 = 2

f(3) = 9 – 3 = 6

Luego f(2) + f(3) = 8

2.15. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Hallar el dominio de cada una de las funciones

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ **b)** $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$ d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}}$

e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+3x}}$ f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x^2-4)(x^2-9)}{-x^4+17x^2-16}}$

g) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ h) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$

i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$ j) $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$

k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4}{(x+1)^2}+\dfrac{x-3}{x+1}-49}$ l) $f(x)=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{\sqrt{21}-\sqrt{x^2-4}}}$

Rptas:

a) $D_f=<-\infty,1]\cup[3,+\infty>$ b) $D_f=[-1,1]$

c) $D_f=<-\infty,-2>\cup[0,2>$ d) $D_f=[1,2>\cup<3,\infty>$

e) $D_f=<-\infty,-3>\cup[-\frac{1}{2},0>\cup[1,+\infty>$ f) $D_f=[-3,3>-\{-1,\pm 2\}$

g) $D_f=<-1,1]\cup[2,3>$ h) $D_f=\phi$

i) $D_f=\phi$ j) $D_f=\{1\}$

k) $[-\frac{4}{3},-1>\cup<-1,-\frac{3}{4}]$ l) $<-5,-2]\cup[4,5>$

(2) Determinar el dominio, rango y graficar la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-9 & si\ \ x<4 \\ 5x-2 & si\ \ x\geq 4\end{cases}$

Rpta. $D_f=R$, $R_f=[-9,+\infty>$

(3) Hallar el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-[|x|]}$ b) $f(x)=\dfrac{x}{2x-[|x|]}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-[|x|]}$

d) $f(x)=[|\dfrac{1}{x}|]$ e) $f(x)=[|\dfrac{1}{x-3}|]$ f) $f(x)=[|x^2|]$

g) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$ h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x}{|x|-1}}$ i) $f(x)=\sqrt{x-x^3}$

j) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}$ k) $f(x)=1-\sqrt{8-x^2-2x}$

l) $f(x)=\sqrt[4]{x^2+4x-12}+\dfrac{3x^2}{\sqrt[4]{x+20-x^2}}$

(4) Determinar el dominio, rango y graficar cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<1 \\ -x^3 & si\ x\ge 1\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 3x-2 & si\ -4\le x\le 4 \\ x & si\ 4<x<6\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-2} & si\ x\ge 2 \\ x^2+2x-3 & si\ x\in<-1,1>\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si\ x<3 \\ 2x-1 & si\ x\ge 3\end{cases}$

(5) Hallar el dominio, rango y graficar la función:

a) $f(x)=\begin{cases} |x+2|-x & si\ x\in<-4,0> \\ \sqrt{4-x} & si\ x\in<0,4> \\ 2x-8 & si\ x\in<4,\infty>\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ 4<x\le 7 \\ |x| & si\ x\le 4\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2[|x|]+2 & si\ -5\le x\le 1 \\ \sqrt{x} & si\ 1<x\le 4 \\ 6 & si\ -7<x<-5\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} [|x-1|] & si\ 4\le x<7 \\ \sqrt{|x|} & si\ x<4\end{cases}$

e) $f(x)=|x-1|+|x+1|$ f) $f(x)=(x^2+4)[|2x+3|]$

g) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}+2, & si\ -2<x\leq 2\\ [|x|] & si\ \ x<2\\ 2 & si\ \ x<-2\end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases}[|2x|] & si\ \ x\in[0,3]\\ 2[|x|] & si\ \ x\in<3,5]\end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}2[|x|] & si\ \ x\in<-5,1]\\ \sqrt{x} & si\ \ x\in<1,4]\\ x^2+3 & si\ \ x\in<-7,-5]\end{cases}$ j) $f(x)=\begin{cases}|x+3| & si\ \ x<0\\ 2(x-1)^2 & si\ \ x\in[0,1>\\ 2-|x-4| & si\ \ x\in[2,+\infty>\end{cases}$

(6) Hallar dominio, rango y graficar cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x) = |x + 1| + |x - 1| - 2|x|$ b) $f(x)=[|x|]-|x|$

c) $f(x) = |x + 2| + |2x - 2| + |-x + 5|$ d) $f(x) = |x|\,|x - 1|$

e) $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$ f) $f(x) = |x + 2| + |x - 2| - |x| - 1$

g) $f(x)=\sqrt{2[|2x+5|]-4[|x|]}$ h) $f(x)=\sqrt{[|x-2|]-[|x|]}$

i) $f(x)=|x|-[|x|]$ j) $f(x)=\begin{cases}|x+3|, x<0\\ 2(x-1)^2,\ x\in[0,2>\\ 2-|x-4|, x\in[2,\infty>\end{cases}$

k) $f(x)=-x^2\left[\left|\frac{|x+1|-1}{x+3}\right|\right]$, $-3\leq x\leq 4$ l) $f(x)=-\sqrt{2x-\sqrt{x}}$, si $x\in[1,9]$

(7) Determinar dominio, rango y gráficar cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x)=2[|x|]-2x$ b) $f(x)=\sqrt{5-|x-3|}$ c) $f(x)=[|2-3x|]$

d) $f(x)=\frac{[|2x|]}{x}$ e) $f(x)=\frac{2-x}{x-\sqrt{[|x|]}}$ f) $f(x)=\frac{|x|}{[|x|]+1}$

g) $f(x)=\frac{1}{[|x-3|]-[|x|]}$ h) $f(x)=\frac{|x|}{[|x|]+1}$ i) $f(x)=\frac{|x|-[|x|]}{\sqrt{2-[|x|]}}$

j) $f(x)=[|x|]+\sqrt{|x|-[|x|]}$

(8) Construir la gráfica de las funciones siguientes.

a) $f(x) = sig\ (|x^2 - 1| - 1)$ **b)** $f(x) = [| \sqrt{4 - x^2} |]$

c) $f(x) = sig\ (x + 1) - sig(x - 1)$ **d)** $f(x) = sig(\frac{x-3}{x+4})$

(9) En cada una de las funciones dadas, hallar el dominio, rango y hacer su gráfica.

a) $f(x) = \frac{(x+1)(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 6x + 5}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 1}{[|x^2|] - 2x - 1}$

c) $f(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$ **d)** $f(x) = \frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)}$

e) $f(x) = [|x|] + |x| + x + 2$ **f)** $f(x) = \frac{1}{x - [|x|]}$

g) $f(x) = \frac{|x|}{|x| - 1}$ **h)** $f(x) = sig([|x - 1|] - |) + sig([|x + 1|] - 1)$

i) $f(x) = \frac{[|x|]}{|x| - x + 1}$ **j)** $f(x) = sig(\frac{x^2 + x - 6}{x + 1})$

(10) Gráficar las funciones siguientes.

a) $f(x) = [| -x^2 |]$ **b)** $f(x) = [| -x^2 + 1 |]$

c) $f(x) = \sqrt{|x|}$ **d)** $f(x) = \sqrt{[|x|]}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - [|x|]}}{x[|2x - 1|] - 2x}$ **f)** $f(x) = \frac{|x + 3| - |x + 5|}{|x + 1| - 4}$, $x \in <-5, 2]$

(11) En cada función, hallar el dominio, rango y hacer la gráfica.

a) $f(x) = \frac{x}{[|x + 1|]}$ **b)** $f(x) = \frac{2 - x}{|x| - [|2x|]}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|2x|-2[|x|]}}$ d) $f(x)=\dfrac{|x|}{[|x|]}$

e) $f(x)=[|\dfrac{3}{1+x^2}|]$ f) $f(x)=(x-[|x|])^2$

g) $f(x)=x-[||x||]$ h) $f(x)=[|x|]+(x-[|x|])^2$

(12) Hallar el rango de la función f(x) = x – |x – 2|, x ∈ R

(13) Gráficar la función $f(x)=(x^2+4)[|2x+3|]$, $D_f=[-1,1]$

(14) Hallar el rango de f(x) = |x + 2| – 2|3 – x|, x ∈ [-4,10> gráficar la función f.

(15) Sea $f(x)=|x|+\sqrt{-x-[|x|]}$, $0 \le x \le 2$ Hallar el rango de f.

(16) Hallar el rango de $f(x)=\frac{1}{2}[|2|x+1||]\,(|x|-1)$ para x ∈ <-5/2 , 2 >, gráficar f.

(17) Hallar el dominio, rango y gráficar la función

a) $f(x)=\begin{cases} \left|\dfrac{|x|-2}{3-x}\right| & si\ -1<x<1 \\ \sqrt{x^2+2x} & si\ 1\le x<2 \\ \dfrac{2}{x+1} & si\ -2<x\le -1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 5-x\ , & x\in <-2,3> \\ x+\left[\left|\dfrac{2}{1-x}\right|\right]\ , & x\in[3,5] \end{cases}$

b) $f(x)=x^2-2x-3$ c) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ e) $f(x)=\sqrt{[|x|]+1}-\sqrt{1-x}$

h) $f(x)=|6+x-x^2|$ g) $f(x)=x^2+|x|-x+1$

(18) Hallar dominio, rango y gráficar la función

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|6-x|-1}{x+3} & si\ -1<x<8\\ \dfrac{|16-x^2|}{|6x|} & si\ -5<x<-3\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2\ , & -3\le x<0\\ x-|x-2|\ , & 0\le x<8\\ 2+\sqrt{x-4}\ , & 4\le x<8\end{cases}$

(19) Hallar el dominio, rango y gráficar la función: $f(x)=\begin{cases}[|\dfrac{4}{x^2+1}|] & ,si\ x<3\\ [|\dfrac{4}{x^2-1}|]+3x & ,si\ 4<x\le 6\\ [|\dfrac{3(x-6)^2}{5}-4|] & ,si\ 8\le x<9\end{cases}$

(20) Hallar el rango de $f(x)=\dfrac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$ sí $x\in$ [-2,4>

(21) Hallar el rango de $f(x)=\dfrac{x^2[|\frac{2-x}{2}|]+3x-1}{|5x-1|-15+6|x+2|}$ sí $x\in<-2,\frac{1}{5}>$

(22) Determinar dominio, rango y gráficar: $f(x)=\sqrt{9-x^2}\ sig\ (\dfrac{\sqrt{2+x}}{x-1})+[|\dfrac{2x+5}{x+3}|]-1$

(23) Hallar el dominio, rango y gráficar: $f(x)=\begin{cases}|x-[|x|]| & ,\ si\ [|x|]\ es\ par\\ |x-[|x+1|]| & ,\ si\ [|x|]\ es\ impar\end{cases}$

(24) Construir la gráfica y hallar el rango de:

$f(x)=\begin{cases}[|x-2|] & ,\ si\ [|x|]\ es\ par\\ 3x-[|x+1|]| & ,\ si\ [|x|]\ es\ impar\end{cases}$, $\forall$ x $\in$[-3,4]

Rpta. $R_f=[-7,-4]\cup[-3,0]\cup[1,4]\cup[5,8>$

(25) Sea f: [-2,4> → R / $f(x)=\dfrac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$ Hallar el rango de f. **Rpta.** $R_f=[-\frac{3}{5},1]$

(26) Dadas las funciones $f(x)=-x^2+3x+1$, $g(x)=3x^2+2x+1$ Hallar $R_f\wedge R_g$

(27) Hallar los valores de a y b para que cada uno de los conjuntos de pares ordenados sea una función y determinar la función en cada caso.

$$f=\{(1,8),(2,-3),(1,a^2+b^2),(-1,a+b),(a^2+b,b),(b+a^2,b)\}$$

$$g=\{(4,3)(-5,-3)(4,a^2-b^2),(-5,a+b),(a^2+b,a),(a^2+b^2,b)\}$$

Rpta: a) a = 2 , b = 2 **b)** a = -2 , b = -1

(28) Si $f(x)=x^2[|\frac{x}{2}|]-4x[|\frac{x}{3}|]$, x ∈ <0,6]. Hallar el rango y gráficar

(29) Hallar dominio, rango y gráficar la función $f(x)=\frac{x|x-|x||}{|x|-[|x|]}$

(30) Determinar el rango y gráficar la función: $f(x)=|x^2[|\frac{5-x}{2}|]-4|$, x ∈ <1,3]

(31) Si $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(-1)+f(\frac{1}{2})=\frac{15}{4}$, f(-1) = 0 y f(1) = 8. Hallar f(5)

Rpta. a = 3 , b = 4 , c = 1, f(5) = 96

(32) Determinar las siguientes funciones lineales

a) f(1) = 1 y f(3) = 3 **b)** f(1) = 3 y f(3) = 1

c) f(7) = 0 y f(8) = 42

(33) Si f es una función real es de variable real tal que $f(x+2)=x^2+x$.

Calcular $\frac{f(a+3)-f(a-3)}{2a-3}$, $a\neq\frac{3}{2}$ **Rpta.** 6

(34) Si f es una función real de variable real tal que $f(x+1)=x^2+3$

Calcular $\frac{f(a+1)-f(1)}{a}$, a ≠ 0 **Rpta.** a

(35) Sea f una función real de variable real definida por f(x) = mx + b tal que :

2f(2) + f(4) = 21 y f(-3) – f(1) = -16 Hallar el valor de $\frac{1}{3}f(1)$ **Rpta.** $\frac{2}{3}$

(36) Sea $f(x)=\ln(\frac{1+x}{1-x})$, demostrar que: $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$

(37) Sea f(n) la suma de n miembros de una progresión aritmética, demostrar que:

f(n + 3) – 3f(n + 2) + 3f(n + 1) – f(n) = 0

(38) Sea $\varphi(x)=\frac{1}{2}(ax+a^{-x})$ y $\psi(x)=\frac{1}{2}(a-a^{-x})$

Demostrar que: $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y)$ y

$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x)$

(39) Demostrar que, si f(x) es una función exponencial, es decir $f(x)=a^x$ (a<0) y los números x_1, x_2, x_3 constituyen una progresión aritmética, los números $f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$ forman una progresión geométrica.

(40) Hallar analíticamente el rango de la función $f(x)=4x-x^2-1$, $x \in [0,10]$.

(41) Determinar el rango de la función $f(x)=\sqrt{2x-\sqrt{x}}$, sí $x \in [1,9]$

(42) Determinar el dominio, rango y graficar la función $f(x)=x^2+|x|-x+1$.

(43) Hallar el dominio, rango y graficar las funciones dadas.

a) $f(x)=[|1-x^2|]$ **b)** $g(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-5}$

(44) Sí $f(x)=\begin{cases}1-2x & , -1\le x<0\\ [|3+\cos x|] & , x\ge 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2 & , x<0\\ \text{sen}\,x & , 0\le x\le\pi\end{cases}$

Hallar dominio, rango y graficar f + g.

(45) Halle el dominio, rango y dibujar la gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{[|x^2-16|]}$ **b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{[|1-x|]}$

c) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{|x|-[|x|]}$ **d)** $f(x)=[|\,|1-2x|\,|]$

e) $f(x)=[|x^2-2x-3|]$ **f)** $f(x)=\sqrt{[|x|]-3x}$

g) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-9} & , x\in\langle -5,-3]\\ |x+3|-2 & , x\in\langle -3,5]\\ x^2-10x+26 & , x\in\langle 5,7]\end{cases}$ **h)** $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & , x\in[-3,0\rangle\\ x-|x-2| & , x\in[0,4\rangle\\ 2+\sqrt{x-4} & , x\in[4,8\rangle\end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}5-x & , x\in\langle -2,3\rangle\\ x+\left[\left|\dfrac{2}{1-x}\right|\right] & , x\in[3,5]\end{cases}$ **j)** $f(x)=\begin{cases}|x|+2 & , x\in[-7,-2]\\ [|\frac{x}{2}|]+x & , |x|<2\\ \dfrac{1-|x+1|}{2x-1} & , x\in[2,5]\end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases}[|\,|x-1|-2\,|]x^2-2x & , x\in\langle -1,2\rangle\\ |x-4| & , x\in[2,9\rangle\end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases}3x-[|1+x|] & \text{si } [|x|] \text{ es impar}\\ [|-x|] & \text{si } [|x|] \text{ es par}\end{cases}\quad \forall\ x\in[-2,4]$

ll) $f(x)=\begin{cases}\left[\left|\dfrac{25-x}{7-x}\right|\right] & , x\in[-5,\frac{5}{27}]\\ \sqrt{|x-3|} & , x\in[\frac{5}{2},4\rangle\end{cases}$

(46) Determinar una función polinómica de segundo grado f(x) tal que f(0)=-5,f(-1)=1, f(1)=-7

(47) Hallar el rango de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+2}$ sí $x\in[-1,10]$

(48) Hallar el rango de la función $f(x)=\frac{[|1-x|]+[|x-1|]}{2-\sqrt{|x|-[|x|]}}$, sí $x \in \langle 0,1\rangle$

(49) Hallar el rango de la función $f(x)=8x[|\frac{5x-15}{x-4}|]+x^2[|\frac{2x-5}{x+2}|]$ donde $D_f=\langle -1,1]$

(50) Hallar el rango de la función $f(x)=\frac{2|x+1|-5}{2|x-2|+1}$ sí $x \in \langle -3,5\rangle$

(51) Si $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ y $D_f=[4,20]$, Hallar R_f

(52) Hallar el rango de la función $f(x)=\frac{x^2}{4x^2+1}$, sí $x \in [1,10]$

(53) Dado $f(x)=4-\sqrt{(x+6)^2-9}$, $x \in \langle -\infty,-11\rangle$. Hallar R_f

(54) Determinar le rango y graficar la función $f(x)=|4-x^2[|\frac{7-x}{3}|]|$

(55) Determinar él domino, rango y graficar la función $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x>1 \\ \cos\pi, & -1\le x\le 1 \\ x-x^2, & x<-1 \end{cases}$

(56) Hallar el rango y graficar las funciones:

a) $f(x)=[|\frac{x^2-2x-1}{2}|]$, $x \in [-1,3]$

b) $f(x)=\sqrt{|x|-\frac{1}{2}[|x|]}$, $x \in [-2,1\rangle$

(57) Calcular el rango y graficar las funciones dadas:

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{x+5}{x-2}, & si\ |x-2|>3 \\ \sqrt{x^2+4x-1}, & si\ 0<x<1 \\ 2+|2x-5|, & si\ 2\le x\le 3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-9}-2, & -5<x\le -3 \\ |x+2|-3, & 0<x\le 5 \\ \frac{3x-16}{x-5}, & x>6 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} |x+3|, & si \ -4\le x\le 0 \\ 3-x^2, & si \ 0<x\le 4 \\ -2, & si \ |x|>4 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -|x+4|, & si \ -8\le x\le 2 \\ x^2-4x-2, & si \ 2<x\le 5 \\ -x^2+10x-22, & si \ 5<x\le 8 \\ -3, & si \ |x|>8 \end{cases}$

2.16. OPERACIONES CON FUNCIONES.-

Consideremos dos funciones reales de variable real, f,g: R → R si $D_f \cap D_g \neq \phi$, Entonces:

a) Igualdad de Funciones.-

Diremos que las funciones f y g son iguales sí y sólo sí

i) $D_f = D_g$

ii) $f(x) = g(x) \Rightarrow \forall x \in D_f = D_g$

Ejemplo.- Las funciones $f(x)=x^3-1$, $g(x)=x^3-1$

Son iguales porque $D_f = D_g = R$ y f(x) = g(x).

Ejemplo.- Las funciones $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-6)}$ y [illegible] no son iguales puesto que $D_f = <-\infty,1] \cup [6,+\infty>$ y D_g [illegible] de donde $D_f \neq D_g$

Ejemplo.- Las funciones $f(x)=$ [illegible] $x \in [1,9]$ no son iguales a pesar de tener la misma regla de correspondencia, debido a que sus dominios no coinciden.

b) Suma de Funciones.-

Teniendo en cuenta que una función está definida cuando se indica su dominio y su regla de correspondencia

DEFINICION.- Si f y g son dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente, entonces a la suma de f y g denotado por f + g se define:

i) $D_{f+g} = D_f \wedge D_g$
ii) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D_f \wedge D_g$

Ejemplo.- Hallar f + g si: f={(-1,2),(0,0),(2,4),(3,-1),(4,3)}, g= {(2,0),(3,4),(4,7),(6,2)}

Solución

Primeramente calculamos el dominio de f y g.

$D_f = \{-1,0,2,3,4\} \quad , \quad D_g = \{2,3,4,6\}$

Luego calculamos el dominio de la suma: $D_{f+g} = D_f \wedge D_g = \{2,3,4\}$

ahora calculamos los pares ordenados que pertenecen a f + g.

$$\begin{cases} (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 0 = 4 \\ (f+g)(3) = f(3) + g(3) = -1 + 4 = 3 \\ (f+g)(4) = f(4) + g(4) = 3 + 7 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (2,4) \in f+g \\ (3,3) \in f+g \\ (4,10) \in f+g \end{array}$$

Luego la suma de f y g es: **f + g = {(2,4),(3,3),(4,10)}**

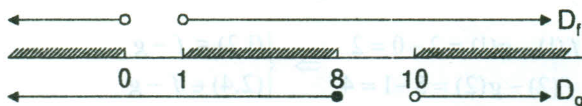
Ejemplo.- Calcular (f + g)(x) sí: $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ si } x \geq 1 \\ x^2 - 2, \text{ si } x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x+1, \text{ si } x \leq 8 \\ 2x^3 \text{ , si } x > 10 \end{cases}$

Solución

Primeramente calculamos el dominio de f y g

$D_f = <-\infty,0> \cup [1,+\infty> \quad , \quad D_g = <-\infty,8] \cup <10,+\infty>$

Luego calculamos el dominio de la suma f + g es: $D_{f+g} = D_f \wedge D_g$



$D_{f+g} = D_f \wedge D_g = <-\infty,0> \cup [1,8] \cup <10,+\infty>$

Ahora definimos la suma en cada intervalo

Si x < 0, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-2+3x+1=x^2+3x-1$

Si $1\le x\le 8$, (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + 3x + 1 = 5x + 2

Si x < 10, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x+1+2x^3=2x^3+2x+1$

Luego la suma (f + g)(x) es: $(f+g)(x)=\begin{cases} x^2+3x-1 & si\ \ x<0 \\ 5x+2 & si\ \ 1\le x\le 8 \\ 2x^3+2x+1 & si\ \ x>10 \end{cases}$

c) Diferencia de Funciones.-

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente entonces a la diferencia de f y g denotada por f – g se define:

i) $D_{f-g}=D_f\wedge D_g$

ii) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ ,\ \forall\ x\in D_f\wedge D_g$

Ejemplo.- Hallar f – g sí f = {(1,2),(2,5),(3,4),(4,1)} y g = {(0,2),(1,0),(2,1),(-1,3)}

Solución

Primeramente calculamos el dominio D_f y D_g: $D_f=\{1,2,3,4\}$, $D_g=\{-1,0,1,2\}$

Ahora calculamos el dominio de la diferencia $D_{f-g}=D_f\wedge D_g=\{1,2\}$

Calculando los pares ordenados que pertenecen a f – g

$\begin{cases}(f-g)(1)=f(1)-g(1)=2-0=2 \\ (f-g)(2)=f(2)-g(2)=5-1=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(1,2)\in f-g \\ (2,4)\in f-g\end{cases}$

Luego la diferencia f – g es: f – g = {(1,2),(2,4)}

d) Multiplicación de funciones.-

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente, entonces a la multiplicación de f y g denotado por f.g se define:

> i) $D_{f.g} = D_f \wedge D_g$
>
> ii) $(f.g)(x) = f(x).g(x), \ \forall \ x \in D_f \wedge D_g$

Ejemplo.- Hallar f.g si: f = {(1,4),(4,5)(2,3),(3,2)} y g = {(0,2),(1,2),(2,-1),(3,0),(5,2)}

Solución

Primeramente calculamos el dominio D_f y D_g: $D_f = \{1,2,3,4\}$, $D_g = \{0,1,2,3,5\}$

Ahora calculamos el dominio del producto: $D_{f.g} = D_f \wedge D_g = \{1,2,3\}$

Calculamos los pares ordenados que pertenecen a f.g

$$\begin{cases} (f.g)(1) = f(1)+g(1) = 4.2 = 8 \\ (f.g)(2) = f(2)+g(2) = 3.(-1) = -3 \\ (f.g)(3) = f(3)+g(3) = 2.(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,8) \in f.g \\ (2,-3) \in f.g \\ (3,0) \in f.g \end{cases}$$

Luego el producto f.g es: f.g = {(1,8),(2,-3),(3,0)}

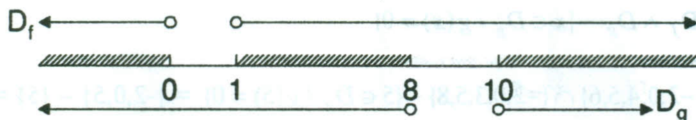
Ejemplo.- Hallar (f.g)(x) donde: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ , \ x \geq 1 \\ x^2 - 2 \ , \ x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3x+1 \ , \ x \leq 8 \\ 2x^3 \ , \ x > 10 \end{cases}$

Solución

Primeramente calculamos los dominios de f y g:

$D_f = <-\infty, 0> \cup [1, +\infty>$, $D_g = <-\infty, 8] \cup <10, +\infty>$

Ahora calculamos el dominio del producto f.g



$$D_{f.g} = D_f \wedge D_g = <-\infty,0> \cup [1,8] \cup <10,\infty>$$

Ahora definimos el producto en cada intervalo

Si x < 0, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2-2).(3x+1) = 3x^3+x^2-6x-2$

Si 1 ≤ x ≤ 8, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x+1)(3x+1) = 6x^2+5x+1$

Si x > 10, $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x+1)2x^3 = 4x^4+2x^3$

Luego el producto (f.g)(x) es: $(f.g)(x) = \begin{cases} 3x^3+x^2-6x-2, & \text{si } x<0 \\ 6x^2+5x+1, & \text{si } 1 \le x \le 8 \\ 4x^4+2x^3, & \text{si } x>10 \end{cases}$

e) Cociente de Funciones.-

Si f y g son dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente entonces el cociente de f y g denotado por f/g se define

i) $D_{f/g} = D_f \wedge D_g - \{x \in D_g \,/\, g(x) = 0\}$

ii) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D_{f/g}$

Ejemplo.- Hallar f/g si:

f ={(-2,3), (0,3), (4,0), (5,-3), (6,3)} y g ={(0,-2), (-2,5), (3,2), (5,0), (8,-2)}

Solución

Primeramente calculamos el dominio de f y g: $D_f = \{-2,0,4,5.6\}$, $D_g = \{-2,0,3,5,8\}$

Ahora calculamos el dominio del cociente f/g

$D_{f/g} = D_f \wedge D_g - \{x \in D_g \,/\, g(x) = 0\}$

$= \{-2,0,4,5,6\} \cap \{-2,0,3,5,8\} - \{5 \in D_g \,/\, g(5) = 0\}$ = {-2,0,5} – {5} = {-2,0}

Calculando los pares ordenados que pertenecen a f/g

$$\begin{cases} (\frac{f}{g})(-2)=\frac{f(-2)}{g(-2)}=\frac{3}{5} \\ (\frac{f}{g})(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{3}{2}=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2,\frac{3}{5})\in\frac{f}{g} \\ (0,-\frac{3}{2})\in\frac{f}{g} \end{cases}$$

Luego el cociente $\frac{f}{g}$ es: $\frac{f}{g}=\{(-2,\frac{3}{5}),(0,-\frac{3}{2})\}$

Ejemplo.- Hallar $(\frac{f}{g})(x)$ sí: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, \text{ si } x\in[-3,0> \\ x+2, \text{ si } x\in[0,4] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ si } x\in[-2,2] \\ x-4, \text{ si } x\in<2,5] \end{cases}$

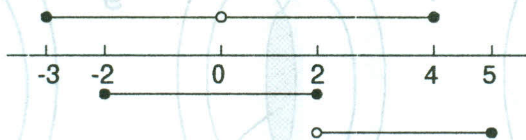
<u>Solución</u>

Calculando los dominios de f y g: $D_f=[-3,0>\cup[0,4]$, $D_g=[-2,2]\cup<2,5]$

Ahora calculamos el conjunto $\{x\in D_g \,/\, g(x)=0\}$

a) Si x ∈ [-2,2] ⇒ $g(x)=x^2+1=0$ ⇒ ∄ x tal que g(x) = 0

b) Si x ∈ <2,5] ⇒ g(x) = x − 4 = 0 ⇒ x = 4 entonces: x ∈ <2,4> ∪ <4,5]



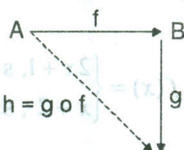
$$D_{f/g}=D_f\wedge D_g-\{4\}=[-2,0>\cup<0,2]\cup<2,4]-\{4\}=[-2,0>\cup<0,2]\cup<2,4>$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+1}, & \text{si } x\in[-2,0> \\ \frac{x+2}{x^2+1}, & \text{si } x\in<0,2] \\ \frac{x+2}{x+4}, & \text{si } x\in<2,4> \end{cases}$$

2.17. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.-

Definición.- Dadas dos funciones f y g, tales que: f: A $\longrightarrow$ B ; g: B $\longrightarrow$ C y que $R_f \wedge D_g \neq \phi$, entonces la función compuesta g o f es aquella función definida por:

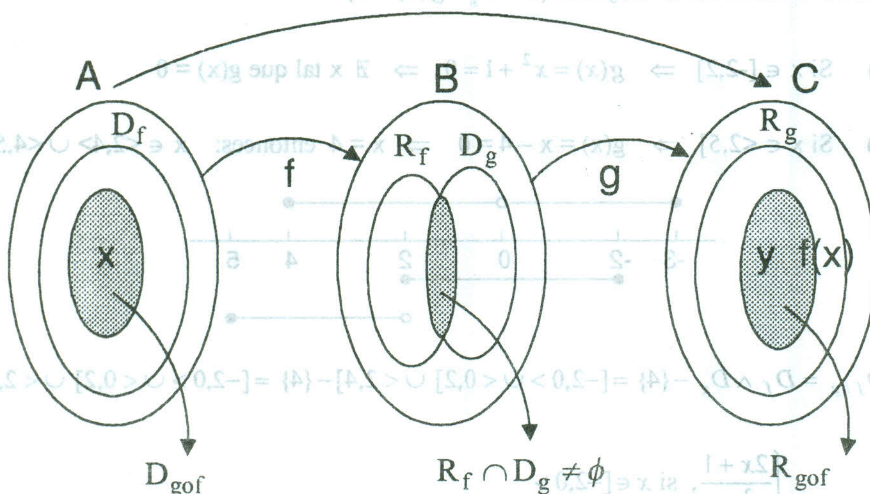
i)	$D_{gof} = \{x / x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$
ii)	(gof)(x) = g(f(x)) es la regla de correspondencia.



OBSERVACION. Para que exista la composición de funciones g o f es necesario que:

$$R_f \wedge D_g \neq \phi.$$

ILUSTRACION GRAFICA



En esta representación gráfica se tiene:

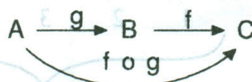
i)	$D_{gof} \subseteq D_f \subseteq A$
ii)	$R_{gof} \subseteq R_g \subseteq C$

Ejemplo.- Sean f = {(0,1),(1,2),(2,3),(4,3),(5,2)} y g= {(6,7),(5,4),(4,3),(2,4),(1,4),(0,7)}

Hallar D_{gof} , D_{gof} , así como f o g y g o f.

<u>Solución</u>

i) Calculando D_{gof} ;



$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$ por definición:

D_g = { 0,	1,	2,	4,	5,	6}
↓	↓	↓	↓	↓	↓
g(0)	g(1)	g(2)	g(4)	g(5)	g(6)
‖	‖	‖	‖	‖	‖
7	4	4	3	4	7

veremos cuales pertenecen al D_f

Se observa que el $4 \in D_f$ entonces $D_{fog} = \{1,2,5\}$

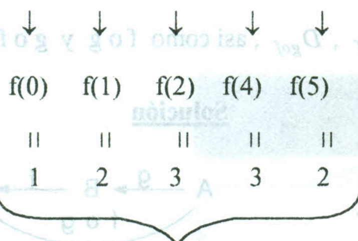
Ahora veremos su regla de correspondencia.

$$\begin{cases} (fog)(1) = f(g(1)) = f(4) = 3 \\ (fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = 3 \\ (fog)(5) = f(g(5)) = f(4) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,3) \in fog \\ (2,3) \in fog \\ (5,3) \in fog \end{cases}$$

$\therefore$ f o g = {(1,3),(2,3),(5,3)}

ii) Calculando D_{gof} ;

$D_{gof} = \{x \in D_f \,/\, x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$ por definición.



Veremos cuales de estos elementos pertenecen al D_g, entonces $1 \in D_g$, $2 \in D_g$ luego: $D_{gof} = \{0,1,5\}$

Ahora veremos su regla de correspondencia.

$$\begin{cases} (gof)(0) = g(f(0)) = g(1) = 4 \\ (gof)(1) = g(f(1)) = g(2) = 4 \\ (gof)(5) = f(g(5)) = g(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,4) \in gof \\ (1,4) \in gof \\ (5,4) \in gof \end{cases}$$

$\therefore$ g o f = {(0,4),(1,4),(5,4)}

Ejemplo.- Sean f, g: R $\longrightarrow$ R tal que: $f(x) = x^2 + 2x + 3$, g(x) = x – 5

Hallar $\left[\frac{(gof)(1) + (fog)(2).(fog)(3) - (gog)(2)}{(fog)(2)}\right]^{-2}$

Solución

Calculando cada una de las operaciones

(gof)(1) = (g(f(1)) = g(6) = 1 ; (fog)(2) = (f(g(2)) = f(-3) = 6

(fog)(3) = f(g(3)) = f(-2) = 3 ; (gog)(2) = g(g(2) = g(-3) = -8

Ahora reemplazamos en la expresión dada:

$$\left[\frac{(gof)(1) + (fog)(2).(fog)(3) - (gog)(2)}{(fog)(2)}\right]^{-2} = \left[\frac{1 + (6)(3) - (-8)}{6}\right]^{-2} = \left(\frac{27}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{81}$$

Ejemplo.- Sea $g(x)=\begin{cases}-3x^2+1 & si\ x\geq 1\\ x-1 & si\ x<1\end{cases}$. Hallar $\frac{(gog)(1)+2g(-1)}{(gog)(-1)+g^2(1)}$

Solución

Calculando cada operación se tiene: $\begin{cases}(gog)(1)=g(g(1))=g(-2)=-3\\ (gog)(-1)=g(g(-1))=g(-2)=-3\\ g(-1)=-2,\ g(1)=-2\end{cases}$

Ahora reemplazamos en la expresión: $\frac{(gog)(1)+2g(-1)}{(gog)(-1)+g^2(1)}=\frac{-3+2(-2)}{-3+(-2)^2}=\frac{-3-4}{-3+4}=-7$

Ejemplo.- Si $f(x)=x^2$ encontrar dos funciones g para los cuales $(fog)(x)=4x^2-12x+9$

Solución

$(fog)(x)=f(g(x))=4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

$g^2(x)=(2x-3)^2 \Rightarrow g(x)=\pm(2x-3)$

$\therefore\ g_1(x)=2x-3\ ,\ g_2(x)=-2x+3$

Ejemplo.- Dadas las funciones f(x) = 3x – 2 si x ∈ < 0 ,+∞> ; $g(x)=x^2$ si x ∈ <-3,5>

a) Hallar fog (la función f composición g)

b) Hallar gof (la función g composición f)

Solución

a) 1ro. calculamos el dominio de f o g: $D_{fog}=\{x\in D_g\ /\ x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g \wedge g(x)\in D_f$

$x\in<-3,5>\wedge\ x^2\in<0,\infty>$ entonces x ∈ <-3,5> Λ <-∞,0> ∪ <0,∞>

x ∈ <-3,0> ∪ <0,5>

2do. Calculando la regla de correspondencia de f o g

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 2$

Por lo tanto: $(fog)(x) = 3x^2 - 2$ para $x \in <-3,0> \cup <0,5>$

b) 1ro. Calculamos el dominio de g o f: $D_{gof} = \{x \in D_f \,/\, x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$x \in D_f \wedge f(x) \in D_g$

$x \in <0,\infty> \wedge 3x - 2 \in <-3,5>$ entonces $x \in <0,\infty> \wedge -3 < 3x - 2 < 5$

$x \in <0,\infty> \wedge -1 < 3x < 7$ entonces $x \in <0,\infty> \wedge -\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3} \Rightarrow x \in <0,\frac{7}{3}>$

2do. Calculando la regla de correspondencia de g o f

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

Por lo tanto: $(gof)(x) = 9x^2 - 12x + 4$, para: $x \in <0,\frac{7}{3}>$

Ejemplo.- Hallar fog si $f(x) = 3x + 2$, $x \in <-\infty,3>$, $g(x) = \begin{cases} 2x & si\ x < 0 \\ -3x & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Solución

$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 2x & si \quad x < 0 \\ g_2(x) = -3x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$, donde $D_g = D_{g_1} \cup D_{g_2}$ dominio de la función g

Ahora calculamos el dominio de f o g

$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x \in D_g \,/\, x \in D_{g_1} \cup D_{g_2} \wedge g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) D_f\} \cup \{x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_f\} = D_{fog_1} \cup D_{fog_2}$

Luego: $(fog)(x) = \begin{cases} (fog_1)(x) & si\ x \in D_{fog_1} \\ (fog_2)(x) & si\ x \in D_{fog_2} \end{cases}$

Ahora calculando D_{fog_1} y D_{fog_2}

$D_{fog_1} = \{x \in D_{g_1} / x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_f\}$

x ∈ <-∞,0> Λ 2x ∈ <-∞,3>

x ∈ <-∞,0> Λ x ∈ <-∞,3/2> entonces x ∈ <-∞,0> por lo tanto $D_{fog_1} = <-\infty, 0>$

$D_{fog_2} = \{x \in D_{g_2} / x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_f\}$

x ∈ [1,∞> Λ -3x ∈ <-∞,3> entonces x ∈ [1,∞> Λ x ∈ <-1,∞> entonces x ∈ [1,∞>

$D_{fog_2} = [1, \infty>$

$(fog_1)(x) = f(g_1(x)) = f(2x) = 3(2x) + 2 = 6x + 2$

$(fog_2)(x) = f(g_2(x)) = f(-3x) = 3(-3x) + 2 = -9x + 2$

$$\therefore \quad (fog)(x) = \begin{cases} 6x + 2 & si \quad x \in <-\infty, 0> \\ -9x + 2 & si \quad x \in [1, \infty> \end{cases}$$

Ejemplo.- Hallar (f o g)(x) si: $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1 \\ -x^3 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x & si \quad x < 2 \\ 2x & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

Solución

Veremos el caso cuando las funciones tienen dos reglas de correspondencia.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si \quad x \in D_{f_1} \\ f_2(x) & si \quad x \in D_{f_2} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in D_{g_1} \\ g_2(x) & si \quad x \in D_{g_2} \end{cases}$$

el dominio de f o g se obtiene siguiendo el mismo criterio del ejemplo anterior, es decir:

i) $D_{f_1 o g_1} = \{x \in D_{g_1} / x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_{f_1}\}$

x ∈<-∞,2> Λ -x ∈ <-∞,1> entonces x ∈<-∞,2> Λ x ∈ <-1,∞> de donde x ∈<-1,2>

ii) $D_{f_1 o g_2} = \{x \in D_{g_2} / x \in_{g_2} \wedge g_2(x) \in f_1\}$

x ∈ [4,∞> Λ 2x ∈ <-∞,1> entonces x ∈ [4-∞> Λ x ∈ <-∞,1/2> ⇒ x ∈ φ

iii) $D_{f_2 og_1} = \{x \in D_{g_1} \,/\, x \in D_{g_1} \wedge g_1(x) \in D_{f_2}\}$

x ∈<-∞,2> Λ -x ∈ [2,∞> entonces x ∈<-∞,2> Λ ∈ <-∞,-2> de donde x ∈<-∞,-2]

iv) $D_{f_2 og_2} = \{x \in D_{g_2} \,/\, x \in D_{g_2} \wedge g_2(x) \in D_{f_2}\}$

x ∈[4,∞> Λ 2x ∈ [2,∞> entonces x ∈[4,∞> Λ x ∈ [1,∞> de donde x ∈[4,∞>

Luego de i) , iii) , iv), la regla de correspondencia es:

$$(f_1 og_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(-x) = x^2$$

$$(f_2 og_1)(x) = f_2(g_1(x)) = f_2(-x) = x^3$$

$(f_2 og_2)(x) = f_2(g_2(x)) = f_2(2x) = -8x^3$, luego

$$(fog)(x) = \begin{cases} (f_1 og_1)(x) & , \ si \quad x \in <-1,2> \\ (f_2 og_1)(x) & , \ si \quad x \in <-\infty,-2] \\ (f_2 og_2)(x) & , \ si \quad x \in [4,\infty> \end{cases} \quad \therefore \ (fog)(x) = \begin{cases} x^3 & , \ si \ x \in <-\infty,-2] \\ x^2 & , \ si \ x \in <-1,2> \\ -8x^3 & , \ si \ x \in [4,\infty> \end{cases}$$

2.18. PROPIEDADES DE LA COMPOSICION DE FUNCIONES.-

Consideremos las funciones f, g, h, I (identidad)

① f o g ≠ g o f no es conmutativa

② (fog) o h = fo(goh) asociativa

③ (f + g) o h = (foh) + (goh) distributiva

④ (fg) o h = (f o h).(g o h)

⑤ f o I = f , I o f = f, ∀ f

⑥ $I^n o I^m = I^{nm}, n, m \in Z^+$

⑦ $I^{1/n} o I^n = I^n \ o \ I^{1/n} = I$, $n \in z^+$, n impar

⑧ $I^n = \underbrace{I.I.I...I}_{n-veces}$

2.19. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Dada las funciones f = {(2,1),(-2,3),(1,5),(-3,4),(7,8)}; g = {(3,-2),(7,2),(-3,1),(2,4)}

Calcular f + g, f – g, f.g , f/g

Solución

Calculando el dominio de cada función: $D_f = \{-3,-2,1,2,7\}$; $D_g = \{-3,2,3,7\}$

Como $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \wedge D_g = \{-3,2,7\}$

$$\begin{cases} (f+g)(-3) = f(-3)+g(-3) = 4+1 = 5 \\ (f+g)(2) = f(2)+g(2) = 1+4 = 5 \\ (f+g)(7) = f(7)+g(7) = 8+2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,5) \in f+g \\ (2,5) \in f+g \\ (7,10) \in f+g \end{cases}$$

$\therefore$ f + g = {(-3,5),(2,5),(7,10)}

$$\begin{cases} (f-g)(-3) = f(-3)-g(-3) = 4-1 = 3 \\ (f-g)(2) = f(2)-g(2) = 1-4 = -3 \\ (f-g)(7) = f(7)-g(7) = 8-2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,3) \in f-g \\ (2,-3) \in f-g \\ (7,6) \in f-g \end{cases}$$

$\therefore$ f – g = {(-3,3),(2,-3),(7,6)}

$$\begin{cases} (f.g)(-3) = f(-3).g(-3) = 4(1) = 4 \\ (f.g)(2) = f(2).g(2) = 1(4) = 4 \\ (f.g)(7) = f(7).g(7) = 8(2) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,4) \in f.g \\ (2,4) \in f.g \\ (7,16) \in f.g \end{cases}$$

$\therefore$ f . g = {(-3,4),(2,4),(7,16)}

Calculando el dominio de f/g: $D_{f/g} = D_f \wedge D_g - \{x / g(x) = 0\} = \{-3,2,7\}$

$$\begin{cases} (\frac{f}{g})(-3) = \frac{f(-3)}{g(-3)} = \frac{4}{1} = 4 \\ (\frac{f}{g})(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{1}{4} \\ (\frac{f}{g})(7) = \frac{f(7)}{g(7)} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,4) \in \frac{f}{g} \\ (2,\frac{1}{4}) \in \frac{f}{g} \\ (7,4) \in \frac{f}{g} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{f}{g} = \{(-3,4),(2,\frac{1}{4}),(7,4)\}$$

(2) Sean f = {(1,3),(3,5),(2,4),(4,6)}; g = {(4,1),(0,-3),(3,2),(1,0)}. **Hallar f/g**

Solución

Calculando el dominio de cada función: $D_f=\{1,2,3,4\}$, $D_g=\{0,1,3,4\}$

Calculando el dominio de f/g: $D_{f/g}=D_f\wedge D_g-\{x/g(x)=0\}=\{1,3,4\}-\{1\}=\{3,4\}$

$$\begin{cases}(\frac{f}{g})(3)=\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{5}{2}\\ (\frac{f}{g})(4)=\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{6}{1}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3,\frac{5}{2})\in\frac{f}{g}\\ (4,6)\in\frac{f}{g}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{f}{g}=\{(3,\frac{5}{2}),(4,6)\}$$

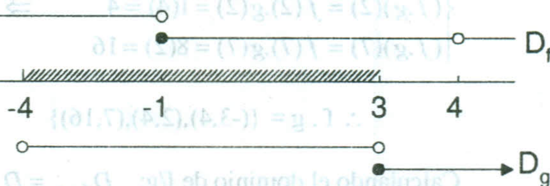
③ Si $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1\\ x-3, & -1\le x<4\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-2x, & -4<x<3\\ -4, & x\ge 3\end{cases}$. Calculando f + g

Solución

Calculando el dominio de cada función:

$D_f=<-\infty,-1>\cup[-1,4>$; $D_g=<-4,3>\cup[3,\infty>$

Ahora interceptamos los dominios



$D_{f+g}=D_f\wedge D_g=<-4,-1>\cup[-1,3>\cup[3,4>$

Si x ∈ <-4,-1>, f(x) + g(x) = x + 4 – 2x = -x + 4

x ∈ [-1,3>, f(x) + g(x) = x – 3 – 2x = -x – 3

x ∈ [3,4>, f(x) + g(x) = x – 3 – 4 = x – 7

de donde $(f+g)(x)=\begin{cases}-x+4 & si\ x\in<-4,-1>\\ -x-3 & si\ x\in[-1,3>\\ x-7 & si\ x\in[3,4>\end{cases}$

④ Hallar (f + g)(x) si f y g están definidas por:

$$f(x)=\begin{cases}|x-1| , & si\ |x-1|\leq 1\\ 3x , & si\ |x-1|>1\end{cases} , \quad g(x)=\begin{cases}[|x|] , & si\ -3\leq x<1\\ -2 , & si\ 1\leq x\leq 2\\ 1-2x , & si\ x<2\end{cases}$$

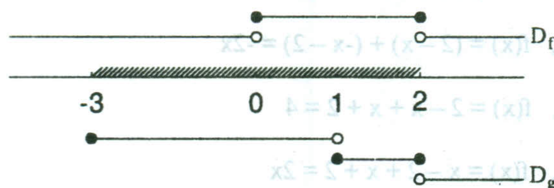
Solución

$|x-1|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x-1\leq 1 \Rightarrow 0\leq x\leq 2$

$|x-1|>1 \Rightarrow x-1>1 \ \vee\ x-1<-1 \Rightarrow x>2 \ \vee\ x<0$

Ahora a la función f(x) expresamos así: $f(x)=\begin{cases}|x-1| & si\ 0\leq x\leq 2\\ 3x & si\ x\in<-\infty,0>\cup<2,+\infty>\end{cases}$

Dibujando los dominios de cada función en una recta horizontal.



$D_{f+g}=D_f\wedge D_g=[-3,0>\cup[0,1>\cup[1,2]\cup<2,\infty>$

Calculando la suma en cada intervalo

$x\in[-3,0> \Rightarrow f(x)+g(x)=3x+[|x|]$

$x\in[0,1> \Rightarrow f(x)+g(x)=|x-1|+[|x|]$

$x\in[1,2] \Rightarrow f(x)+g(x)=|x-1|-2$

$x\in<2,\infty> \Rightarrow f(x)+g(x)=3x+1-2x=x+1$

NOTA.- Se efectúa la operación en sus propias reglas de correspondencia

$$(f+g)(x)=\begin{cases}3x+[|x|] & , \text{ si } x\in[-3,0>\\ |x-1|+[|x|], & \text{ si } x\in[0,1>\\ |x-1|-2 & , \text{ si } x\in[1,2]\\ x+1 & , \text{ si } x\in<2,+\infty>\end{cases}$$

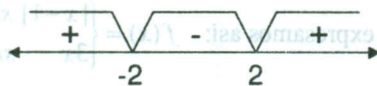
(5) Si $f(x) = |x-2| + |x+2|$, $g(x) = \begin{cases} 3x+2, & si\ x < 0 \\ 1-x, & si\ x \geq 0 \end{cases}$ y $H(x) = f(x) + g(x)$, $D_H = [-2,3>$.

Hallar la gráfica y el rango de H.

Solución

Primeramente definiremos los valores absolutos

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & , si\ x \geq 2 \\ 2-x & , si\ x < 2 \end{cases} \quad ; \quad |x+2| = \begin{cases} x+2 & , si\ x \geq -2 \\ -x-2 & , si\ x < -2 \end{cases}$$



Ahora definiremos f(x) en cada intervalo

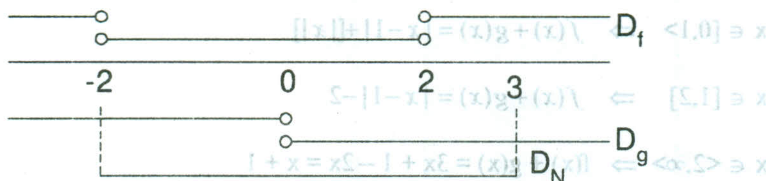
Si $x < -2$, $f(x) = (2-x) + (-x-2) = -2x$

$-2 \leq x < 2$, $f(x) = 2 - x + x + 2 = 4$

$x \geq 2$, $f(x) = x - 2 + x + 2 = 2x$

por lo tanto $f(x) = \begin{cases} -2x & , si\ x < -2 \\ 4 & , si\ -2 \leq x < 2 \\ 2x & , si\ x \geq 2 \end{cases}$

Ahora calculemos los dominios de cada función



$D_H = [-2,3> = [-2,0> \cup [0,2> \cup [2,3>$

Definiremos a la función H(x) en cada intervalo

$x \in [-2,0> \Rightarrow H(x) = 4 + 3x + 2 = 3x + 6$

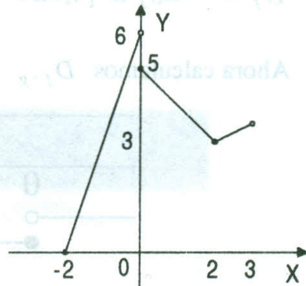
$x \in [0,2> \Rightarrow H(x) = 4 + 1 - x = 5 - x$

x ∈ [2,3> ⇒ H(x) = 2x + 1 – x = x + 1

Por lo tanto la función H(x) queda definida por:

$$H(x)=\begin{cases}3x+6 & si\ \ -2\le x<0\\ 5-x & si\ \ 0\le x<2\\ x+1 & si\ \ 2\le x<3\end{cases}$$

Graficando la función H(x) se tiene:



$$R_H=[0,6>$$

(6) Si se tiene que $f(x+2)=x^2$ sí x ∈ <-5,5] y $g(x-1)=x^2$ sí x ∈[-2,2]. Calcular f(x) y g(x)

Solución

Calculando f(x), para esto x + 2 = y ⇒ x = y – 2

Como x ∈ <-5,5] ⇒ y–2 ∈ <-5,5] de donde -5< y–2 ≤ 5 ⇒ -3 < y ≤ 7 ⇒ y ∈ <-3,7]

Luego $f(x+2)=x^2 \Rightarrow f(y)=(y-2)^2$, y ∈ <-3,7]

Ahora evaluamos en x: $f(x)=(x-2)^2$, x ∈ <-3,7]

Calculando g(x), para esto x – 1 = y ⇒ x = y + 1

Como x ∈ [-2,2] ⇒ y + 1 ∈ [-2,2] ⇒ -2 ≤ y + 1 ≤ 2 ⇒ -3 ≤ y ≤ 1 ⇒ y ∈ [-3,1]

Luego $g(x-1)=x^2 \Rightarrow g(y)=(y+1)^2$, y ∈ [-3,1]

Ahora veremos en x: $g(x)=(x+1)^2$, x ∈ [-3,1]

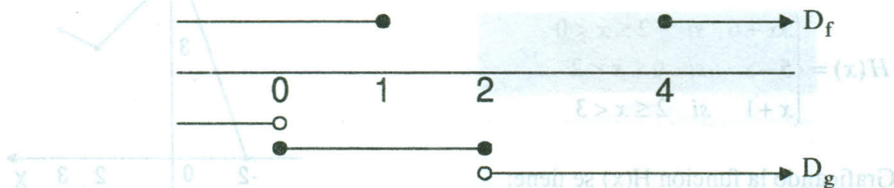
(7) Calcular (f+g)(x) y (f/g)(x), donde $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & si\ \ x\le 1\\ \sqrt{x} & ,\ si\ \ x\ge 4\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}x^2-1, & si\ \ x<0\\ x & ,\ si\ \ 0\le x\le 2\\ x+5 & ,\ si\ \ x>2\end{cases}$

Solución

Calculando el dominio de cada función

$D_f = <-\infty,1] \cup [4,+\infty>$, $D_g = <-\infty,0> \cup [0,2] \cup <2,+\infty>$

Ahora calculamos D_{f+g}



$D_{f+g} = D_f \wedge D_g = <-\infty,0> \cup [0,1] \cup [4,+\infty>$

Calculando f(x) + g(x) en cada intervalo

Sí $x \in <-\infty,0>$, $f(x)+g(x)=\sqrt{1-x}+x^2-1$

$x \in [0,1]$, $f(x)+g(x)=\sqrt{1-x}+x$

$x \in [4,+\infty>$, $f(x)+g(x)=\sqrt{x}+x+5$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}+x^2-1 & , \ si \ \ x<0 \\ \sqrt{1-x}+x & , \ si \ \ 0\le x\le 1 \\ \sqrt{x}+x+5 & , \ si \ \ x\ge 4\end{cases}$$

Ahora calculamos $D_{f/g}$ es decir:

$D_{f/g} = D_f \wedge D_g - \{x / g(x)=0\} = <-\infty,0> \cup [0,1] \cup [4,+\infty> - \{0,-1\}$

$= <-\infty,-1> \cup <-1,0> \cup <0,1] \cup [4,+\infty>$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & , \ si \ \ x\in <-\infty,-1> \cup <-1,0> \\ \dfrac{\sqrt{1-x}}{x} & , \ si \ \ x\in <0,1] \\ \dfrac{\sqrt{x}}{x+5} & , \ si \ \ x\ge 4\end{cases}$$

8 Calcular (f + g)(x) y (f/g)(x) donde

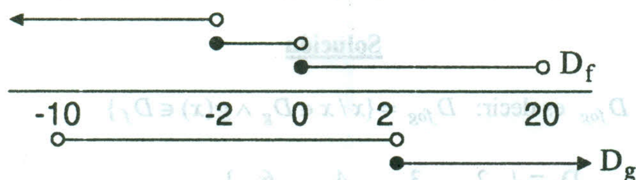
$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \ si \ \ x<-2 \\ \sqrt{1-x} & , \ si \ \ -2\le x<0 \\ x & , \ si \ \ 0\le x<20 \end{cases} \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \ si \ \ -10<x<2 \\ \sqrt{x} & , \ si \ \ x\ge 2 \end{cases}$$

Solución

Calculando el dominio de cada función

$D_f = <-\infty,-2> \cup [-2,0> \cup [0,20>$, $D_g = <-10,2> \cup [2,+\infty>$

Ahora calculamos el D_{f+g}



$D_{f+g} = D_f \wedge D_g = <-10,-2> \cup [-2,0> \cup [0,2> \cup [2,20>$

Calculando f(x) + g(x) en cada intervalo.

x ∈ <-10,-2>, $f(x)+g(x)=x^2-1+x^2-1=2x^2-2$

x ∈ [-2,0>, $f(x)+g(x)=\sqrt{1-x}+x^2-1$

x ∈ [0,2>, $f(x)+g(x)=x+x^2-1$

x ∈ [2,20>, $f(x)+g(x)=x+\sqrt{x}$

Luego se tiene: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} 2x^2-2 & si \ \ -10\le x<-2 \\ \sqrt{1-x}+x^2-1 & si \ \ -2\le x<0 \\ x^2+2x-1 & si \ \ 0\le x<2 \\ x+\sqrt{x} & si \ \ 2\le x<20 \end{cases}$

Calculando (f/g)(x)

$$(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^2-1} & si\ -10<x<2-\{-1,1\}\\ \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & si\ -2\le x<0-\{-1,1\}\\ \frac{x}{x^2-1} & si\ 0\le x<2-\{-1,1\}\\ \frac{x}{\sqrt{x}} & si\ 2\le x<20\end{cases} \quad \text{ósea} \quad (\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}1 & si\ -10<x<-2\\ \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & si\ x\in[-2,-1>\cup<-1,0>\\ \frac{x}{x^2-1} & si\ x\in[0,1>\cup<1,2>\\ \frac{x}{\sqrt{x}} & si\ x\in[2,20>\end{cases}$$

⑨ Dadas las funciones definidas por:

f= {(0,0),(4,3),(2,4),(-3,2),(3,-1)} y g= {(6,2),(3,4),(2,0),(4,7)}. Calcular f o g

Solución

Calculando D_{fog} es decir: $D_{fog}=\{x/x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}$

$$\begin{array}{ccccc} D_g=\{ & 2, & 3, & 4, & 6\ \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & g(2) & g(3) & g(4) & g(6) \\ & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ & 0 & 4 & 7 & 2 \end{array}$$

Veremos cuales pertenecen al D_f

Se observa que: $0\in D_f$, $4\in D_f$, $2\in D_f$ entonces $D_{fog}=\{2,3,6\}$

Ahora calculamos los elementos de f o g

$$\begin{cases}(fog)(2)=f(g(2))=f(0)=0\\ (fog)(3)=f(g(3))=f(4)=3\\ (fog)(6)=f(g(6))=f(2)=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(2,0)\in D_{fog}\\ (3,3)\in D_{fog}\\ (6,4)\in D_{fog}\end{cases}$$

$\therefore$ f o g= {(2,0),(3,3),(6,4)}

(10) Sean las funciones reales de variable real $f(x)=\begin{cases} x+2\ , & x\leq 1 \\ x-1\ , & x>1 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^2\ , & x<0 \\ 1-x\ , & x\geq 0 \end{cases}$

Hallar f o g

Solución

De acuerdo a los criterios establecidos se tiene:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=x+2\ , & x\leq 1 \\ f_2(x)=x-1\ , & x>1 \end{cases}\ ,\quad g(x)=\begin{cases} g_1(x)=x^2\ , & x<0 \\ g_2(x)=1-x\ , & x\geq 0 \end{cases}$$

Calculando $D_{f_1og_1}=\{x\in D_{g_1}\ \Lambda\ g_1(x)\in D_{f_1}\}$

$x\in\ <-\infty,0>\ \Lambda\ x^2\leq 1$ desarrollando $x\in\ <-\infty,0>\ \Lambda\ -1\leq x\leq 1\ \Rightarrow\ x\in[-1,0>$

$(f_1og_1)(x)=f_1(g_1(x))=f_1(x^2)=x^2+2$, $x\in[-1,0>$

Calculando $D_{f_1og_2}=\{x/x\in D_{g_2}\Lambda\ g_2(x)\in D_{f_1}\}$

$x\in[0,+\infty>\ \Lambda\ 1-x\in\ <-\infty,1]$ entonces $x\in[0,+\infty>\ \Lambda\ 0\leq x<\infty\ \Rightarrow\ x\in[0,+\infty>$

$(f_1og_2)(x)=f_1(g_2(x))=f_1(1-x)=1-x+2=3-x$

Calculando $D_{f_2og_1}=\{x/x\in D_{g_1}\Lambda\ g_1(x)\in D_{f_2}\}$

$x\in\ <-\infty,0>\ \Lambda\ x^2\in\ <1,+\infty>$

$x\in\ <-\infty,0>\ \Lambda\ x\in\ <-\infty,-1>\cup<1,+\infty>\ =\ <-\infty,-1>\ \Rightarrow\ x\in\ <-\infty,-1>$

$(f_2og_1)(x)=f_2(g_1(x))=f_2(x^2)=x^2-1$

Calculando $D_{f_2og_2}=\{x/x\in D_{g_2}\Lambda\ g_2(x)\in D_{f_2}\}$

$x\in[0,+\infty>\ \Lambda\ 1-x\in\ <1,+\infty>$ entonces $x\in[0,+\infty>\ \Lambda\ x\in\ <-\infty,0>\ \Rightarrow\ \phi$

$$(fog)(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ \ x<-1 \\ x^2+2 & si\ \ x\in[-1,0> \\ 3-x & si\ \ x\in[0,+\infty> \end{cases}$$

(11) Dadas las funciones: $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\langle-\infty,1] \\ -1, & x\in\langle 1,+\infty\rangle \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x^2-8, & x<0 \\ [|x|], & x\geq 0 \end{cases}$

Calcular (f o g)(x)

Solución

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=x, & x\in\langle-\infty,1] \\ f_2(x)=-1, & x\in\langle 1,+\infty\rangle \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} g_1(x)=x^2-8 & si\ \ x<0 \\ g_2(x)=[|x|] & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

$$D_{fog}=D_{f_1og_1}\cup D_{f_1og_2}\cup D_{f_2og_1}\cup D_{f_2og_2}$$

$$D_{f_1og_1}=\{x/x\in D_{g_1}\wedge g_1(x)\in D_{f_1}\}$$

$$x<0\ \wedge\ x^2-8\in\langle-\infty,1]\ \Rightarrow\ x<0\ \wedge\ -\infty<x^2\leq 9$$

$$\Rightarrow\ x<0\ \wedge\ (-\infty<x^2\ \wedge\ x^2\leq 9)\ \Rightarrow\ x<0\ \wedge\ (R\ \wedge -3\leq x\leq 3)$$

$$\Rightarrow\ x<0\ \wedge\ -3\leq x\leq 3\ \Rightarrow\ x\in[-3,0\rangle$$

$$(f_1og_1)=f_1(g_1(x))=f_1(x^2-8)=x^2-8$$

$$(f_1og_1)(x)=x^2-8,\ \ x\in[-3,0\rangle$$

$$D_{f_1og_2}=\{x/x\in D_{g_2}\wedge\ g_2(x)\in D_{f_1}\}$$

$$x\geq 0\ \wedge\ [|x|]\in\langle-\infty,1]\ \Rightarrow\ x\geq 0\ \wedge\ -\infty<[|x|]\leq 1$$

$$\Rightarrow\ x\geq 0\ \wedge\ -\infty<x<2\ \Rightarrow\ x\in[0,2\rangle$$

$$(f_1og_2)(x)=f_1(g_2(x))=f_1([|x|])=[|x|]$$

$$(f_1og_2)(x)=[|x|],\ \ x\in[0,2\rangle$$

$$D_{f_2og_1}=\{x/x\in D_{g_1}\wedge\ g(x)\in D_{f_2}\}$$

$$x<0\ \wedge\ x^2-8\in\langle 1,+\infty\rangle\ \Rightarrow\ x<0\ \wedge\ 9<x^2<\infty$$

$$x<0\ \wedge\ (9<x^2\ \wedge\ x^2<+\infty)\ \Rightarrow\ x<0\ \wedge(x<-3\ \vee\ x>3)\Rightarrow x\in\langle-\infty,-3\rangle$$

$(f_2 o g_1)(x) = f_2(g_1(x)) = f_2(x^2-8) = -1$

$$(f_2 o g_1)(x) = -1\ ,\ x \in \langle -\infty,-3\rangle$$

$D_{f_2 o g_2} = \{x \,/\, x \in D_{g_2} \wedge\ g_2(x) \in D_{f_2}\}$

$x \geq 0\ \wedge\ [|x|] \in \langle 1,+\infty\rangle \ \Rightarrow\ x \geq 0\ \wedge\ 1 < [|x|] < +\infty$

$\Rightarrow\ x \geq 0\ \wedge\ 2 \leq x < \infty\ \Rightarrow\ x \in [2,+\infty\rangle$

$(f_2 o g_2) = f_2(g_2(x)) = f_2([|x|]) = -1\ ,\ x \in [2,+\infty\rangle$

$(f_2 o g_2)(x) = -1\ ,\ x \in [2,+\infty\rangle$

$$(fog)(x) = \begin{cases} x^2-8 & si\ \ x \in [-3,0\rangle \\ [|x|] & si\ \ x \in [0,2\rangle \\ -1 & si\ \ x \in \langle -\infty,-3\rangle \cup [2,+\infty\rangle \end{cases}$$

(12) Si $f(x) = x^2$ y $(fog)(x) = 4x^2 - 12x + 9$ encontrar dos funciones g(x).

Solución

$(fog)(x) = f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 9$

$g^2(x) = (2x-3)^2 \Rightarrow g(x) = \pm(2x-3) \qquad \therefore\ g_1(x) = 2x-3\ ,\ g_2(x) = -2x+3$

(13) Sí $f(x-1) = x-2$ y $(gof)(x+2) = 2x^2 - x$. Calcular g(x)

Solución

$f(x-1) = x-2 \Rightarrow f(x) = x-1$

$(gof)(x+2) = 2x^2 - x \Rightarrow (gof)(x) = 2(x-2)^2 - (x-2) = 2x^2 - 9x + 10$

$(gof)(x) = 2x^2 - 9x + 10$ de donde $g(f(x)) = 2x^2 - 9x + 10$

$g(x-1) = 2x^2 - 9x + 10 \Rightarrow g(x) = 2(x+1)^2 - 9(x+1) + 10 = 2x^2 - 5x + 3$

(14) Si $f(x)=x^2+2$ y $g(x)=x+a$, determinar el valor de a de modo que (f o g)(3) = (g o f)(a – 1).

Solución

$$(fog)(3)=f(g(3))=f(3+a)=(3+a)^2+2=a^2+6a+11 \qquad \ldots (1)$$

$$(gof)(a-1)=g(f(a-1))=g((a-1)^2+2)$$

$$=g(a^2-2a+3)=a^2-2a+3+a=a^2-a+3 \qquad \ldots (2)$$

Igualando (1) y (2) se tiene: $a^2+6a+11=a^2-a+3 \Rightarrow a=-\dfrac{8}{7}$

(15) Si H(x) = cos 2x y f(x) = sen x encuentre una función g tal que H(x) = (g o f)(x)

Solución

H(x) = (g o f)(x) = g(f(x)) = cos 2x

$$g(\text{sen}\, x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x=1-2\,\text{sen}^2 x \qquad \therefore\ g(x)=1-2x^2$$

2.20. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Calcular f ± g , f.g , f/g , donde f= {(1,2),(3,4),(2,5),(4,1)}; g={(3,-1),(2,1),(1,0)(0,2)}

(2) Calcular f ± g , f.g , f/g , donde f= {(-3,2),(0,0),(2,4),(3,-1),(4,3)} ,

g = {(2,0),(3,4),(4,7),(6,2)}

(3) Si f= {(1,3),(2,6),(4,8),(6,2)} y g = {(1,2),(2,-1),(0,1),(4,5),(7,0)}

Hallar f + g , f – g , f.g , f/g

(4) Si f= {(1,4),(2,5),(3,6),(4,-6),(5,-5)} y g= {(0,8),(1,3),(2,0),(3,7),(4,0),(5,10)}

Calcular f + g , f – g , f.g , f/g

(5) Sean f= {(2,8),(8,4),(6,9),(4,7),(3,6),(1,5)} y g= {(7,1),(3,2),(5,5),(10,5),(1,3)}

Hallar f + g , f – g , f.g , f/g

(6) Sean f = {(4,1),(6,5),(5,4),(8,3),(9,2),} y g = {(8,-5),(2,2),(5,-4)}

Calcular f + g , f − g, f.g , f/g

(7) Calcular f + g , f.g . f/g de las funciones

a) $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\geq 1\\ x^2-2, x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}3x+1, x\leq 8\\ 3x^3, x>10\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}7 \quad , x\leq 10\\ x-1 \ , \ x\geq 11\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}3x-1 \ , \ |x-1|<1\\ x \ , \ x>3\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2 \quad si \quad x>1\\ |x-1| \, si \quad x\leq 1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} \ , \ x\geq -1\\ x^2-1 \ , \ x<-1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2 & si \ \ x\in[-10,-7>\\ 2x & si \ \ x\in[-4,0>\\ 2x^2-2 & si \ \ x\in<0,8>\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x^2+x & , \ si \ \ x\in<-8,-4]\\ -x+3 & , \ si \ \ x\in<-4,0]\\ x^2+2 & , \ si \ \ x\in<0,3]\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}2x-1 \ , \ x\in[0,1>\\ x^2 \quad , \ x\in[2,5>\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}3x \ , \ x\in<-1,1]\\ 2x \ , \ x\in<1,4]\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}|x| \ , \ x\in[-1,3>\\ -2x+3 \ , \ x\in[3,6]\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} \ , \ x\in[1,4>\\ [|x|] \quad , \ x\in[5,7>\end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 \ , \ |x|\leq 2\\ x \quad , \ x>2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x-1 \ , \ 0\leq x\leq 3\\ x+1 \ , \ x<0\end{cases}$

(8) Hallar (f+g)(x) y (f / g)(x) sí: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} \ , \ x\leq 1\\ \sqrt{x} \quad , \ x\geq 4\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}x^2-1 \ , \ x<0\\ x \quad , \ 0\leq x\leq 2\\ x+5 \ , \ x>2\end{cases}$

(9) Hallar (f + g)(x) , donde:

$f(x)=\begin{cases}[|x-1|] \ , \ x\in<-4,-1]\\ [|x|]+1 \ , \ x\in[0,2]\\ |x-2|+3 \ , \ x\in<-1,0>\cup<2,3]\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}5 \ , \ x\in<-3,-1>\\ -2 \ , \ x\in<0,2>\\ -3 \ , \ x\in[-1,0>\cup[2,3>\end{cases}$

(10) Dadas las funciones definidas por: $f(x)=\begin{cases} 4x+[|x|] & , x\in\langle -3,0\rangle \\ |x^2+1|-3 & , x\in\langle 1,6\rangle \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} [|-x|]-5x & , x\in\langle -4,-1] \\ |x-3| & , x\in\langle 0,2] \end{cases}$. Hallar (f + g)(x) y graficar

(11) Hallar (f/g)(x) donde: $f(x)=\begin{cases} |x| & , x\in[-5,-1] \\ 2x & , x\in[1,4] \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} [|x-2|] & , x\in[0,3\rangle \\ x^2 & , x\in[3,6] \end{cases}$

(12) Hallar (f + g)(x) y graficar donde

$$f(x)=\begin{cases} [|x-1|] & , x\in\langle -4,-1] \\ [|x|]+1 & , x\in[0,2] \\ |x-2|+3 & , x\in\langle -1,0\rangle\cup\langle 2,3] \end{cases} ,\quad g(x)=\begin{cases} 7 & , x\in[-3,-1\rangle \\ 1 & , x\in[0,2\rangle \\ -2, & x\in[-1,0\rangle\cup[2,3] \end{cases}$$

(13) Hallar (f + g)(x) y graficar donde

$$f(x)=\begin{cases} sig\ (|x^2-4|) & si\ x^2\le 9 \\ [|\frac{x+6}{3}|] & si\ x^2-12x<-27 \\ x^2+10x+21 & si\ |x-3|>6 \end{cases} ,\quad g(x)=3,\ x\in R-[9,+\infty\rangle$$

(14) Dado las funciones $f(x)=2x-3,\ -1<x\le 3$; $g(x)=x-[|x|]$, $x\in R$, hallar $(\frac{f}{g})(x)$

(15) Dadas las funciones: $f(x)=\begin{cases} [|\frac{25-x}{7-x}|] & , \frac{x+2}{x-4}<0\ \wedge\ x<\frac{5}{2} \\ \sqrt{|x-3|} & , \frac{5}{2}\le x<4 \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} [||x-1|-2|]x^2-2x, & -1<x<2 \\ |x-4| & , 2\le x<9 \end{cases}$. Hallar (f + g)(x) y graficar

(16) Hallar (f+g)(x) y graficar donde

$$f(x)=\begin{cases} [|x^2|]+|x^2-1|-3 & , x\in[-2,2] \\ \frac{2x-1}{x-1} & , x\in\langle 2,4\rangle \end{cases} ,\quad g(x)=\begin{cases} 4-[|x^2|] & , x<2 \\ -2 & , x\ge 2 \end{cases}$$

(17) Dada las funciones $f(x) = 2x - [|\,2x + [|\,x\,|]\,|]$, $\frac{1}{2} \le x < 1$

$g(x) = |\,|\,x - 2\,| - |\,x\,|\,|$, $|x| < 1$; Hallar $(f + g)(x)$

(18) Hallar $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f.g)(x)$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & , \ x \in [-1,1> \\ 5x & , \ x \in <1,6] \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 & , \ x \in [0,3> \\ x-2 & , \ x \in <3,5] \cup [6,8> \end{cases}$$

(19) Hallar $(2f - 4g)(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} [|\,|\,x\,|^3\,|] , & x \in <-1,1> \\ [|\,x-3\,|] , & x \in [1,4> \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{|\,x^2 - 4\,|}{x+2} & , \ x \in <-2,1> \\ [|\,|\dfrac{1}{x}|\,|] - [|\dfrac{2x-1}{3x+5}|] , & x \in [1,10> \end{cases}$$

(20) Calcular $(f + g)(x)$, $(f.g)(x)$, $(f/g)(x)$ y graficar donde

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 , & x \in [0,2] \\ 3 & , x \in [3,5] \end{cases}$; $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [1,4]$

b) $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 3x, & 1 < x < 3 \ ; \\ \cos x , & x > 3 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x , & x < -2 \\ 11 , & 2 < x < 3 \\ 34 , & x < 6 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} [|\,x\,|][|\,x^2 - 4\,|] & , x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 16} & , x \ge 4 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x , & x \le 2 \\ x-1 , & x > 5 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1-2x & , -3 \le x < -1 \\ [|-4 + \cos x\,|] & , x \ge 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ \text{sen } x , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x+3 \ \ si \ \ x \in [-4,0] \\ 3x+2 \ \ si \ \ x \in <0,5> \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x-4 , & x \in [-3,2] \\ 2-x & , x \in <2,8> \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & , x \in [2,4> \\ x^2 - 14x + 48 , & x \in [6,10> \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} [|\dfrac{x}{2}|] , & x \in [1,8> \\ |\,2x - 10\,| , & x \in [8,12> \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases}|x^2-4|\ , & x\in[-6,0]\\ 2\ , & x\in[1,6>\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x+2\ , & x\geq -2\\ 1\ , & x<-2\end{cases}$

h) Si $f(x)=\begin{cases}|x-1|\,[|\,sig(3-x)\,|]\ , & x\in[0,6]\\ x^2\ , & x\in<6,10>\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}|x-2|\ , & x\in<-8,3>\\ x\,|x-2|\ , & x\in<3,8]\end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2x} & si\ \ |x-1|>1\ o\ |x-1|<3\\ x^2-4x-4\,sig(|x|-3)\ , & x\in[0,2]\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}[|\dfrac{2}{x^2+1}|],\ si\ x<3\\ \dfrac{x^2+x+1}{x-1},\ si\ x\in[5,10>\end{cases}$

j) Si $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+16}\ , & x\in<-4,-2>\\ [|x|]-2x\ , & x\in[-1,2>\\ |x^2+2|\ , & x\in<4,6>\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2x+4\ , & x\in<-3,-1>\\ |x^2-2|\ , & x\in[-1,5>\end{cases}$

(21) Determinar fog , cuando f = {(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)} y g = {(4,1),(1,2),(6,3),(0,-2)}

(22) Determinar fog , gof , cuando: f = {(0,1),(1,2),(2,3),(4,3),(5,2)}

g = {(6,7),(5,4),(4,3),(2,4),(1,4),(0,7)}

(23) Hallar gof sí: f = {(2,5),(3,4),(6,2),(5,0),(1,7)} y g = {(4,8),(5,3),(0,9),(2,2),(7,4)}

(24) Hallar gof sí: f = {(2,5),(5,7),(3,3),(8,1)} y g = {(1,2),(2,3),(4,5),(6,7)}

(25) Si $f(x)=\begin{cases}3x-2\ , & x\in[-4,4>\\ x\ , & x\in[4,6]\end{cases}$; $g(x)=x^2+1$. Hallar (fog)(x)

(26) Consideremos las funciones reales de variable real

$g(x)=\begin{cases}x^2\ , & x<0\\ 1-x\ , & x\geq 0\end{cases}$; $f(x)=\begin{cases}x+2\ , & x\leq 1\\ x-1\ , & x>1\end{cases}$. Hallar fog

(27) Sean las funciones f y g definidas por:

$f(x)=\begin{cases}x^2-5x\ , & x<-2\\ |x-2|-2x\ , & x\geq -2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2x-4\ , & x>-2\\ x^2+3x\ , & x\leq -2\end{cases}$

Hallar: f(0) + g(0) , f(1) f(-3) , (fog)(-2) , $\frac{f(-4)}{g(-1)}$, (gof)(3) , (gog)(-3/2)

(28) Hallar fog sí $f(x)=2x^2+1$, x ∈ <-2,20>, $g(x)=\begin{cases}-x+1 & , x\in<-\infty,-2> \\ 2x & , x\in<6,\infty>\end{cases}$

(29) Hallar fog sí f(x) = 3x + 2 , $D_f=<-\infty,3>$, $g(x)=\begin{cases}2x & , x\leq 0 \\ -3x & , x\geq 1\end{cases}$

(30) Determinar gof si, $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , x\leq -1 \\ x+2 & , x\geq 2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x & , x\leq 0 \\ 2x & , x>0\end{cases}$

(31) Hallar fog sí , $f(x)=\begin{cases}x & , x<-1 \\ -1 & , 1\leq x<2 \\ 1 & , x\geq 4\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2 & , x<1 \\ 1 & , x\geq 2\end{cases}$

(32) Hallar fog y gof , donde, $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , x\in[0,2] \\ x & , x\in<3,5]\end{cases}$, $g(x)=\sqrt{x}$

(33) Si $H(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ y $(Hof)(x)=\sqrt{[|x|]+3}$. Calcular f(x)

(34) Calcular (fog)(x) , donde $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & , x<3 \\ \sqrt{x^2+1} & , x\geq 3\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x & , x\geq 4 \\ |x|-x & , x\leq 0\end{cases}$

(35) Calcular fog y graficar sí: $g(x)=\begin{cases}[|x|] & , x<0 \\ x^2-1 & , x\geq 0\end{cases}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$, $-1\leq x<2$

(36) Calcular fog , donde, $g(x)=\begin{cases}2x-5 & , x<2 \\ -x-2 & , x\geq 2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2-2x & , x<1 \\ e^x & , x\geq 1\end{cases}$

(37) Si $f(x)=\sqrt{2x-1}$ y $g(x)=\sqrt{2x^2-7}$. Hallar la función h tal que f o h = g

(38) Dadas las funciones $f(x)=2x-[|2x+[|2x|]|]$, $\frac{1}{2}\leq x<1$

g(x) = | | x + 2 | - | x | , |x| < 1. Hallar fog , gof

(39) Sean $f(x)=2x^2-1$, $g(x)=4x^3-3x$, x ∈ R, probar que fog = gof

(40) Si f(x+1) = 3x+1, g(x) = 2x-3, hallar (fog)(x+1)

(41) Sean $f(x)=\begin{cases} x^2 & , <1 \\ -x^3 & , x\ge 2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x & , x<2 \\ 2x & , x\ge 4\end{cases}$, hallar gof

(42) Hallar fog y gof si existen, donde

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & , x\in<-1,1> \\ |x^2+1| & , x\in<1,2> \end{cases} \quad , g(x)=\begin{cases} [|x|] & , x\in[0,1> \\ \sqrt{x^2-1}, & x\in[1,3> \end{cases}$$

(43) Hallar (f o g o h)(x) si $f(x)=x^2+2x+1$, g(x) = x – 2, h(x) = x – 3

(44) Sean f(x) = ax + 2, g(x) = x – 6, a ≠ 0, b ≠ 0 si fog = gof hallar b(a-1)

(45) Sean $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1} & , -1<x\le 3 \\ x/2 & , 4<x\le 6 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} x^2[|x^2|]-2|x|, & \text{si } \sqrt{2}<x\le 0 \\ x[|x-3|]+2 & , \text{si } 2<x<4 \end{cases}$

Hallar fog si existe

(46) Dadas las funciones f y g definidas por: $f(x)=\begin{cases} [|\dfrac{|x|-2}{3-x}|], & x\in<-1,1> \\ \sqrt{x^2+2x} & , x\in[1,2> \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & , x\in[-2,-1> \\ |-1| & , x\in<0,3> \end{cases}$. Calcular (fog)(x) y (gof)(x)

(47) Determinar gof sí $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-3,0] \\ x^2 & , x\in<0,5] \end{cases}$, g(x) = x – 15, x ∈ <-10 , 9]

(48) Sean $f(x)=[|x|]$ y $g(x)=\begin{cases} [|x-4|] & , x\ge 0 \\ x^2 & , x<0 \end{cases}$. Hallar: $h(x)=\begin{cases} (fog)(x^2) & , x\le 0 \\ (gof)(\sqrt{x}) & , x>0 \end{cases}$

(49) Si F(x) = ctgx y g(x) = cosecx encontrar una función f tal que F(x) = (fog)(x)

(50) Si $(gof)(x+2)=2x^2-x$ y $f(x-1)=x-2$ Calcular g(x).

(51) Si $(fog)(x-1)=x^2-2x$ y $g(x)=x+3$ Determinar f(x).

(52) Dadas las funciones f,g: R ⟶ R, definidas por:

$f(2x+3)=4x+1$ y $g(x)=x^2+3$. Determinar (f o g)(x) y (g o f)(x)

(53) Si $F(x)=(1-\cos 2x)\sec x$ y $f(x)=\operatorname{sen} x$. Hallar una función g tal que F(x) = (gof)(x)

(54) Si $F(x)=\cos^2 x$ y $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, hallar una función g tal que F(x) = (fog)(x)

(55) Si $F(x)=\operatorname{sen} 2x$ y $g(x)=\cos x$, encontrar una función f tal que F(x) = (fog)(x)

(56) Determinar gof si, $f(x)=\begin{cases}0 & , x<0\\ x^2 , & x\in[0,1]\\ 0 & , x>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & , x<-0\\ 2x , & x\in[0,1]\\ 1 & , x>1\end{cases}$

(57) Si $f(x)=4x-x^2$, $0\le x\le 7$, $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & , x\le 0\\ x+2 & , x>2\end{cases}$, hallar (gof)(x)

(58) Si (gof)(x) = x+2 , $f(x)=x^3+6x^2+12x+8$, hallar g(x).

(59) Dadas las funciones $f(x)=|x^2-1|$ y $g(x)=\sqrt{9-x^2}$. Determinar (gof)(x)

(60) Si $f(x)=\begin{cases}[|x-1|] , & 0<x\le 3\\ \sqrt{|1-x|-2} , & x>3\end{cases}$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$, determinar gof

(61) Hallar fog , siendo $f(x)=\begin{cases}2x-1 , & -4\le x\le 4\\ [|x|] , & x>4\end{cases}$, $g(x)=x^3-2x$

(62) Si $g(2-x)=\sqrt{x-1}$ y (gof)(x) = 2x-1, hallar f(x)

(63) Si $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , si\ x\ es\ par\\ 2x & , si\ x\ es\ impar\\ 0 & , si\ x\ no\ es\ entero\end{cases}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{[|x|]^2-[|x|]}}{[|x|]-\frac{1}{2}}$. Hallar gof si es que existe.

(64) Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x)=\begin{cases}|\dfrac{x}{1-x}| & , \text{si } x<-2\\ (x+2)^2 & , \text{si } x\in[-2,-1]\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+6|}{|x+3|-3} & , \text{si } x\in<-4,-1>\\ \sqrt{5-x}-2 & , \text{si } x\in<-1,5>\end{cases}$$

Hallar las funciones (fog)(x) y (gof)(x)

(65) Sean las funciones f y g definidas en R, tales que:

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & , x\le 1\\ (x-1)^2+3 & , x>1\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}x^2-2 & , x>2\\ x-5 & , x\le 2\end{cases}$$

Hallar las funciones (fog)(x), (gof)(x)

(66) Sean las funciones $f(x)=\begin{cases}x^2 & , x<1\\ -x & , x\ge 2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x & , x<2\\ 2x & , x\ge 4\end{cases}$. Hallar gof

(67) Hallar gof, si f y g son funciones reales, tales que:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & , x<1\\ -x^2 & , x\ge 4\end{cases} \quad y \quad g(x)=\begin{cases}x-1 & , x<2\\ 2 & , x\ge 4\end{cases}$$

(68) Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x & si\ x\le 3\\ -x^2+3 & si\ x>3\end{cases} \quad y \quad g(x)=\begin{cases}x-1 & , x<2\\ 2 & , x\ge 4\end{cases}$$. Hallar fog y su rango

(69) Sean las funciones f y g definida por:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & , x<1\\ -x^2 & , x\ge 4\end{cases} \quad y \quad g(x)=\begin{cases}x^2-4 & , x\in[0,4]\\ 0 & , x\in<4,7>\end{cases}$$. Hallar fog

(70) Dada las funciones f y g definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \ , & x<1 \\ -x^2 \ , & x\geq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x^2-4 \ , & x\in[0,4] \\ 0 \ , & x\in\langle 4,7\rangle \end{cases}$$

(71) Dadas las funciones f y g definidas en R por:

$$f(x)=\begin{cases} sig(|x^2-4|) & si \ |x|\leq 3 \\ \left[\left|\left|\dfrac{x+6}{3}\right|\right|\right] & si \ x\in\langle 3,9\rangle \\ x^2+10x+21 & si \ |x-3|>6 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=3 \ , \ x\in\langle -\infty,9\rangle$$

Construir la gráfica de f + g, indicando explícitamente su rango.

(72) Hallar fog, siendo $f(x)=\begin{cases} x^2+1 \ , & x<\sqrt{3} \\ x \ , & x\geq\sqrt{3} \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-2x} & si \ x(x-2)\geq 0 \\ [|x|] & si \ x(x-2)<0 \end{cases}$

(73) Hallar fog, siendo: $f(x)=\begin{cases} x & si \ x\in\langle -\infty,1] \\ -1 & si \ x\in\langle 1,+\infty\rangle \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} x^2-4 \ , & x\in[0,4] \\ 0 \ , & x\in\langle 4,7\rangle \end{cases}$

(74) Hallar fog siendo: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 \ , & -3\leq x\leq -1 \\ 1 \ , & -1<x<1 \\ \dfrac{1}{x} \ , & x\geq 1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} x^2-4 \ , & x\in[0,4] \\ 0 \ , & x\in\langle 4,7\rangle \end{cases}$

(75) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ y g(x) = 1 – x determinar los dominios de las composiciones fog y gof.

(76) Si $g(2-x)=\sqrt{x-1}$ y (g o f)(x) = 2x – 1, Hallar la función f(x)

(77) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ y g(x) = 1 – x, determinar los dominios de las composiciones fog y gof y sus reglas correspondientes.

(78) Hallar (fog)(x) si: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3\le x\le -1 \\ 1, & -1<x<1 \\ \frac{1}{x}, & x\ge 1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -1, & x\le 0 \\ 3x+2, & x>0\end{cases}$

(79) Si $f(x)=\sqrt{x^2-16}$ y $g(x)=\frac{x^2}{x+2}$, Hallar (fog)(x)

(80) Sean las funciones f y g definidas por: $f(x)=\begin{cases} x^2+3x, & si\ \ x\le 3 \\ -x^2+3, & si\ \ x>3\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 3-x, & si\ \ x\le 1 \\ 5-x, & si\ \ x>1\end{cases}$

Hallar (fog)(x).

(81) Si $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x\in <-2,2> \\ |2x^2+3|, & x\in <2,3>\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} [|x-1|], & x\in [0,1> \\ \sqrt{x^2-1}, & x\in [1,3>\end{cases}$ Hallar (fog)(x) si es que existe

(82) Si $f(x)=x^2+2x+2$, hallar la función g(x) tal que $(fog)(x)=x^2-4x+5$

(83) Hallar (fog)(x) si $f(x)=\begin{cases} x, & x\in <-\infty,1] \\ -1, & x\in <1,+\infty>\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^2-8, & x<0 \\ [|x|], & x\ge 0\end{cases}$

(84) Si $f(x)=\begin{cases} [|x-1|], & 0<x\le 3 \\ \sqrt{|1-x|-2}, & x>3\end{cases}$ y $g(x)=\frac{x+1}{x-4}$, calcular (gof)(x)

(85) Sean f y g dos funciones, tales que: $f(x)=\begin{cases} [|\frac{|x|-2}{3-x}|], & x\in <-1,1> \\ \sqrt{x^2+2x}, & x\in [1,2>\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases} \frac{2}{x-1}, & x\in [-2,-1> \\ |x-1|, & x\in <0,3>\end{cases}$. Hallar fog, si es que existe.

(86) Si $H(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ y $(HoF)(x)=\sqrt{[|x|]+3}$ calcular F(x)

(87) Dados $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\in [0,1] \\ x^2+1, & x\in <-\infty,0>\cup <1,+\infty>\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^3, & x\in [-1,1] \\ 2x+[|x|]x^2, & x\in [3,4]\end{cases}$. Hallar (fog)(x) si es que existe.

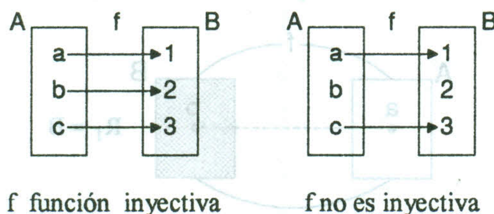
2.21 FUNCIONES: INYECTIVAS, SURYECTIVAS Y BIYECTIVAS.-

a) Función Inyectiva.-

La función f: A → B es inyectiva (univalente) si a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango, es decir, si existen dos elementos $x_1 , x_2 \in D_f$ distintos $x_1 \neq x_2$ cuyas imágenes son distintas $f(x_1) \neq f(x_2)$ lo que es equivalente a decir:

Si $x_1, x_2 \in D_f \; : \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ que es la forma más práctica para determinar si una función es inyectiva.

Ejemplo.-



f función inyectiva f no es inyectiva

Ejemplo.- Determinar que la función f(x) = 5x + 3 es inyectiva.

Solución

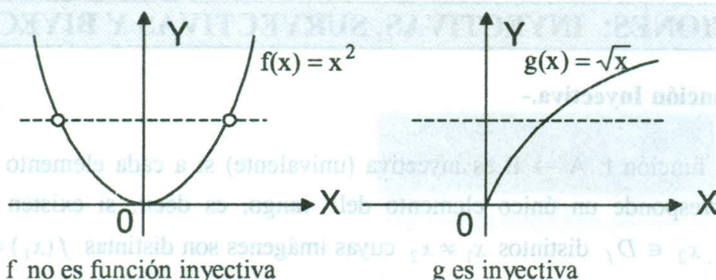
f es inyectiva sí $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

$$\therefore f(x) = 5x + 3 \text{ es inyectiva}$$

Observación.- En forma gráfica se puede determinar si una función es inyectiva o no, para esto tracemos una recta paralela al eje X, si dicha recta corta a la gráfica en dos partes o más, entonces la función f no es inyectiva y si corta en un solo punto, entonces la función f es inyectiva.

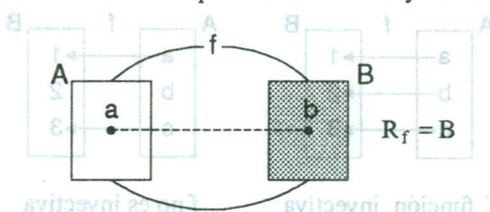
Ejemplo.- Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$



f no es función inyectiva g es inyectiva

b) Función suryectiva.-

La función f: A → B, es suryectiva (o sobre) si y solo si, ∀ y ∈ B, existe x ∈ A tal que y = f(x); esto quiere decir que todo elemento de B es imagen por lo menos de un elemento de A es decir que f: A → B es suryectiva si $R_f = B$



Ejemplo.- La función f: [0,∞> → [0,∞> tal que $f(x)=\sqrt{x}$ es suryectiva puesto que $R_f = [0,\infty>$

Ejemplo.- Determinar si la función f(x) = 3x+5 es suryectiva.

Solución

Como f: R → R / f(x) = 3x+5

y = 3x+5 despejamos x es decir $x=\frac{y-5}{3}$ Luego ∀ y ∈ R, $\exists x=\frac{y-5}{3}$

Tal que $f(x)=f(\frac{y-5}{5})=3(\frac{y-5}{5})+5=y$ entonces f es suryectiva.

c) Función Biyectiva

La función f: A → B se llama función biyectiva, si la función f es inyectiva y suryectiva simultáneamente.

Ejemplo.- Determinar si la función f: [0,2> → <-∞,0] tal que $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ es biyectiva.

Solución

i) Veremos si f es inyectiva, es decir: $f(x)=f(x_1)\ \Rightarrow\ x=x_1$

$$\frac{x}{x-2}=\frac{x_1}{x_1-2}\ \Rightarrow\ x\,x_1-2x=x_1x-2x_1$$

$-2x_1=-2x_2\ \Rightarrow\ x_1=x_2$ por lo tanto f es inyectiva.

ii) Ahora veremos si f es suryectiva, para esto es suficiente ver si el rango de f coincide con el conjunto de llegada.

$$y=\frac{x}{x-2}\ \Rightarrow\ x=\frac{2y}{y-1}\in[0,2>\ \Rightarrow\ 0\le\frac{2y}{y-1}<2$$

$$0\le\frac{2y}{y-1}<2\ \Leftrightarrow\ 0\le\frac{2y}{y-1}\wedge\frac{2y}{y-1}<2\ \Leftrightarrow\ 0\le\frac{y}{y-1}\wedge\frac{1}{y-1}<0$$

+ (0) - (1) + ∧ - (1) +

y ∈ <-∞,0], luego $R_f=<-\infty,0]$ entonces f es suryectiva.

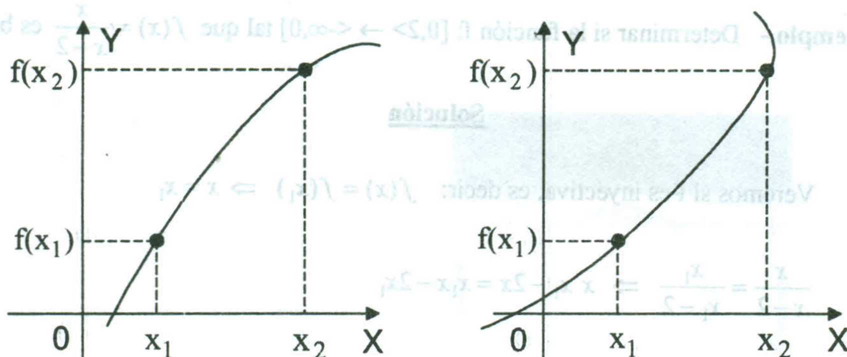
Como f es inyectiva y suryectiva entonces f es biyectiva.

2.22. FUNCIONES CRECIENTES, DECRECIENTES Y MONÓTONAS.-

a) Función Creciente.

La función f se llama creciente si para todo $x_1, x_2 \in D_f$ se tiene:

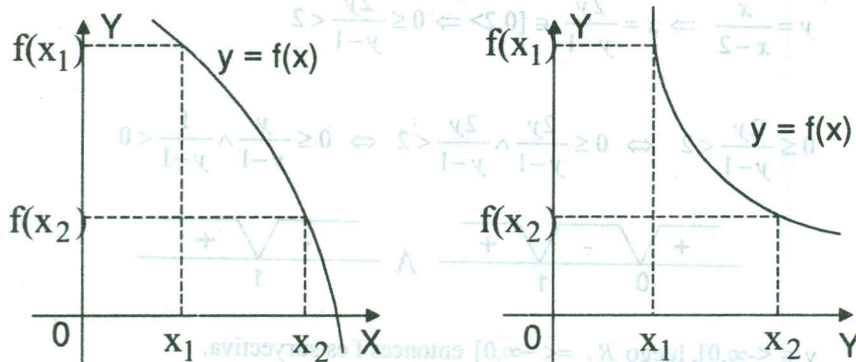
$$x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$$



b) Función Decreciente.

La función f se llama decreciente si para todo par $x_1, x_2 \in D_f$ se tiene:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



c) Función Monótona.

La función f se llama monótona si la función f es creciente o decreciente

d) Teorema.- Si una función f es creciente, entonces f es inyectiva (univalente).

<u>**Demostración**</u>

Sean $x_1, x_2 \in D_f$, tales que $x_1 \neq x_2$, de donde se tiene $x_1 < x_2$ ó $x_2 < x_1$

Si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ por ser f creciente

Si $x_2 < x_1$ entonces $f(x_2) < f(x_1)$ por ser f creciente

Por lo tanto en ambos casos se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$ es decir, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Luego la función f es inyectiva.

e) **Teorema.-** Si una función es decreciente, entonces f es inyectiva (univalente).

Demostración

La demostración se hace en forma similar al teorema anterior.

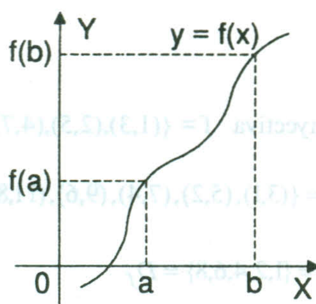
2.23 CÁLCULO DE RANGOS DE FUNCIONES INYECTIVAS MONÓTONAS.-

Cuando las funciones dadas son inyectivas su rango se encuentra en forma muy práctica de la siguiente manera:

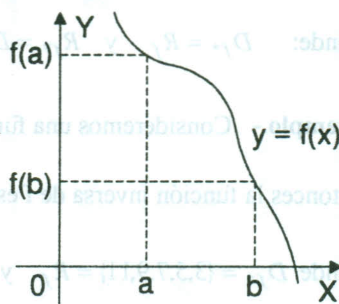
Sea la función inyectiva cuyo $D_f = [a,b]$ entonces se tiene:

Si f es creciente se tiene: $R_f = [f(a), f(b)]$; Fig (a)

Si f es decreciente se tiene: $R_f = [f(b), f(a)]$; Fig(b)



Fig(a)

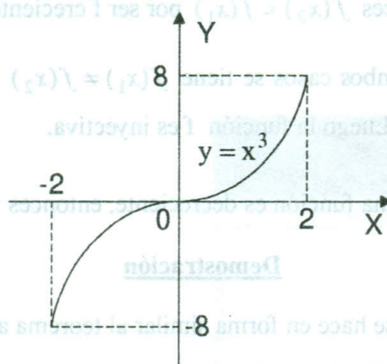


Fig(b)

Ejemplo.- Calcular el rango de $f(x) = x^3$ para x $\in[-2,2]$.

Solución

f es inyectiva y creciente entonces $R_f = [f(-2), f(2)] \Rightarrow R_f = [-8,8]$



2.24 FUNCIÓN INVERSA.-

a) Definición.- Consideremos la función: $f=\{(x,f(x))/x\in D_f\}$ con dominio D_f y rango R_f entonces diremos que existe la función inversa de f, si y solo si, f es inyectiva.

A la función inversa de f denotaremos por f^* ó f^{-1}, la cual es definida en la forma siguiente:

$$f^*=\{(f(x),x)/x\in D_f\}$$

donde: $D_{f^*}=R_f$ y $R_{f^*}=D_f$

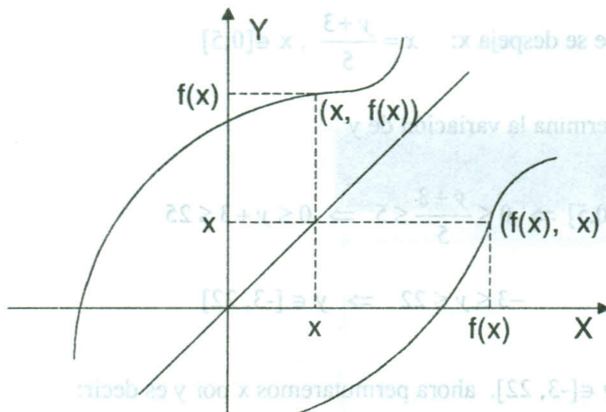
Ejemplo.- Consideremos una función inyectiva f = {(1,3),(2,5),(4,7),(6,9),(8,11)}

entonces la función inversa de f es: $f^*=\{(3,1),(5,2),(7,4),(9,6),(11,8)\}$

donde $D_{f^*}=\{3,5,7,9,11\}=R_f$ y $R_{f^*}=\{1,2,4,6,8\}=D_f$

b) Gráfico de la Función Inversa

Consideremos una función f y su inversa f^*, el gráfico de la función inversa f^* es simétrica a la función f con respecto a la función identidad I(x) = x por tal motivo dicho gráfico se obtiene por reflexión con respecto a la recta I(x) = x.



c) Propiedad Fundamental de las Funciones Inversas

Sí f: A→B es una función inyectiva y $f^*: B \to A$ es la función inversa de f entonces:

$$f^*(f(x)) = x \quad , \quad \forall x \in D_f$$
$$f(f^*(x)) = x \quad , \quad \forall x \in D_{f^*}$$

d) Cálculo de la función Inversa

Sea f: A→B una función inyectiva, entonces a la función inversa $f^*: B \to A$ se puede hallar resolviendo la ecuación $f(f^*(x)) = x$

Ejemplo.- Hallar la inversa de la función f(x) = 7x + 3

Solución

$$f(f^*(x)) = x \quad \Rightarrow \quad 7f^*(x) + 3 = x \qquad \therefore \quad f^*(x) = \frac{x-3}{7}$$

También la inversa de una función inyectiva se puede obtener en la forma siguiente:

Ejemplo.- Hallar la inversa de la función f(x) = 5x-3 sí x ∈[0,5]

Solución

Como y = f(x) ⇒ y = 5x - 3, x ∈ [0,5]

Primeramente se despeja x: $x=\frac{y+3}{5}$, x $\in[0,5]$

Luego se determina la variación de y

$$x=\frac{y+3}{5}\in[0,5] \Rightarrow 0\le\frac{y+3}{5}\le 5 \Rightarrow 0\le y+3\le 25$$

$$-3\le y\le 22 \Rightarrow y\in[-3,22]$$

$x=\frac{y+3}{5}$, y $\in[-3, 22]$. ahora permutaremos x por y es decir:

$y=\frac{x+3}{5}$, x $\in$ [-3, 22]. Por lo tanto $f^*(x)=\frac{x+3}{5}$, x $\in$ [-3, 22]

2.25 FUNCIÓN INVERSA DE UNA COMPOSICIÓN.-

Si dos funciones f y g son inyectivas y la función composición f o g existen entonces la función f o g es inyectiva por lo tanto tiene inversa (f o g)* en este caso tiene la siguiente propiedad. (f o g)* = g* o f*

2.26. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① Determinar si la función es inyectiva $f(x)=\sqrt{\frac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}$

Solución

Simplificado $3x^{3/2}+2x^{1/2}=\sqrt{x(3x+2)}$ de aquí se tiene que x>0 $\Rightarrow$ |x| = x entonces

$$f(x)=\sqrt{\frac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}=\sqrt{\frac{3x+2}{\sqrt{x}(3x+2)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

debemos probar que f(a) = f(b) $\Rightarrow$ a = b con lo cual se determina que es inyectiva.

f(a) = f(b) $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{a}}=\frac{1}{\sqrt[4]{b}} \Rightarrow$ a = b. Por lo tanto f es inyectiva.

(2) Demostrar que f es inyectiva donde $f(x) = 5^x$, $\forall$ x $\in$ R.

Solución

Debemos probar que: f(a) = f(b) $\Rightarrow$ a = b

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 5^a = 5^b \Rightarrow a = b$$

Por lo tanto f es inyectiva.

(3) Dada la función $f(x) = x + \sqrt{x^2+7}$, x $\in$ [-3,3], demostrar que f es inyectiva.

Solución

Probaremos que f(a) = f(b) $\Rightarrow$ a = b

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a + \sqrt{a^2+7} = b + \sqrt{b^2+7}$$

$$a - b = \sqrt{b^2+7} - \sqrt{a^2+7}$$, elevando al cuadrado:

$$(a-b)^2 = (\sqrt{b^2+7}\sqrt{a^2+7})^2$$

$$ab + 7 = \sqrt{a^2+7}\sqrt{b^2+7}$$, elevando al cuadrado:

$$a^2b^2 + 14ab + 49 = a^2b^2 + 7a^2 + 7b^2 + 49$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b \qquad \therefore \text{ f es inyectiva}$$

(4) La función f: R $\to$[0,+∞> definida por $f(x) = 5x^2$. ¿Es f suryectiva?

Solución

Debemos de comprobar que: $\forall$ y $\in$[0,+∞> , $\exists$ x $\in$ R tal que f(x) = y

pero como $y = 5x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y/5}$, entonces:

$\exists x = \pm\sqrt{y/5}$, y $\in$[0,∞> tal que $f(x) = f(\pm\sqrt{y/5}) = 5(\pm\sqrt{y/x})^2 = y$

$\therefore$ f(x) = y $\Rightarrow$ f es suryectiva.

(5) Determinar si la función $f(x)=x+1-[|x|]$, x ∈ R es inyectiva.

Solución

Definimos él [| x |] , ∀ x ∈ R

$[|x|]=k \iff k \le x < k+1$, k ∈ Z. Luego la función f(x) queda definida

$$f(x)=\begin{cases} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x+3 & , x\in[-2,-1> \\ x+2 & , x\in[-1,0> \\ x+1 & , x\in[0,1> \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \end{cases}$$

Luego la función f(x) es la unión de una familia de funciones lineales donde cada una de las cuales es inyectiva, es decir:

$f(x)=x+1-[|x|] \Rightarrow$ f(x) = x + 1 – k

Probaremos que si f(a) = f(b) ⇒ a = b

f(a) = f(b) ⇒ a + 1 – k = b + 1 – k ⇒ a = b

Por lo tanto cada función f(x) sea inyectiva falta ver que la intersección de los rangos de dos en dos es el vacío.

$f_k(x)=x+1-k$

x ∈ [k, k +1> ⇒ k ≤ x < k +1 ⇒ k + 1 ≤ x + 1 < k + 2 ⇒ 1 ≤ x + 1 – k < 2

$$1\le f_k(x)<2 \qquad \therefore \quad y\in[1,2> \Rightarrow R_{f_k}=[1,2>$$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} f_k(x)=[1,2>\neq\phi$. por lo tanto f(x) no es inyectiva.

(6) Determinar sí la función f: <-4,3] ⟶ [-9,13> definida por f(x) = -2x + 1 es biyectiva.

Solución

Veremos si f es inyectiva, es decir: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\begin{cases} f(x_1) = -2x_1 + 1 \\ f(x_2) = -2x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow -2x_1 + 1 = -2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$ Por lo tanto f es inyectiva.

Ahora veremos si f es suryectiva, es decir: $R_f = [-9,13>$

Como $y = -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1-y}{2} \in <-4,3]$

$$-4 < \frac{1-y}{2} \leq 3 \Rightarrow -8 < 1 - y \leq 6 \Rightarrow -9 \leq -y \leq 5 \Rightarrow -5 \leq y < 9$$

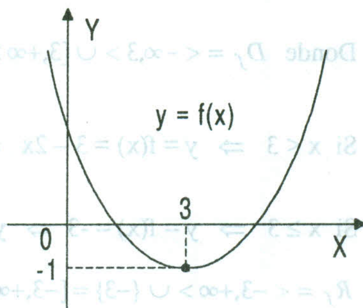
$\therefore\ R_f = [-5,9> \neq [-9,13>$, por lo tanto f no es suryectiva,

Luego la función f no es biyectiva.

(7) Determinar el dominio de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ para que la función f sea biyectiva.

Solución

El dominio de una función cuadrática para que sea inyectiva se determina completando cuadrado es decir:
$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$ que es una parábola con vértice en el punto (3,-1) por lo tanto f es inyectiva si $D_f = [3,+\infty>$ ó para $D_f = <-\infty,3]$



(8) Si existe f o g, donde f y g son inyectivas. Demostrar que f o g es inyectiva.

Demostración

Como f y g son inyectivas, entonces: $\begin{cases} f(x_1) = f(x_2) \\ g(x_3) = f(x_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 & \dots (1) \\ x_3 = x_4 & \dots (2) \end{cases}$

Probaremos que f o g es inyectiva, es decir:

$(fog)(x_1) = (fog)(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$

$(fog)(x_1) = (fog)(x_2) \quad \Rightarrow \quad f(g(x_1)) = f(g(x_2))$

$\Rightarrow \quad g(x_1) = g(x_2)$, por ser f inyectiva.

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$, por ser g inyectiva.

Como $(fog)(x_1) = (fog)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, entonces f o g es también inyectiva.

(9) Si f: R ⟶ B es una función suryectiva. Tal que f(x) = |x – 3| - x, Hallar el conjunto B.

Solución

Se conoce que $|x-3| = \begin{cases} x-3 \ , & x \geq 3 \\ 3-x \ , & x < 3 \end{cases}$

Luego a la función f expresaremos así: $f(x) = \begin{cases} -3 \ , & x \geq 3 \\ 3-2x \ , & x < 3 \end{cases}$

Donde $D_f = <-\infty,3> \cup [3,+\infty>$, ahora calculamos el rango

Si $x < 3 \Rightarrow y = f(x) = 3 - 2x \Rightarrow x = \dfrac{3-y}{2} < 3 \Rightarrow y > -3 \Rightarrow y \in <-3,+\infty>$

Si $x \geq 3 \Rightarrow y = f(x) = -3 \Rightarrow y = -3$

$R_f = <-3,+\infty> \cup \{-3\} = [-3,+\infty>$

Por lo tanto la función f es suryectiva cuando: B = [-3,+∞>

(10) Si la función f es creciente en todo su dominio demostrar que f es inyectiva.

Solución

Aplicaremos la definición siguiente de función inyectiva f es inyectiva, si $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in D_f$

Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2\ \vee\ x_2 < x_1$ pero f es creciente entonces: $f(x_1) < f(x_2)\ \vee\ f(x_2) < f(x_1)$ de donde $f(x_1) \neq f(x_2)$ por lo tanto f es inyectiva.

(11) Demostrar que la función f es inyectiva, donde: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x}}, & \text{si } x \in \langle 4,+\infty \rangle \\ -x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Solución

Primeramente veremos si $f_1(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ y $f_2(x) = -x^2$ son inyectivas.

$$\forall\ x_1, x_2 \in D_{f_1} \Rightarrow f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x_1}} = \frac{2}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto $f_1(x)$ es inyectiva.

$$\forall\ x_1, x_2 \in D_{f_2} \Rightarrow f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow -x_1^2 = -x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto $f_2(x)$ es inyectiva.

Ahora veremos que $R_{f_1} \wedge R_{f_2} = \phi$

Para $x \in \langle 4,+\infty \rangle \Rightarrow y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = \dfrac{4}{y^2}$

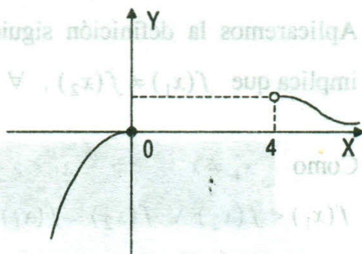
$$x = \frac{4}{y^2} \in \langle 4,+\infty \rangle \Rightarrow \frac{4}{y^2} > 4 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow y \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow R_{f_1} = \langle 0,1 \rangle$$

para $x < 0 \Rightarrow y = -x^2 \Rightarrow x = -\sqrt{-y} < 0 \Rightarrow \sqrt{-y} > 0 \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow y < 0$

$R_{f_2} = \langle -\infty, 0 \rangle$

$R_{f_1} \wedge R_{f_2} = <0,1> \wedge <-\infty,0> = \phi$

Por lo tanto es inyectiva.



(12) Determinar si es inyectiva la siguiente función $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x^3} & , x<0 \\ -5x^2+7x-3 & , x>0 \end{cases}$

Solución

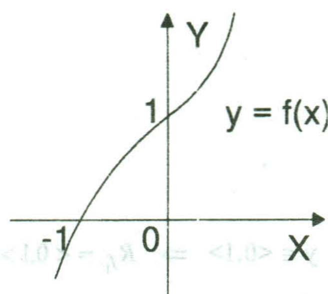
La función $f_1(x)=\sqrt{-x^3}$, x < 0, es inyectiva.

La función $f_2(x)=-5x^2+7x-3$, x > 0 no es inyectiva. Por lo tanto la función no es inyectiva.

(13) Hallar la inversa $f^{-1}(x)$ si existe, de la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , x\leq 0 \\ x^2+1 & , x>0 \end{cases}$

Solución

Graficando a la función f(x) se tiene: Si $x \leq 0 \Rightarrow R_{f_1} = <-\infty,1]$



$x>0 \Rightarrow R_{f_2} = <1,+\infty>$ además cada función $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son inyectivas, y como $R_{f_1} \wedge R_{f_2} = \phi$ entonces f(x) es inyectiva.

Por lo tanto existe la inversa de f(x). Ahora calculamos la inversa de f(x)

Si $x \leq 0$, $f_1(x)=2x+1$

Para esto: $f_1(f_1^*(x))=x$

$x \in <-\infty,1]$, $2f_1^*(x)+1=x$, de donde $f_1^*(x)=\dfrac{x-1}{2}$, $x \leq 1$

Sí x > 0, $f_2(x) = x^2 + 1$

para esto: $f_2(f_2^*(x)) = x$, $x \in \langle 1,+\infty\rangle$

$f_2^{*2}(x) + 1 = x$, de donde $f_2^*(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in \langle 1,+\infty\rangle$

por lo tanto: $f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & , x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & , x > 1 \end{cases}$

(14) Probar que $f(x) = 4\sqrt{x} - x$ para $0 \le x \le 1$, posee inversa y hallar la función inversa si es que existe.

Solución

Para que f(x) tenga inversa debe de ser inyectiva y para esto debe cumplir que:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$4\sqrt{x_1} - x_1 = 4\sqrt{x_2} - x_2 \Rightarrow 4(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) - (x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow 4(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) - (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(4 - \sqrt{x_1} - x_2) = 0$

Como $0 \le x_1 \le 1 \Rightarrow 4 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_1} \ne 0$

Luego $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ por lo tanto

f(x) es inyectiva entonces existe f*(x), ahora calculamos la inversa f*(x) para esto:

f(f*(x)) = x, $x \in [0,3]$

despejando f*(x) se tiene: $f^*(x) = (2 + \sqrt{4-x})^2$, $x \in [0,3]$

(15) Hallar f*(x) si existe donde $f(x) = \begin{cases} -x[|1 - \dfrac{x}{2}|] & \text{si } -2 < x < 0 \\ |x^2 - 1| - 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$

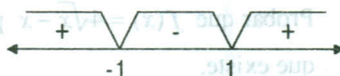
Solución

Primeramente definiremos el máximo entero $[|1-\frac{x}{2}|]$ y el valor absoluto $|x^2-1|$ en cada intervalo $[|1-\frac{x}{2}|]=1+[|-\frac{x}{2}|]=1+0=1$

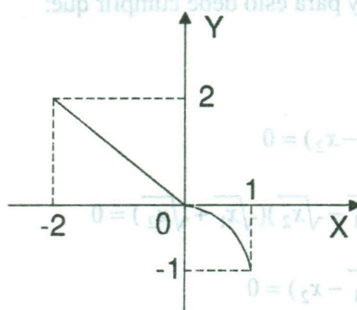
Como $-2 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 2$

$$\Rightarrow 0 < -\frac{x}{2} < 1 \Rightarrow [|-\frac{x}{2}|]=0$$

$$\Rightarrow x^2-1=(x+1)(x-1)$$



Para $0 \le x < 1 \Rightarrow |x^2-1|=1-x^2$ por definición



Por lo tanto la función f(x) queda en la forma:

$$f(x)=\begin{cases}-x & si \quad -2 < x < 0 \\ -x^2 & si \quad 0 \le x < 1\end{cases}$$

Como f(x) es inyectiva, entonces f*(x) existe:

Si $-2 < x < 0$, $f_1(x)=-x$, calculando su inversa $f_1(f_1^*(x))=x$

$x \in <0,2>$, $-f_1^*(x)=x$, de donde $\therefore f_1^*(x)=-x$, $0 < x < 2$

Si $0 \le x < 1$, $f_2(x)=-x^2$, calculando su inversa $f_2^*(x)$

Se tiene: $f_2(f_2^*(x))=x$, $-1 \le x < 0$, de donde $-f_2^{*2}(x)=x$, $-1 < x \le 0$

$$\therefore f_2^*(x)=\sqrt{-x}, \quad 1 < x \le 0$$

Por lo tanto la inversa de f(x) es: $f^*(x)\begin{cases}-x & si \quad 0 < x < 2 \\ \sqrt{-x} & si \quad -1 < x \le 0\end{cases}$

(16) Hallar f*(x) si existe donde $f(x)=\sqrt{\frac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}$

Solución

Calculando el dominio para definir |x|

$3x^{3/2}+2x^{1/2}=\sqrt{x}(3x+2)$ de aquí x > 0 ⇒ |x| = x

Ahora simplificado se tiene: $f(x)=\sqrt{\dfrac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}=\sqrt{\dfrac{3x+2}{\sqrt{x}(3x+2)}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Determinaremos si f(x) es inyectiva: f(a) = f(b) ⇒ a = b (f es inyectiva)

$f(a)=f(b) \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}} \Rightarrow a=b$

Por lo tanto f(x) es inyectiva entonces f(x) tiene inversa. Ahora calculamos la inversa.

$$f(f^*(x))=x$$

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{f^*(x)}}=x$, de donde $f^*(x)=\dfrac{1}{x^4}$

(17) Si f es la función definida por $f(x)=\sqrt{x^2+16}+2x$, $x\in[0,3]$ determinar si existe f*(x).

Solución

Para que exista f*(x) la función f(x) debe de ser inyectiva, es decir:

Sí f(a) = f(b) entonces a = b

$\sqrt{a^2+16}+2a=\sqrt{b^2+16}+2b$ entonces $2(a-b)=\sqrt{b^2+16}-\sqrt{a^2+16}$

para que sea f inyectiva debe cumplir a = b de donde

$a-b=0 \Rightarrow \sqrt{b^2+16}-\sqrt{a^2+16}=0$

$\sqrt{a^2+16}=\sqrt{b^2+16} \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow |a|^2=|b|^2$

$\Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=b$ puesto que $a, b\in[0,3]$

por lo tanto f(x) es inyectiva ⇒ ∃ f*(x)

Ahora calculamos f*(x) mediante la ecuación: f(f*(x)) = x , x ∈ [4,11]

$$\sqrt{f*(x))^2+16}+2f*(x)=x \Rightarrow \sqrt{(f*(x))^2+16}=x-2f*(x) \text{ elevado al cuadrado}$$

$$(f*(x))^2+16=x^2-4xf*(x)+4(f*(x))^2 \Rightarrow 3(f*(x))^2-4xf*(x)+x^2-16=0$$

$$f*(x)=\frac{4x\pm\sqrt{16x^2-12(x^2-16)}}{6} \Rightarrow f*(x)=\frac{4x\pm 2\sqrt{x^2+48}}{6}$$

$$f*(x)=\frac{2x\pm\sqrt{x^2+48}}{3} \qquad \therefore f*(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2+48}}{3}, x\in[4,11]$$

(18) Si $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}, & x\geq 3\\ x^2+2x-3, & x\in[-1,1>\end{cases}$ Determinar si f*(x) si existe.

Solución

Determinaremos si f(x) es inyectiva

Si x ≥ 3 $\Rightarrow f_1(x)=\sqrt{x-3}$ donde $R_{f_1}=[0,\infty>$

Si $f_1(x_1)=f_1(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1-3}=\sqrt{x_2-3}$ elevando al cuadrado $\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow f_1$ es inyectiva

Si $-1\leq x<1 \Rightarrow f_2(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

Como $-1\leq x<1 \Rightarrow 0\leq x+1<2 \Rightarrow 0\leq(x+1)^2<4$

$$\Rightarrow -4\leq(x+1)^2-4<0 \Rightarrow R_{f_2}=[-4,0>$$

Si $f_2(x_1)=f_2(x_2)\Rightarrow (x_1+1)^2-4=(x_2+1)^2-4$

$$\Rightarrow (x_1+1)^2=(x_2+1)^2\Rightarrow x_1+1=x_2+1$$

$\Rightarrow x_1=x_2$ puesto que $x_1,x_2\in[-1,1>$. Por lo tanto f_2 es inyectiva.

Como $R_{f_1}\wedge R_{f_2}=[0,\infty>\wedge[-4,0>=\phi$.

Entonces f(x) es inyectiva y por lo tanto ∃ f*(x)

Ahora calculando la inversa de cada función: $f_1(f_1^*(x)) = x$, x ∈ [0,+∞>

$\sqrt{(f_1^*(x)) - 3} = x \Rightarrow f_1^*(x) = x^2 + 3$, x ∈[0,+∞>

$f_2(f^*(x)) = x$, x ∈ [-4,0>

$(f_2^*(x))^2 + 2f^*(x) - 3 = x \quad \Rightarrow \quad f_2^*(x) = \sqrt{x+4} - 1$, x ∈ [-4,0>

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x \geq 0 \\ \sqrt{x+4} - 1 & , -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

(19) Si f(x) = 2x – 3b , determinar el valor de b de manera que $f(b+1) = 3f^*(b^2)$

Solución

Calculando la inversa de f(x): f(f*(x)) = x, $x \in D_{f^*}$

2f*(x) – 3b = x, $x \in D_{f^*}$, de donde $f^*(x) = \dfrac{x+3b}{2}$, $x \in D_{f^*}$

como $f(b+1) = 3f^*(b^2)$, entonces $2(b+1) - 3b = 3(\dfrac{b^2+3b}{2})$

$3b^2 + 11b - 4 = 0 \Rightarrow$ (3b – 1)(b + 4) = 0, de donde $b = \dfrac{1}{3}$, b = -4

(20) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 7 & si \quad 4 < x \leq 7 \ \vee \ -3 \leq x < -1 \\ \sqrt{7-2x} & si \quad -1 \leq x < 3 \end{cases}$. Hallar f*(x) si existe.

Solución

Analizaremos sí $f_1(x) = x^2 - 8x + 7$, $f_2(x) = \sqrt{7-2x}$ es inyectiva

Sí 4 < x ≤ 7 V – 3 ≤ x <-1 $\Rightarrow \quad f_1(x) = x^2 - 8x + 7$

$f_1(x) = x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$

Sí $x_1, x_2 \in D_{f_1}$; $f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$(x_1-4)^2 - 9 = (x_2-4)^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad |x_1-4|^2 = |x_2-4|^2$

$\Rightarrow |x_1-4| = |x_2-4| \Rightarrow x_1 = x_2$, puesto que $|x-4| = x-4$

Sí $4 < x \leq 7$, $|x - 4| = 4 - x$ si $-3 \leq x < -1$. Luego $f_1(x)$ es inyectiva

Sí $-1 \leq x < 3 \quad \Rightarrow f_2(x) = \sqrt{7-2x}$

Sí $x_1, x_2 \in D_{f_2}$; $f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\sqrt{7-2x_1} = \sqrt{7-2x_2} \quad \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow x_1 = x_2$. Luego $f_2(x)$ es inyectiva.

Ahora calcularemos el rango de cada función.

Sí $4 < x \leq 7$ V $-3 \leq x < -1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (x-4)^2 \leq 9$ V $-7 \leq x-4 < -5$

$-9 \leq (x-4)^2 - 9 \leq 0$ V $16 < (x-4)^2 - 9 \leq 40$, pro lo tanto $R_{f_1} = <-9,0] \cup <16,40]$

Sí $-1 \leq x < 3 \quad \Rightarrow \quad -6 < -2x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 1 < 7-2x \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{7-2x} \leq 3$

Entonces $R_{f_2} = <1,3]$

Como $R_{f_1} \wedge R_{f_2} = \phi$ entonces f es inyectiva en todo su dominio.

Ahora calculamos f*(x)

$f_1(f_1^*(x)) = x$, $x \in <-9,0] \cup <16,40]$

$(f_1^*(x))^2 - 8f_1^*(x) + 7 - x = 0$, $x \in <-9,0] \cup <16,40]$

$f_1^*(x) = 4 \pm \sqrt{x+9}$

$$f_1(x) = \begin{cases} 4+\sqrt{x+9} & , x \in <-9,0] \\ 4-\sqrt{x+9} & , x \in <16,40] \end{cases}$$

$f_2(f_2^*(x)) = x$, x ∈ <1,3] $\Rightarrow$ $\sqrt{7-2f_2^*(x)} = x$, x ∈ <1,3]

$f_2^*(x) = \frac{1}{2}(7-x^2)$, x ∈ <1,3]

Luego la función f*(x) queda en la forma: $f^*(x) = \begin{cases} 4+\sqrt{x+9}, x \in <-9,0] \\ 4-\sqrt{x+9}, x \in <16,40] \\ 1/2(7-x^2), x \in <1,3] \end{cases}$

2.27 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

① Sea la función f: [1,4] → [a,b], tal que $f(x) = x^2 - 2x + 3$, Demostrar que f es inyectiva y hallar los valores de a y b para que f sea biyectiva. **Rpta.** a = 2 , b = 11

② Es inyectiva la función real $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

③ Sea f: A → <1,10] dada por $f(x) = \frac{4-11x}{4-2x}$

a) Determinar A **Rpta.** <-∞,0]∪[4,∞>

b) Mostrar que f es inyectiva

④ Sea f: A → <-4,1] definida por $f(x) = \frac{10+3x}{10-2x}$

a) Determinar A **Rpta.** <-∞,0] ∪ <10,∞>

b) Mostrar que f es inyectiva

⑤ Sea f: A →[-9,-1> dada por $f(x) = \frac{3+4x}{3-x}$

a) Determinar A **Rpta.** <0,∞>

b) Probar que f es inyectiva

c) ¿f es suryectiva? **Rpta.** no

(6) Dadas las funciones reales siguientes:

f(x) = 3x + 2|x|, $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, x ≠ 1 y h(x) = 3x + 7, p(x) = x + 2|x|

¿Cuál de estas funciones es inyectiva?

(7) Demostrar que las siguientes funciones son inyectivas

a) f(x) = 3x – 2, x ≥ 0

b) f(x) = sen x, $x\in<-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

c) $f(x)=(x-h)^2+k$, x ≥ h

d) $f(x)=2-x^3$, x ∈ R

e) $f(x)=\sqrt{9+x^2}$, x ≥ 1. En forma analítica y gráfica

(8) Demostrar que la función f definida por: $f(x)=1-\sqrt{x^2-4x-5}$, x ≤ - 1 es inyectiva

(9) Demostrar que $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$, x ≠ -2 es inyectiva

(10) Sean f: A →B, g: B → c, demostrar que:

a) Si g o f es suryectiva entonces g es suryectiva

b) Si g o f es inyectiva entonces f es inyectiva.

(11) La función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.¿Es suryectiva?

(12) Sea f una función definida por: $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, x ∈ < 0,2 > ∪ < 2,∞>

Determinar si f es una función biyectiva **Rpta.** si es biyectiva

(13) Determinar si la función $f(x)=6x-x^2-5$ es f inyectiva, si no lo es, restringir su dominio para que sea inyectiva. **Rpta.** No es inyectiva

(14) Sea f una función definida por $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$, $D_f=R$. Es f una función inyectiva?

Rpta. f es inyectiva

(15) Dada la función $f(x)=\frac{(x+2)(x^2+6x-16)(x-6)}{(x-2)(x^2-4x-12)}$ Mostrar que f es inyectiva y graficar

(16) Sea $f(x)=\frac{x-3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-1$, x ∈ <1,2>. Demostrar que f es inyectiva (ó univalente)

(17) Si se sabe que f(-1) = 4 y f(3) = -2 , donde f es una función lineal, hallar la ecuación que define f*(x)

Rpta. $f^*(x)=-\frac{2x}{3}+\frac{5}{3}$

(18) Sí $f(x)=2x+c$ y $f(c)=2f^*(c^2)$. Encontrar el valor de :

a) f(0). f*(0) **Rpta.** –8

b) $\frac{f(1)}{f^*(1)}$ **Rpta.** – 4

(19) Si f(x) = 3x + 2a, Determinar los valores de a de modo que $f(a^2)=f^*(a+2)$

Rpta. $a=-1 \vee a=\frac{2}{9}$

(20) Hallar la inversa f*(x) si existe para la función. $f(x)=x^2+4x-1$, x ∈ <-4,-3>

Rpta: $f^*(x)=-2-\sqrt{x+5}$, x ∈ [-4,-1>

(21) Hallar la inversa f*(x) si existe de la función, $f(x)=x^2-2x-1$, x ≥ 2

Rpta. $f^*(x)=1+\sqrt{x+2}$, x ≥ -1

(22) Hallar la función f*(x) si existe, para la función, $f(x)=(|x-5|+1+x)\sqrt{5-x}$

Rpta. $f^*(x)=\frac{1}{36}(180-x^2)$, x ∈ [0,∞>

(23) Sí $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2, x\geq 1 \\ x^3+4, x<1 \end{cases}$. Hallar la función inversa de f(x) si existe

Rpta. $f^*(x)=\begin{cases} -1+\sqrt{x-1}, x\geq 5 \\ \sqrt[3]{x-4}, x<5 \end{cases}$

(24) Sí la función f: <-1,1>→ R, definida por: $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$ Hallar la inversa de f(x) si existe

Rpta. $f^*(x)=\frac{x}{1+|x|}$

(25) Hallar f*(x) si existe de:

a) $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{1-x}, x\leq 0 \\ x^2+1, x>0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} -x, x<0 \\ -x^2, x\geq 0 \end{cases}$

c) $f(x)=(|x-3|+x)\sqrt{3-x}$ **d)** $f(x)=\frac{|x-6|+x+\sqrt{x-6}-[|x-4|]x+6}{\sqrt{7-x}}$

(26) Dada la función $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$, $x\in<\frac{7}{2},\frac{9}{2}>$. Hallar f*(x) si existe.

(27) Sí f: R → R tal que $f(x)=\begin{cases} |2-x|, x\geq 2 \\ -x^2, x<0 \end{cases}$. Determinar la función inversa f*(x) si existe.

(28) Consideremos la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} \frac{x+3}{7}, x<-3 \\ x^2+4x-2, 0<x<3 \\ \frac{7}{4-x}, x<11 \end{cases}$

Determinar si f es inyectiva, si lo es hallar f*(x).

(29) Sea f: R → R tal que $f(x)=\frac{3}{x-[|x|]}$, si f es inyectiva hallar f*(x).

(30) Hallar la inversa f*(x) si existe de:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, x\le -1 \\ 4x^2, -1<x\le 0 \\ x+4, x>0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x+1}\ , \ x<1 \\ x-[x]\ , \ 1\le x<2 \\ 3x-5\ , \ x\in <2,4> \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} -4x^2 \ , \ x<0 \\ \sqrt{4-x^2}\ , \ 0\le x\le 2 \end{cases}$ **d)** $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{9-x^2}\ , -3\le x<0 \\ 3x \ , \ 0\le x\le 4 \end{cases}$

(31) Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x^2-4|\ , \ 0\le x<2 \\ -\dfrac{x^2}{4}+x-1\ , \ x\ge 2 \end{cases}$ Hallar f*(x) si existe.

Rpta: $f^*(x)=\begin{cases} 2\sqrt{-x}+2, \ x\le 0 \\ \sqrt{4-x}, \ 0<x\le 4 \end{cases}$

(32) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1\ , \ x<-1 \\ 4x^2, \ -1\le x\le 0 \\ x+4, \ x>0 \end{cases}$, Hallar f*(x) si existe.

Rpta: $f^*(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}\ , \ x<-3 \\ -\sqrt{\dfrac{x}{2}}\ , \ 0\le x\le 4 \\ x-4\ , x>4 \end{cases}$

(33) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 \ , \ x<-1 \\ -\sqrt{x+1} \ , \ x\ge -1 \end{cases}$, Hallar f*(x) si existe.

Rpta. $f^*(x)=\begin{cases} -1-\sqrt{x-1}, x>1 \\ x^2-1\ , \ x\le 0 \end{cases}$

(34) Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x^2+x+2}+1 \ , -1\le x\le 1/2 \\ 2-\dfrac{7}{x+1} \ , \ 2<x<4 \end{cases}$

Hallar f*(x) si existe. **Rpta.** $f^*(x)=\begin{cases}\dfrac{x+5}{2-x} & , -\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{9-4(x-1)} & , 1\le x\le \dfrac{5}{2}\end{cases}$

(35) Hallar la inversa si existe para la función, $f(x)=\dfrac{|x+4|}{|x-1|-1}$, x ∈ <-2,0> ∪ <0,1>

Rpta. $f^*(x)=-\dfrac{4}{x+1}$,x ∈ <-∞,-5> ∪ <1,∞>

(36) La función f definida por la regla de correspondencia

$f(x)=\begin{cases}4-\sqrt{x^2+12x+27} & , si\ x\le -11\\ x^2+6x+6 & , si\ \ x>0\end{cases}$. Demostrar que f es inyectiva y hallar f*(x)

Rpta. $f^*(x)=\begin{cases}6-\sqrt{x^2+8x+25} & , x\le 0\\ \sqrt{x+3}-3 & , x>6\end{cases}$

(37) Sea la función f: R →R, definida por: $f(x)=[|x|]+\sqrt{x-[|x|]}$, hallar f*(x) si existe

Rpta. $f^*(x)=k+(x-k)^2$, x ∈[k,k+1>

(38) Sea las funciones f y g definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4x-5} & , 6\le x<7\\ [|x|] & , 9\le x<10\end{cases} ,\quad g(x)=\begin{cases}|x-2|-|3-x| & , 3.5<x\le 7.5\\ (x-8)^2-9 & , 7.5<x<9.5\\ x & , 9.5\le x\le 13.5\end{cases}$$

Hallar (f + g)* si existe

(39) Dadas las funciones f y g definidas por: $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x^2, 0\le x\le 2\\ \pi, x>2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2, x<0\\ 4x, 0\le x\le 1\\ -1, x>1\end{cases}$.

Hallar (f o g)(x), determinar si es inyectiva en caso afirmativo, calcular (f + g)* (x)

40 Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$, x < -2 y $g(x)=\begin{cases} 2x^2-12x+2 & , -2<x\leq 3 \\ \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}} & , x>3 \end{cases}$

Hallar f* o g **Rpta.** $(f*og)(x)=\begin{cases} \dfrac{4(x^2-6x+1)}{-(2x^2-12x+1)} & , -2<x<3-\sqrt{17} \\ \dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}} & , x>3 \end{cases}$

41 Sean las funciones $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ y g(x) = 3x – 1. Hallar la intersección del dominio f* o g con el dominio de (f o g)(x). **Rpta.** R – {0,2}

42 Sí $f(x)=3x^2-2x+5$, $D_f=<1,4>$ y g(x) = | x | + 3. Determinar el dominio de f*o g.

43 Si $f(x-2)=\dfrac{2}{x+3}$. Hallar el valor de x que satisfaga $(f*of)(\dfrac{4}{x})=2$.

44 Dada la función f definida por: $f(x)=\dfrac{|x-5|+4x+\sqrt{x-5}-[|x|]x+5}{\sqrt{6-x}}$

Hallar f*(x) si existe. **Rpta.** $f*(x)=\dfrac{6x^2+5}{x^2+1}$

45 Si f* es una función biyectiva tal que $f*(\dfrac{x+4}{3x})=D$. Hallar el conjunto solución de la inecuación: $f(c)>\dfrac{3x}{x+4}$ **Rpta.** x ∈ <-4,-1> ∪ <0,2>

46 Sean $f(x)=x^3+2$, $g(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ si $g*(f*(a))=-\dfrac{4}{3}$. Hallar g*(a+5)

Rpta. $-\dfrac{1}{2}$

47 Dada las funciones reales $f(x)=\dfrac{1+|x|}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$. Hallar el dominio de f*og*

Rpta. <-1 , 1> - {0} = <-1, 0> U <0, 1>

(48) Si f y g son dos funciones donde f(x-1) = 3x+2, g(2x+3) = 4x+4 . Hallar (g* o g)(x)

Rpta. $\frac{(3x+7)}{2}$

(49) Sea f: <-1,1> →R , tal que $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$, analizar si f es inyectiva.

(50) Hallar f*(x) si existe, donde, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\sqrt{x^2+x}} & , x>5\\ 7x & , x<-1\end{cases}$

(51) Analizar la inyectibilidad de la función, $f(x)=\begin{cases}x+(x^2+1)^{1/2} & , x>1\\ -\sqrt{-x^3+1} & , x<-1\end{cases}$, en caso afirmativo hallar f*(x)

(52) Sea f y g dos funciones, tales que:

$f(x)=\begin{cases}[|\frac{|x|-2}{3-x}|] & , x\in<-1,1>\\ \sqrt{x^2+2x} & , x\in[1,2>\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}\frac{2}{x-1} & , x\in[1,2>\\ |x-1| & , x\in<0,1>\end{cases}$ Hallar f o g si es que existe.

(53) Hallar f*(x) si es que existe de la función, $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-2, & -3\le x<-2\\ \frac{|x+3|}{|x-2|-1}, & -1<x<1\end{cases}$

(54) Analizar la inyectibilidad de tal función, $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & , x\le 2\\ -x^3 & , x>2\end{cases}$, en caso afirmativo hallar f*(x)

(55) Hallar f*(x) si existe donde

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+4x-5 & , x\in[-2,1>\\ x-5 & , x\in[5,+\infty>\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & , x\ge 1\\ x^2+4 & , x<1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \ x\in<-\infty,-1> \\ 4x^2 & , \ x\in[-1,0] \\ x+4 & , \ x\in<0,+\infty> \end{cases}$ **d)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+1 & , \ x\in[-4,-2> \\ \sqrt{x+2} & , \ x\in[-2,2] \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+7 & , \ x\in<-3,-1>U<4,7] \\ \sqrt{7-2x} & , \ x\in[-1,3> \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x^2+10x+21 & , \ x\in[-7,-5>U[-2,-1> \\ \sqrt{x+1}+1 & , \ x\in<-1,3] \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & , \ x\in<-\infty,-1> \\ -\sqrt{x+1} & , \ x\in[-1,+\infty> \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -(x^2+6x+8) & , \ x\in<-\infty,-4] \\ x+3 & , \ x\in<0,3> \\ \sqrt{x-1} & , \ x\in[10,+\infty> \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x-3 & , \ x\in<-\infty,-2] \\ 3+\sqrt{x} & , \ x\in[1,+\infty> \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & , \ x\in[-3,-1> \\ 2+\sqrt{3+2x-x^2} & , \ x\in[-1,1] \end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases} 4--\sqrt{x^2+12x+27} & , \ x\leq -1 \\ x^2+6x+6 & , \ x>0 \end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x\in[1,2> \\ [|x|]+\sqrt{x-[|x|]} & , \ x\in[-1,1> \\ -\sqrt{-x} & , \ x\in[-9,-1> \end{cases}$

II) $f(x)=\begin{cases} -4-(x+2)^2 & , x\in[-5,-2] \\ 2x[|x+3|] & , x\in<-2,-1> \\ 2+\sqrt{x+1} & , x\in<-1,3> \\ 4 & , x=1 \end{cases}$

(56) Dadas las funciones $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , x<-1 \\ x+1 & , x\geq -1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} 2x-1 & , x<0 \\ \sqrt{x} & , x\geq 0 \end{cases}$

Hallar si existe fog*

(57) Analizar si las funciones reales f y g son inyectivas

$$f(x)=\begin{cases} -2x+10 & , x<0 \\ \sqrt{x^2+16} & , 0\leq x\leq 3 \\ \dfrac{3}{x^2-4} & , x>3 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} -x^2-10x-21 & , x\in[-5,-1] \\ \dfrac{|x-2|-1}{|x+3|} & , x\in<1,2] \end{cases}$$

(58) Si g: A → B y f: B → C, son funciones inyectivas, demostrar que fog: A → C es inyectiva.

(59) Analizar la inyectividad de la función $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x^3} & , x<0 \\ -5x^2+7x-3 & , x>0 \end{cases}$ en caso afirmativo, hallar su inversa.

(60) Si $f(x)=\begin{cases} -x^2 & , x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & , x>0 \end{cases}$ probar si es inyectiva, si lo es, hallar su inversa.

(61) Dadas las funciones $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & , \sqrt{3}\leq x\leq 2 \\ 1-\sqrt{x^2-4} & , x\leq -4 \end{cases}$, $g(x)=\sqrt{|x^2-4|-3}$, x∈ <-∞,-4] U<0,2] tal que f = h*og

i) Demostrar que f y g son funciones inyectivas.

ii) Hallar la función h.

(62) Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{8}{x-2}$, $x \in [0,4]-\{2\}$ y $g(x)=\begin{cases}(x-3)^2 , & 1\le x<5\\ x+3 & . -6\le x<1\end{cases}$

Hallar f*og si es que existe.

(63) Determinar la inversa f*(x) si existe donde $f(x)=\begin{cases}x^2-4 , & x<-2\\ -\sqrt{x-2} , & 2\le x<6\\ -2x+10 , & x\ge 6\end{cases}$

(64) Si $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3} , & x\ge 3\\ x^2+2x-3 , & x\in[-1,1>\end{cases}$. Determinar f*(x) si existe

(65) Si $f(x)=\begin{cases}x^2-4 , & si\ x<-2\\ -\sqrt{x-2} , & si\ x\ge 2\end{cases}$. Determinar f*(x) si existe.

(66) Hallar la inversa de f si existe donde $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3 , & x\le 2\\ -x^3 , & x>2\end{cases}$

(67) Decir si f(x) es inyectiva, si es así hallar f*(x) donde $f(x)=\begin{cases}|x|, & x<-1\\ 2-x^2, & x>11\end{cases}$

(68) Dado $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<5\end{cases}$, probar que f(x) es inyectiva y hallar f*(x).

(69) Analizar si es inyectiva la función $f(x)=x^2-3x+2$, $x \in [0,+\infty>$, en caso que no sea, determinar el dominio para que sea inyectiva y hallar su inversa.

(70) Analizar si la función $f(x)=x^4-2x^2-3$, $x\ge 2$ es inyectiva, en caso afirmativo, hallar su inversa.

(71) Sea $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}, & x\ge 4\\ -\sqrt{3-x}, & x\le 2\end{cases}$, mostrar que f es inyectiva y hallar f*(x).

(72) Si $f(x)=\frac{x-3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-1$, x ∈ <1,2>, analizar rigurosamente si f es inyectiva, en caso afirmativo, hallar f*(x) y sus dominios.

(73) Encontrar f(x) y f*(x), si se sabe que:

i) $g(x)=\frac{1}{4x+1}$, (fog)(x) = 2x + 3 **ii)** g(x) = 3x – 2, (gof)(x) = 2x + 4

(74) Sean $f(x)=2x^2-4x-1$, x ∈ [1,+∞>, $g(x)=\frac{x-2}{x^2+4}$, x∈R. Calcular (gof*)(x) si existe.

(75) Si f(x – 1) = 3x + 2, g(2x + 3) = 4x + 4, encontrar (g*of)(x)

(76) Calcular f*(x) si existe, donde: $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-1, & x\in<-4,-3] \\ \frac{|x+4|}{|x-1|-1}, & x\in<-2,0>\cup<0,1> \end{cases}$

(77) Sean $f(x)=\frac{x}{2+x}$, x<-2 y $g(x)=\begin{cases} 2x^2-12x+3, & x\in<-2,3] \\ \frac{x+2}{x-3}, & x>3 \end{cases}$. Calcular (f*og)(x), si existe

(78) Hallar f*(x) si existe donde $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 2 \\ \sqrt{9x-2}, & x\in<2,3> \\ (x-3)^2+5, & x>3 \end{cases}$

CAPITULO III

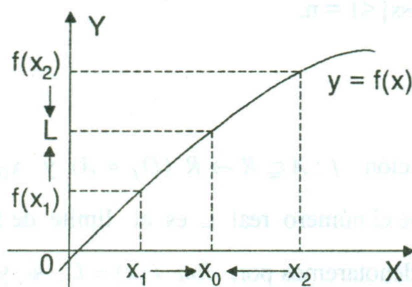
3. LIMITES Y CONTINUIDAD.

3.1 INTRODUCCION.-

La teoría de límites de una función es indispensable conocer la teoría puesto que es la base sobre el cual se dan los conceptos fundamentales del cálculo como son: la continuidad, la derivada, la integral, etc., Antes de dar la definición de límite de una función daremos la idea intuitiva.

Sea L un número real y f una función definida en las proximidades del número "a", no necesariamente en "a" y denotaremos por: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y diremos que:

Cuando x se aproxima a "a"; f(x) se aproxima a L. ó para x próximo a "a"; f(x) está próximo a L. ó para x aproximadamente igual a "a", f(x) es aproximadamente igual a L.



Ahora daremos algunas definiciones previas a la definición de límite.

a) Punto de Acumulación.- Sean $A \subseteq R$ y $x_0 \in R$, al punto x_0 le llamaremos punto de acumulación del conjunto A sí y sólo sí, todo intervalo abierto de centro x_0 contiene por lo menos un elemento $x \neq x_0$ del conjunto A.

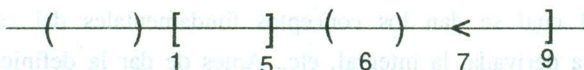
Ejemplo.- Si A = <-1,5> entonces 2 es un punto de acumulación de A, es decir:



Sí A = [2,9> entonces 2 es punto de acumulación de A y también 9 es punto de acumulación, es decir:



Si A = [1,5] ∪ <7,9] entonces 6 no es un punto de acumulación de A y tampoco "o" es punto de acumulación del conjunto A, es decir:



Observación.- El punto de acumulación x_0 de A, no es necesario que dicho punto sea elemento del conjunto A.

b) Función Acotada.- La función f(x) se dice que es acotada, si existe un número real M positivo, tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in D_f$

Ejemplo.- La función f(x) = cos x es acotada por que existen n =1, tal que: |f(x)| = |cosx| ≤1 = n.

3.2 DEFINICION.-

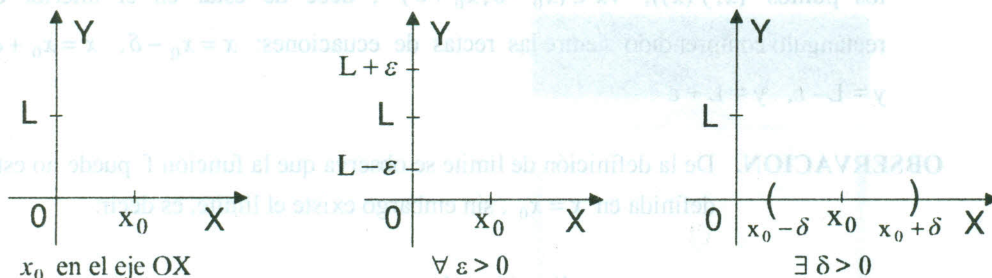
Consideremos una función $f: A \subseteq R \to R$ $(D_f = A)$ y x_0 un punto de acumulación de $A = D_f$, se dice que el número real L es el límite de f(x) cuando x se aproxima a $x_0 (x \to x_0)$ al cual denotaremos por: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, si y sólo si para todo número ε > 0 (épsilon) existe otro número δ (delta) positivo tal que, para todo $x \in D_f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

En forma simbólica

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in D_f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

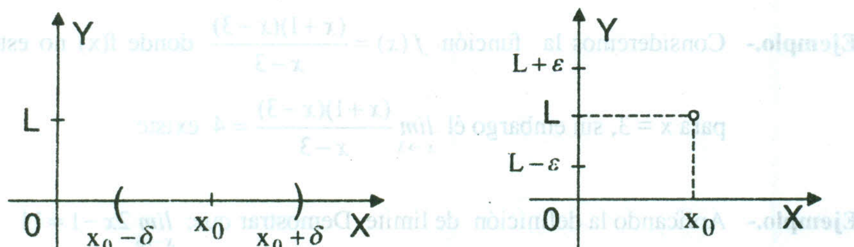
a) Interpretación Geométrica del Límite

A cada parte de la definición de limite haremos su representación gráfica:



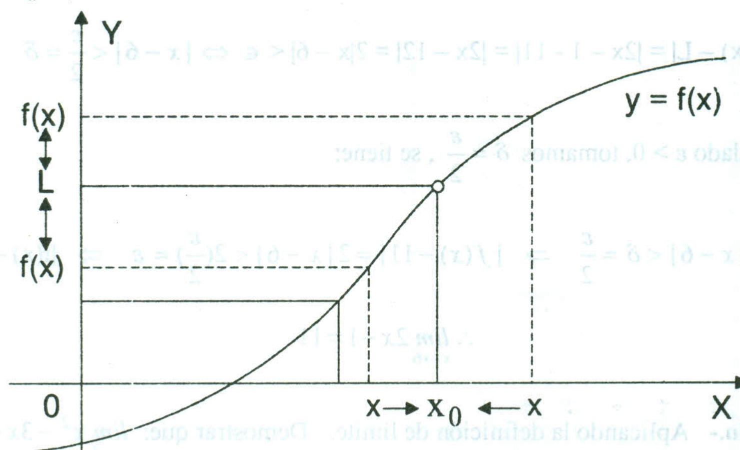
x_0 en el eje OX $\qquad$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\qquad$ $\exists\, \delta > 0$

L en el eje OY



$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$

Ahora consideremos un arco de la curva y = f(x) sobre el cual se ubica el punto (x_0, L)



Como el límite de f(x) cuando $x \to x_0$ es el número real L, es decir que para cada ε > 0 (tan pequeño como uno quiere) debe existir un número δ > 0 de tal manera que los puntos $(x, f(x))$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, debe de estar en el interior del rectángulo comprendido entre las rectas de ecuaciones: $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$, y = L - ε, y = L + ε

OBSERVACION. De la definición de límite se observa que la función f puede no estar definida en $x = x_0$, sin embargo existe el límite, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Ejemplo.- Consideremos la función $f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$ donde f(x) no está definida para x = 3, sin embargo él $\lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = 4$ existe.

Ejemplo.- Aplicando la definición de límite. Demostrar que: $\lim_{x \to 6} 2x - 1 = 11$

Solución

$$\lim_{x \to 6} 2x - 1 = 11 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta = ?/\, si\ \ 0 < |x - 6| < \delta \Rightarrow |(2x-1) - 11| < \varepsilon$$

pero |f(x) – L| = |2x – 1 - 11| = |2x – 12| = 2|x – 6| < ∈ $\Leftrightarrow |x - 6| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$

Luego dado ε > 0, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, se tiene:

Sí $0 < |x - 6| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - 11| = 2|x - 6| < 2(\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon \Rightarrow$ |f(x) – 11| < ε

$$\therefore \lim_{x \to 6} 2x - 1 = 11$$

Ejemplo.- Aplicando la definición de límite. Demostrar que: $\lim_{x \to 4} x^2 - 3x + 5 = 9$

Solución

$$\lim_{x \to 4} x^2 - 3x + 5 = 9 \iff \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / si\ \ 0 < |x - 4| < \delta \ \Rightarrow\ |(x^2 - 3 + 5) - 9)| < \varepsilon$$

pero $|f(x) - L| = |x^2 - 3x + 5 - 9| = |x^2 - 3x - 4| = |x + 1||x - 4|$ ...**(1)**

tomamos $\delta_1 = 1$ para acotar $|x+1|$ en efecto:

Sí $|x - 4| < 1 \ \Rightarrow\ -1 < x - 4 < 1 \ \Rightarrow\ 4 < x + 1 < 6 \ \Rightarrow\ |x + 1| < 6$ ...**(2)**

Luego de (1) , (2) se tiene: $|f(x) - L| = |x + 1||x - 4| < 6|x - 4| < \varepsilon$

$|x - 4| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta_2$. Por lo tanto tomamos $\delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$

Luego dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{6}\}$ se tiene que:

Sí $0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 9| = |x + 1||x - 4| < 6|x - 4| < \varepsilon$ $\quad \therefore \lim_{x \to 4} x^2 - 3x + 5 = 9$

b) Método General Para Encontrar él δ

En la definición de límite de una función f(x) cuando $x \to x_0$ ($\lim_{x \to x_0} f(x) = L$), necesitamos probar que dado cualquier $\epsilon > 0$, es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que sí:

$$0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Para encontrar un $\delta > 0$ se hace de la manera siguiente:

1ro. Se descompone $|f(x) - L|$ en dos factores, en donde uno de los cuales debe de ser $|x - x_0|$ es decir: $|f(x) - L| = |g(x)||x - x_0| \leq |h(x)||x - x_0|$

2do. Se debe acotar $|h(x)| \leq K$, para algún K dentro de un intervalo $0 < |x - x_0| < \delta_1$, donde δ_1 se elige como cualquier valor que satisface la relación $\delta_1 < |x_0 - a|$ (diferencia entre x_0 y su asíntota)

En particular $\delta_1 = \frac{1}{2}|x_0 - a|$

Nota.- Si se tiene varias asíntotas se toman las diferencias de x_0 con todas las asíntotas, luego se elige la menor de ellas y se toma δ_1 a la mitad de éste menor.

3ro. Sí $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| \le |h(x)||x - x_0| < k|x - x_0| < \varepsilon$ de donde $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{k} = \delta_2$

4to. Luego el δ se escoge el menor ó mínimo entre δ_1 y δ_2 es decir: $\delta = \min.\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{k}\}$

5to. Se tiene: si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ con lo cual se prueba que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Ejemplo.- Aplicando la definición de límite. Demostrar que: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x+3}{x-3} = 4$

Solución

Por definición de límite se tiene:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x+3}{x-3} = 4 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = ?\ /\ ,\ \text{si}\ 0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x+3}{x-3} - 4\right| < \varepsilon$$

es decir dado $\varepsilon > 0$, debemos de encontrar $\delta > 0$ en términos de ε, tal que:

$$0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x+3}{x-3} - 4\right| < \varepsilon$$

Para encontrar el $\delta > 0$ se hace la forma siguiente:

$$|f(x) - L| = \left|\frac{x+3}{x-3} - 4\right| = \left|\frac{-3(x-5)}{x-3}\right| = 3\left|\frac{1}{x-3}\right||x-5| \qquad \ldots (1)$$

Ahora acotando la función $\left|\frac{1}{x-3}\right|$ y para esto calculamos $\delta_1 = \frac{1}{2}|5-3| = 1$ de acuerdo 2do. Paso del método establecido.

$|x-5| < \delta_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x-5 < 1$, sumando 2 $\quad \Rightarrow \quad 1 < x-3 < 3$, invirtiendo

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{x-3} < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x-3}\right| < 1 \quad \textbf{... (2)}$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$|f(x) - L| = 3\left|\frac{1}{x-3}\right||x-5| < 3|x-5| < \varepsilon$ de donde $|x-5| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta_2$

Luego se elige $\delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ se tiene: Sí $0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \to 5} \frac{x+3}{x-3} = 4$$

Ejemplo.- Aplicando la definición de límite demostrar que: $\lim_{x \to 1} \frac{x}{2x^2 - 5x + 2} = -1$

<u>Solución</u>

Por definición de límite se tiene:

$\lim_{x \to 1} \frac{x}{2x^2 - 5x + 2} = -1 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = ? /$ si $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x}{2x^2 - 5x + 2} - (-1)\right| < \varepsilon$

es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ en términos de ε.

Tal que $0 < |x-1| < \delta$ entonces $\left|\frac{x}{2x^2 - 5x + 2} - (-1)\right| < \varepsilon$

Para encontrar el $\delta > 0$ se hace en la forma siguiente:

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x}{2x^2 - 5x + 2} + 1\right| = \frac{2}{|2x-1||x-2|}|x-1|^2 \quad \textbf{... (1)}$$

Ahora acotado la expresión $\frac{1}{|2x-1||x-2|}$ y para esto calculamos δ_1 de acuerdo al 2do.

Paso del método general indicado donde sus asíntotas son $\frac{1}{2}$ y 2 por lo tanto:

$$|x_0 - a| = |1 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad |x_0 - a| = |1 - 2| = 1$$

Al δ_1 elegimos la mitad de la diferencia menor.

$$\delta_1 = \frac{1}{2}|x_0 - a| = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$0 < |x - 1| < \delta_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < x - 1 < \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < 2x - 1 < \frac{3}{2}, \quad -\frac{5}{4} < x - 2 < -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad |\frac{1}{2x-1}| < 2, \quad |\frac{1}{x-2}| < \frac{4}{3} \qquad \ldots (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$|f(x) - L| = 2\frac{1}{|2x-1|}.\frac{1}{|x-2|}|x-1|^2 < \frac{16}{3}|x-1|^2 < \varepsilon \quad \text{de donde:} \quad |x-1| < \frac{\sqrt{3\varepsilon}}{4}$$

Por lo tanto el $\delta = min\{\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3\varepsilon}}{4}\}$ se tiene que: Si $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x}{2x^2 - 5x + 2} = -1$$

Ejemplo.- Aplicando la definición de límite demostrar que: $\lim_{x \to 1} 2\sqrt{x} + 5 = 7$

Solución

Por definición de límite se tiene:

$\lim_{x \to 1} 2\sqrt{x} + 5 = 7 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = ? / \text{ si } 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |2\sqrt{x} + 5 - 7| < \varepsilon$

es decir dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ en términos de ε de tal manera que $0 < |x - 1| < \delta$ entonces $|2\sqrt{x} + 5 - 7| < \varepsilon$

Ahora calculamos el $\delta > 0$ y para esto se tiene:

$$|2\sqrt{x}+5-7| = 2|\sqrt{x}-1| = 2|\frac{1}{\sqrt{x}+1}||x-1| \quad \ldots (1)$$

Luego acotamos la expresión $|\frac{1}{\sqrt{x}+1}|$

Tomamos $\delta_1 = 1$ para acotar $|\frac{1}{\sqrt{x}+1}|$ en efecto:

Si $0 < |x-1| < \delta_1 = 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \sqrt{2} \Rightarrow 1 < \sqrt{x}+1 < \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{x}+1}| < 1 \quad \ldots (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$|f(x)-L| = 2|\frac{1}{\sqrt{x}+1}||x-1| < 2|x-1| < \varepsilon \quad \text{de donde: } |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$$

Por lo tanto el $\exists\ \delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$ se tiene que: Si $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x\to 1} 2\sqrt{x}+5 = 7$$

Ejemplo.- Aplicando la definición de límite demostrar que: $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

<u>Solución</u>

Por definición de límite se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta = ?\ /\ \text{si } 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}} - (-\sqrt{\frac{2}{3}})| < \varepsilon$$

es decir dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ en términos de ε de tal manera que $0 < |x - 1| < \delta$ entonces $|\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}})| < \varepsilon$

Ahora calculamos el $\delta > 0$ y para esto se tiene:

$$|\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}| = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\frac{1}{2x+\sqrt{3}}||x| \qquad \textbf{... (1)}$$

Calculamos $\delta_1 = \frac{1}{2}|x_0 - a| = \frac{1}{2}|0-\frac{\sqrt{3}}{2}| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ahora acotamos la expresión $|\frac{1}{2x+\sqrt{3}}|$, tomando $\delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$0 < |x| < \delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{4} < x < \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < 2x+\sqrt{3} < \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{2x+\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow |\frac{1}{2x+\sqrt{3}}| < \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \textbf{... (2)}$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene: $|\frac{x-\sqrt{2}}{2x+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}| < \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{2}{\sqrt{3}}|x| < \varepsilon$

$|x| < \frac{3.\varepsilon}{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \delta_2$. Por lo tanto $\exists\ \delta = min\{\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3.\varepsilon}{2(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}\}$

3.3. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Mediante la definición de límite. Demostrar que:

① $\lim_{x\to 2} 3x^2 - x - 2 = 8$ ② $\lim_{x\to 1} 3x^2 + 2x = 5$

(3) $\lim\limits_{x\to 2} 4x^2 + x - 4 = 10$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} ax^2 + bx + c = ax_0^2 + bx_0 + c$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$

(7) $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{3+2x}{5-x} = \frac{8}{9}$

(8) $\lim\limits_{x\to -7} \frac{3x}{x+8} = -21$

(9) $\lim\limits_{x\to 3} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 8$

(10) $\lim\limits_{x\to 5} x^3 + x^2 - 2x = 140$

(11) $\lim\limits_{x\to -2} 3x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = -39$

(12) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|2-x|}{3x-1} = \frac{1}{2}$

(13) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{3x^3 + 11x^2 + x - 5} = \frac{1}{32}$

(14) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 3x - 10} = -\frac{3}{7}$

(15) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x^2 + 16} = \frac{1}{25}$

(16) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 + 1}{x-1} = 5$

(17) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1} = -8$

(18) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2 - 2}{x-1} = 4$

(19) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$

(20) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x} = 2$

(21) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x^2 - 11}}{3} = \frac{1}{3}$

(22) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x+5} = 3$

(23) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{-2x} = \sqrt{2}$

(24) $\lim\limits_{x\to -8} \sqrt[3]{x} = -2$

(25) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{-2}$

(26) $\lim\limits_{x\to 27} \sqrt[3]{x} - 8 = -5$

(27) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{-4}$

(28) $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{4x-5} = 3$

(29) $\lim\limits_{x\to 3} 3 - \sqrt{3x} = 0$

(30) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{2-x^2} - \sqrt{x} = 0$

(31) $$\lim_{x\to 8} \sqrt{2x}-\sqrt[3]{x}=2$$

(32) $$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(33) $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{7-x}}=\frac{1}{2}$$

(34) $$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(35) $$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+4}}=1$$

(36) $$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x}}=2$$

(37) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$$

(38) $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}$$

(39) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}=\frac{1}{2}$$

(40) $$\lim_{x\to 5}\sqrt{\frac{4+x}{x^2-9}}=\frac{3}{4}$$

(41) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=2$$

(42) $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-3x-4}=\frac{1}{15}$$

(43) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-10x+9}{\sqrt{4x+5}-4}=-12$$

(44) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3-4}-2}{x-2}=3$$

(45) $$\lim_{x\to 6} x^2-\frac{6}{\sqrt{x+3}}=34$$

(46) $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}},\ a>0$$

(47) $$\lim_{x\to 0.5} x^2[|x+2|]=0.5$$

(48) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+8}{|x|-2}=-12$$

(49) $$\lim_{x\to 1}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}$$

(50) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{\sqrt{9-5x}-2}=-4$$

(51) $$\lim_{x\to 1} 3-\frac{2}{\sqrt{x}}=1$$

(52) $$\lim_{x\to 1/3}\sqrt[3]{x^2+\frac{8}{9}}=1$$

(53) $$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+3}=1$$

(54) $$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-4x-3}}{x+2}=-3$$

(55) $\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 15x - 4}{x - 3} = 0$

(56) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{3x^2 + 1}{x^4 + 1} = \frac{7}{5}$

(57) $\lim_{x \to -1} \frac{4x^2 + 1}{2x + 1} = -5$

(58) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 1} = 2$

(59) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{[|x|] + x}{3 + x - x^2} = 1$

(60) $\lim_{x \to -1} \frac{|x|}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$

3.4. PROPOSICION.-

Sí $x \in R$, $|x| \le \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$.

Demostración

La demostración la haremos por el absurdo. Supongamos que $x \neq 0$, esto quiere decir $|x| > 0$. Ahora elegimos $\varepsilon_1 = \frac{|x|}{2}$ de donde $\varepsilon_1 > 0$ y como $|x| \le \varepsilon$ se cumple para $\varepsilon_1 = \frac{|x|}{2}$ de donde: $|x| \le \frac{|x|}{2} \Rightarrow 1 \le ½$ (absurdo) y esto es debido a la suposición original la cual no es valida, por lo tanto se cumple que $x = 0$.

3.5. PROPOSICION.-

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $a < L < b$, entonces existe un número $\delta > 0$, tal que: $a < f(x) < b$ para todo $x \in D_f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$

Demostración

Sea $\varepsilon = \min \{b - L, L - a\}$ como $a < L < b \Rightarrow b - L > 0$, $L - a > 0$

Entonces $\varepsilon \le b - L$ y $\varepsilon \le L - a$ (por ser mínimo)

Entonces $\varepsilon \le L - a \Rightarrow a \le L - \varepsilon < L + \varepsilon < b$ **... (1)**

Además $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, entonces para dicho $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, $\forall\ x \in D_f \ \wedge\ 0 < |x - x_0| < \delta$

Entonces $|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ **... (2)**

Luego de (1) y (2) se tiene: $a \le L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \le b$, $\forall\ x \in D_f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow\ a < f(x) < b$, $\forall\ x \in D_f$ y $0 < |x - x_0| < \delta$

3.6. TEOREMA (UNICIDAD DE LIMITE).-

El límite de una función si existe, es único, es decir:

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$

Demostración

Por la proposición 1.8 es suficiente probar que:

$|L_1 - L_2| < \varepsilon$ de donde $L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$

En efecto para $\varepsilon > 0$, consideremos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$; para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$0 < |x - a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, en forma similar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$,

existe $\delta_2 > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta_2$ entonces $|f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ además se tiene:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \le |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir: $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ para $0 < |x - a| < \delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$

Por lo tanto: se tiene si $\varepsilon > 0$ para $0 < |x - a| < \delta$

Se tiene $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ y esto implica $L_1 - L_2 = 0$ de acuerdo a la proposición 1.8 por lo tanto: $L_1 = L_2$.

3.7. TEOREMA.-

Si f y g son dos funciones tales que $f(x) \leq g(x)$, $\forall$ x de un intervalo con $x \neq a$, y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ entonces $L \leq M$ es decir: $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Demostración

Demostraremos por el absurdo. Supongamos que $L > M$ entonces $L - M > 0$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, para $\varepsilon = \dfrac{L-M}{2}$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales

que: $\begin{cases} 0 < |x-a| < \delta_1 \\ 0 < |x-a| < \delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} |f(x)-L| < \varepsilon \\ |g(x)-M| < \varepsilon \end{matrix}$ entonces $\begin{cases} L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \\ M-\varepsilon < g(x) < M+\varepsilon \end{cases}$ ... **(1)**

Ahora tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ y si $0 < |x-a| < \delta$ entonces se cumple simultáneamente (1) y como $f(x) \leq g(x)$, por lo tanto $0 < |x - a| < \delta$, se tiene:

$M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon = L - \varepsilon < f(x)$ entonces $g(x) < f(x)$ lo cual es una contradicción puesto que $f(x) \leq g(x)$ y esto es debido a la suposición $L > M$ por lo tanto debe cumplirse $L \leq M$.

3.8. TEOREMA.-

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ entonces existe $\delta > 0$, tal que: para todo $x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$, $x \neq a$, se tiene $|f(x)| < k$ para algún k real positivo.

Demostración

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ por definición se tiene, dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x, $|f(x) - L| < \varepsilon = 1$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Consideremos el mismo $\delta > 0$ y para $x \neq a$, un elemento del intervalo $\langle a - \delta, a + \delta \rangle$

entonces: $|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$

Luego tomando $k = 1 + |L|$ se cumple que: $|f(x)| < k$ para $x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$

3.9. PROPIEDADES SOBRE LIMITES DE FUNCIONES.-

Sean f y g dos funciones tales que:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ y k una constante, entonces:

a) $\lim\limits_{x \to a} k = k$ **b)** $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \pm M$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = (\lim\limits_{x \to a} f(x)).(\lim\limits_{x \to a} g(x)) = L.M$

e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{1}{M}$, si $M \neq 0$

f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$, $g(x) \neq 0$

g) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^n$, n entero positivo.

h) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, ∀ n par positivo.

i) $\lim\limits_{x \to a} | f(x) | = | \lim\limits_{x \to a} f(x) | = | L |$

Demostración

a) La demostración es inmediata de la definición de límite, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $| f(x) - k | < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Como $f(x) = k$ entonces $| k - k| = 0 < \varepsilon$ siempre que $|x - a| < \delta$, en este caso se puede tomar cualquier δ en particular $\delta = \varepsilon$.

b) Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ por definición dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$, existe $\delta > 0$ tal que

$|f(x) - L| < \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ entonces: $|kf(x) - kL| < \varepsilon$. Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kL$

c) Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, dado $\varepsilon > 0$, para $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ existen $\delta_1 > 0$,

$\delta_2 > 0$ tal que: $\begin{cases} 0 < |x-a| < \delta_1 \\ 0 < |x-a| < \delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} |f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$ **... (1)**

Ahora tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $0 < |x - a| < \delta$ se verifica (1) simultáneamente, además:

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \le |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir: $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon$ lo que implica:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

d) Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ y $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(|M|+1)} > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que:

$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$, además $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, $\forall \in > 0$ y

$\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(|L|+1)} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon_2$.

Ahora para $\varepsilon_3 = 1$ como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ entonces existe $\delta_3 > 0$ tal que

$0 < |x-a| < \delta_3 \Rightarrow |g(x) - M| < 1 \Rightarrow |g(x)| < 1 + |M|$

Ahora elegimos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, $\forall\ x \in D_{f.g}$ y $0 < |x - a| < \delta$ entonces:

$$|f(x).g(x) - LM| = |f(x).g(x) - g(x).L + g(x).L - LM| \le |g(x)|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M|$$

$$|f(x).g(x)-L.M|<\varepsilon_1(1+|M|)+|L|\varepsilon_2=\frac{\varepsilon(1+|M|)}{2(|M|+1)}+\frac{\varepsilon.|L|}{2(|L|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Luego esto prueba que: $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)=L.M$

e) Como $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M\neq 0$, existe $\delta_1>0$, tal que:

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|}<\frac{2}{|M|} \qquad \ldots (1)$$

(sug. Tomar $\varepsilon_1=\frac{|M|}{2}$ y aplicar la definición de límite).

Sea $\varepsilon>0$ para $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon M^2}{2}>0$, existe $\delta_2>0$, tal que:

$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-M|<\varepsilon_2 \qquad \ldots (2)$$

Ahora tomando $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$ para $0<|x-a|<\delta$ se verifica (1) y (2) y además:

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|=\frac{|g(x)-M|}{|M||g(x)|}=\frac{1}{|M|}.\frac{1}{|g(x)|}|g(x)-M|<\frac{2}{|M|^2}\varepsilon_2$$

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|<\frac{2}{|M|^2}.\frac{\varepsilon M^2}{2}=\varepsilon,\ \text{ósea que } 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|<\varepsilon$$

de donde $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{M}$

f) Como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{M}$, Ahora aplicando d) y e) se tiene:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x).\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{L}{M} \qquad \therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$$

La demostración de las propiedades g) h) i) se deja para el lector.

OBSERVACIÓN.- Límite de una función polinómica:

Si $f(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1 x + b_0$ es una función polinómica donde $b_n, b_{n-1},...,b_0$ son constantes reales, entonces para todo número real "a" se cumple:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1 x + b_0 = a^n b_n + a^{n-1}b_{n-1}+...+ab_1 + b_0$$

(La demostración se deja como ejercicio para el lector).

3.10. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

Calcular los siguientes límites aplicando sus propiedades.

① $\lim_{x\to 2} 3x^3 - 2x^2 + 5x - 7$

Solución

Aplicando el criterio del limite de una función polinómica:

$$\lim_{x\to 2} 3x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 3(2)^3 - 2(2)^2 + 5(2) - 7$$

$$= 3(8) - 2(4) + 10 - 7 = 24 - 8 + 10 - 7 = 34 - 15 = 19$$

② $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+17x+4}{5x^2-3x+10}$

Solución

Para el caso de los límites de las funciones racionales, primeramente veremos los casos inmediatos y esto ocurre cuando se evalúa el numerador y denominador, si son diferentes de cero simultáneamente o uno de ellos por lo menos es diferente de cero, entonces el límite se obtiene en forma directa (veremos estos casos).

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+17x+4}{5x^2-3x+10} = \frac{3(2)^2+17(2)+4}{5(2)^2-3(2)+10} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

③ $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-3x^2+4x-39}{4x^2+3x+7}$

Solución

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-3x^2+4x-39}{4x^2+3x+7} = \frac{2(3)^3-3(3)^2+4(3)-39}{4(3)^2+3(3)+7} = \frac{54-27+12-39}{36+9+7} = \frac{0}{52} = 0$$

④ $\lim_{x\to 4} \frac{2x^2+7x+5}{x^2-16}$

Solución

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^2+7x+5}{x^2-16} = \frac{2(4)^2+7(4)+5}{4^2-16} = \frac{32+28+5}{16-16} = \frac{65}{0} \nexists$$

Nota.- Ahora veremos los límites de las funciones racionales que al evaluar nos da $\frac{0}{0}$, en este caso sé factoriza para evitar la indeterminación.

⑤ $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2+3x-6}$

Solución

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2+3x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2(x-2)-4(x-2)}{3(x^2+x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x^2-4)(x-2)}{3(x+2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)^2}{3(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)^2}{3(x-1)} = \frac{(-2-2)^2}{3(-2-1)} = -\frac{16}{9}$$

⑥ $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a-1)x-a}{x^2-(a-2)x-2a}$

Solución

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a-1)x-a}{x^2-(a-2)x-2a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-ax+x-a}{x^2-ax+2x-2a} = \lim_{x\to a} \frac{x(x-a)+(x-a)}{x(x-a)+2(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x+1)(x-a)}{(x+2)(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{x+1}{x+2} = \frac{a+1}{a+2}$$

⑦ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{3x-6}-\dfrac{2}{2x^2-5x+2}\right)$

Solución

Al evaluar se tiene la forma ∞ - ∞, en este caso se debe efectuar la operación para evitar la indeterminación, es decir:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{3x-6}-\frac{2}{2x^2-5x+2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-10x+4-6x+12}{(2x^2-5x+2)(3x-6)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)^2}{3(2x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{4}{3(2x-1)}=\frac{4}{9}$$

⑧ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^4+9x^3+3x^2-5x-3}{3x^4+9x^3+9x^2+3x}$

Solución

Factorizando tanto numerador como denominador:

4	9	3	-5	-3	-1
	-4	-5	2	3	
4	5	-2	-3	0	
	-4	-1	3	-1	
4	1	-3	0		
	-4	3	-1		
4	-3	0			

$$4x^4+9x^3+3x^2-5x-3=(4x-3)(x+1)^3$$

$$3x^4+9x^3+9x^2+3x=3x(x^3+3x^2+3x+1)=3x(x+1)^3$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{4x^4+9x^3+3x^2-5x-3}{3x^4+9x^3+9x^2+3x}=\lim_{x\to -1}\frac{(4x-3)(x+1)^3}{3x(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{4x-3}{3x}=\frac{7}{3}$$

⑨ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, y para calcular se racionaliza:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1+1}{\sqrt{4}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

(10) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, y para calcular se efectúa una doble racionalización, se obtiene:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})}{(1-\sqrt{5-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{(3+\sqrt{5+x})(1-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{5-x})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(1+\sqrt{5-x})}{(3+\sqrt{5+x})(x-4)}=\lim_{x\to 4}-\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}=-\frac{1+1}{3+3}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

(11) $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, y para hallar este límite se puede usar una doble racionalización pero se hace muy operativo, entonces para los casos en que las cantidades subradicales son iguales y se tenga diversos tipos de raíces se hace un cambio de variable con el propósito de simplificar.

El cambio de variable se hace de la siguiente forma:

Se elige una variable que se iguala a la cantidad subradical y el exponente de esta variable es el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales.

Para nuestro caso se tiene: $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

Sea $y^6 = x$ donde m.c.m. (2,3) = 6

Como $y^6 = x \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x} = y^3 \\ \sqrt[3]{x} = y^2\end{cases}$. Para x = 64, $y^6 = 64 \Rightarrow$ y = 2

Ahora reemplazamos, se tiene:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{y\to 2}\frac{y^3-8}{y^2-4} = \lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)} = \lim_{y\to 2}\frac{y^2+2y+4}{y+2} = \frac{4+4+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3$$

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{x-1}$

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, como se tiene tres tipos de raíces y la cantidad subradical son iguales, se hace la sustitución en la misma forma que se hizo el ejemplo anterior.

$z^{12} = x$ donde el m.c.m. (4,3,2)=12

Como $z^{12} = x \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x} = z^6 \\ \sqrt[3]{x} = z^4 \\ \sqrt[4]{x} = z^3\end{cases}$. Para x = 1, $z^{12} = 1 \Rightarrow$ z = 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{x-1} = \lim_{z\to 1}\frac{z^3+z^4+z^6-3}{z^{12}-1} = \lim_{z\to 1}\frac{z^6+z^4+z^3-3}{(z^6+1)(z^6-1)}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^5+z^4+2z^3+3z^2+3z+3)}{(z^6+1)(z^3+1)(z-1)(z^2+z+1)}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z^5+z^4+2z^3+3z^2+3z+3)}{(z^6+1)(z^3+1)(z^2+z+1)}$$

$$= \frac{1+1+2+3+3+3}{(1+1)(1+1)(1+1+1)} = \frac{13}{(2)(2)(3)} = \frac{13}{12}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{x-1} = \frac{13}{12}$$

(13) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1}$

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, pero como se tiene varias raíces cuyas cantidades subradicales son diferentes, en este caso se agrupan en la forma siguiente: a cada una de las raíces se evalúa y dicha cantidad se resta, es decir:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{4x+5}-3)-(\sqrt{3x+13}-4)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{\sqrt{4x+5}-3}{x-1} - \frac{\sqrt{3x+13}-4}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{4}{\sqrt{4x+5}+3} - \frac{3}{\sqrt{3x+13}+4}\right]$$

$$= \frac{1}{1+1} + \frac{4}{3+3} - \frac{3}{4+4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{19}{24}$$

(14) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}$

Solución

También este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, pero observamos que tanto en el numerador como en el denominador tienen varios radicales en este caso se debe de transformar a la forma del ejercicio anterior dividiendo numerador y denominador entre x – 1 es decir:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{x-1}}{\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}} \quad \text{... (1)}$$

Ahora calculamos cada uno de los límites aplicando el criterio del ejercicio anterior.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3x-2}-1)+\sqrt{x}-1)-(\sqrt{5x-1}-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}[\frac{\sqrt{3x-2}-1}{x-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}]$$

$$=\lim_{x\to 1}[\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{x-1}=\frac{3}{4} \quad \text{... (2)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x-1}-1)-(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}[\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}]$$

$$=\lim_{x\to 1}[\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}]=\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{1}{2} \quad \ldots (3)$$

Ahora reemplazamos (2), (3) en (1) tenemos: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}$

Ahora resolveremos ejercicios aplicando las propiedades y los criterios explicados en los ejercicios anteriores.

(15) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt[3]{x+6}}{x^2-4}$

Solución

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt[3]{x+6}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt[3]{x+6}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{5x-2}-2)-(\sqrt[3]{x+6}-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{x-2} - \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{5}{\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}}{x+2}$$

$$= \frac{\frac{5}{4+4+4} - \frac{1}{4+4+4}}{2+2} = \frac{\frac{5}{12}-\frac{1}{12}}{4} = \frac{1}{12}$$

(16) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+8}-\sqrt{x^2+4}}{x^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+8}-\sqrt{x^2+4}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x^3+8}-2)-(\sqrt{x^2+4}-2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt[3]{x^3+8}-2)}{x^2}-\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(\sqrt[3]{(x^3+8)^2}+2\sqrt[3]{x^3+8}-4)x^2}-\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^3+8)^2}+2\sqrt[3]{x^3+8}+4}-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=0-\frac{1}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+8}-\sqrt{x^2+4}}{x^2}=-\frac{1}{4}$$

17 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[4]{x^2+6x}}{x^2-4}$

Solución

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[4]{x^2+6x}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2)-\sqrt[4]{x^2+6x}-2)}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{x^2-4}-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{x^2+6x}-2}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+2\sqrt[3]{x^2+4}+4}-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+6x}-4}{(x^2-4)(\sqrt[4]{x^2+6x}+2)}$$

$$=\frac{1}{4+4+4}-\lim_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{(x^2-4)(\sqrt[4]{x^2+6x}+2)(\sqrt{x^2+6x}+4)}$$

$$=\frac{1}{12}-\lim_{x\to 2}\frac{(x+8)(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt[4]{x^2+6x}+2)(\sqrt{x^2+6x}+4)}$$

$$=\frac{1}{12}-\lim_{x\to 2}\frac{x+8}{(x+2)(\sqrt[4]{x^2+6x}+2)(\sqrt{x^2+6x}+4)}$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{2+8}{4(2+2)(4+4)}=\frac{1}{12}-\frac{10}{128}=\frac{1}{12}-\frac{5}{64}=\frac{1}{192}$$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)-(\sqrt{1-x}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}-\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x}+1}$$

$$=\frac{1}{1+1+1}+\frac{1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

(19) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x+1}+4x-1}{\sqrt{x^2-3}-1}$

Solución

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x+1}+4x-1}{\sqrt{x^2-3}-1}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2(\sqrt{x+6}-2)-(\sqrt[3]{x+1}+1)+2(x^2-4)+4(x+2)}{\sqrt{x^2-3}-1}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{x^2(\sqrt{x+6}-2)}{x+2}-\frac{\sqrt[3]{x+1}+1}{x+2}+\frac{2(x^2-4)}{x+2}+\frac{4(x+2)}{x+2}}{\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x+2}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x+6}+2}-\frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2-(\sqrt[3]{x+1})+1}+2(x-2)+4}{\frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+1}}$$

$$=\frac{\frac{4}{4}-\frac{1}{1+1+1}+4-8}{\frac{-4}{1+1}}=\frac{1-4-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{\frac{-10}{3}}{-2}=\frac{5}{3}$$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[4]{x+1}-1}{x^2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[4]{x+1}-1}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[4]{x+1}-1}{x^2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[4]{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{x+1}-1)+(\sqrt[4]{x+1}-1)+x}{x^2(\sqrt[3]{x+1}-1)+(\sqrt[4]{x+1}-1)+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)+\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}+1}{x(\sqrt[3]{x+1}-1)+\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{x}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}+\dfrac{1}{(\sqrt[4]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}+1}{\dfrac{x^2}{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}+\dfrac{1}{(\sqrt[4]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}+x}\right]$$

$$=\frac{0+\dfrac{1}{(2)(2)}+1}{0+\dfrac{1}{(2)(2)}+0}=\frac{\dfrac{5}{4}}{\dfrac{1}{4}}=5$$

(21) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}+x+3}{\sqrt[3]{x+1}+1}$

Solución

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{3x+5}+x+3}{\sqrt[3]{x+1}+1}=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt[3]{3x+5}+1)+(x+2)}{\sqrt[3]{x+1}+1}=\lim_{x\to -2}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+2}}{\dfrac{\sqrt[3]{x+1}+1}{x+2}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\dfrac{3}{(\sqrt[3]{3x+5})^2-\sqrt[3]{3x+5}+1}+1}{\dfrac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2-\sqrt[3]{x+1}+1}}=\frac{\dfrac{3}{1+1+1}+1}{\dfrac{1}{1+1+1}}=\frac{2}{\dfrac{1}{3}}=6$$

(22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-x+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3x+10}-4}$

Solución

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-x+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3x+10}-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{x-1}-1)+(\sqrt{x^2-3}-1)-(x-2)}{\sqrt{3x+10}-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2}+\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}}{\frac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1}+\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}-1}{\frac{3}{\sqrt{3x+10}+4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{1+1+1}+\frac{4}{1+1}-1}{\frac{3}{4+4}}=\frac{\frac{1}{3}+2-1}{\frac{3}{8}}=\frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{3}{8}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{8}}=\frac{32}{9}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-x+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3x+10}-4}=\frac{32}{9}$$

3.1.1. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular los siguientes limites, mediante las propiedades.

① $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ **Rpta.** $\frac{a-1}{3a^2}$

② $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-x^2-12x+20}$ **Rpta.** 0

③ $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$ **Rpta.** 1

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-24}{x^2-4}$ **Rpta.** 11

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$ **Rpta.** $\dfrac{4}{5}$

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+3x^5-8}{7x^4-4x-3}$ **Rpta.** $\dfrac{17}{24}$

(7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^3+5x^2+3x-9}$ **Rpta.** $\dfrac{3}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ **Rpta.** $\dfrac{11}{17}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$, a > 0 y a ≠ 1 **Rpta.** $\dfrac{1}{1-a^2}$

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^{2n}+1-3x^{-2n}}{3x^{2n}-5+2x^{-2n}}$ **Rpta.** 5

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ **Rpta.** $\dfrac{49}{24}$

(12) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ **Rpta.** $(\dfrac{3}{2})^{10}$

(13) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$ **Rpta.** -1

(14) Hallar los valores de m de tal manera que $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{x^2-mx+3x-3m}{x-m}=m^2-27$

Rpta. m = 5, m = –4

(15) Hallar el valor de "a", a > 0, sabiendo que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2a^2x+ax^2}{2ax+x^2}=2a-5$ **Rpta.** a = 2

(16) Si $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{ax^2+2x+b}=L\neq 0$, calcular el valor de a + b **Rpta.** -2

(17) Si f(x) = x − 2 y $g(x+1)=x^2-x$, calcular $\lim_{x\to 2}\frac{(fog)(x+1)}{(gof)(x+2)}$ **Rpta.** 3

(18) Si se sabe que $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{1-x^3}=4$ y $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{1-x^2}=-6$. Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$ **Rpta.** -1

(19) Si $f(x)=\frac{b+x}{b-x}$, x ≠ b, calcular $\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}$ **Rpta.** $\frac{ab}{(b-a)^2}$

(20) Si $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$, x ≠ 0, calcular $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{5h}$ **Rpta.** -1

(21) Sí $\lim_{x\to -2}\frac{f(x+2)}{\sqrt{-2x}-2}=8$ y $\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x^2-4}=3$. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ **Rpta.** $\frac{1}{3}$

(22) Si $f(x)=\sqrt{3x+1}$, Hallar $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **Rpta.** $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

(23) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(24) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ **Rpta.** 1

(25) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14}}{x-5}$ **Rpta.** -1

(26) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ **Rpta.** $-\frac{1}{3}$

(27) $\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}$ **Rpta.** $-\frac{3}{2}$

(28) $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$ **Rpta.** $-\frac{4}{3}$

(29) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{a+b}}{x}$, a > 0, b > 0 **Rpta.** $\frac{1}{2\sqrt{a+b}}$

(30) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ **Rpta.** $\frac{3}{4}$

(31) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{b^2-x}-\sqrt{b^2-a}}{x-a}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2\sqrt{b^2-a}}$

(32) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$ **Rpta.** $\frac{1}{12}$

(33) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^4+x^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{6}$

(34) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

(35) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ **Rpta.** $\frac{1}{12}$

(36) $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$ **Rpta.** 4

(37) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ **Rpta.** $\frac{5}{8}$

(38) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

(39) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **Rpta.** $\frac{4}{3}$

(40) $\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ **Rpta.** 3

(41) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+7}-\sqrt{8}}$ **Rpta.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

(42) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-x}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2}$

(43) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{x-1}$ **Rpta.** $\dfrac{13}{12}$

(44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x+1}+1}{x^2}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{9}$

(45) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$ **Rpta.** $\dfrac{5}{6}$

(46) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-x-1}{x-1}$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{6}$

(47) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+3x-2}{x-1}$ **Rpta.** $\dfrac{7}{3}$

(48) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{9}$

(49) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+4}{(x-8)^2}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{144}$

(50) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sqrt[3]{x+1}-2\sqrt{x+1}+4x-1}{x^2+2x}$ **Rpta.** 2

(51) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}-1-x}{x-1}$ **Rpta.** $-\dfrac{5}{6}$

(52) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{x^2-\sqrt{x}-x-595}{x-25}$ **Rpta.** $\dfrac{489}{10}$

(53) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **Rpta.** 3

(54) $\lim_{x\to a} \frac{a\sqrt{ax}-x^2}{a-\sqrt{ax}}$ **Rpta.** 3a

(55) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x^2-a^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{6a\sqrt[3]{a^2}}$

(56) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ **Rpta.** 6

(57) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x}-x+2\sqrt[3]{2x}-\sqrt{8}}{x-4}$ **Rpta.** $\frac{3\sqrt{2}-8}{12}$

(58) $\lim_{x\to a} \frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ **Rpta.** 3a

(59) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{x}$ **Rpta.** $-\frac{3}{10}$

(60) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{3x+5}+x+3}{\sqrt[3]{x+1}+1}$ **Rpta.** 6

(61) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{x^3-2x^2-16x+32}$ **Rpta.** $-\frac{1}{36}$

(62) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+8}-\sqrt{x^2+4}}{x^2}$ **Rpta.** $-\frac{1}{4}$

(63) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt{1+x^2}}$ **Rpta.** -2

(64) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(65) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$ **Rpta.** $\frac{70}{3}$

(66) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}$

(67) $\lim_{x\to 2}\frac{6\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[4]{x+7}}{x^2-4}$ **Rpta.** $-\frac{1}{24}$

(68) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ **Rpta.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$

(69) $\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}+\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

(70) $\lim_{x\to 4}\frac{5\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}-4}{x-4}$ **Rpta.** $\frac{1}{12}$

(71) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ **Rpta.** $\frac{3}{4}$

(72) $\lim_{x\to 2}\frac{3\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt{8x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ **Rpta.** $2\sqrt{2}$

(73) $\lim_{x\to 2}\frac{3\sqrt[3]{2x^2}-2\sqrt{3x^2+4}+2}{x-2}$ **Rpta.** -1

(74) $\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{-2x}-x-10}{x+8}$ **Rpta.** $-\frac{19}{16}$

(75) $\lim_{x\to 27}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{\frac{x}{3}}-x+21}{x-27}$ **Rpta.** $-\frac{49}{6}$

(76) $\lim_{x\to 4}\frac{3\sqrt{x}-\sqrt[3]{2x}+x-8}{x-4}$ **Rpta.** $\frac{19}{12}$

(77) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x\sqrt[3]{x^2-1}-6}{3-x}$ **Rpta.** $\frac{7}{2}$

(78) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}$ **Rpta.** $\frac{1}{9}$

(79) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}$ **Rpta.** -12

(80) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}$

(81) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(82) $\lim\limits_{t\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3}}{t-2}$ **Rpta.** $\frac{1}{8\sqrt{3}}$

(83) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-\sqrt{x}}-2}{1-x}$ **Rpta.** $\frac{1}{8}$

(84) $\lim\limits_{x\to 25}\frac{\sqrt[3]{3+\sqrt{x}}-2}{\sqrt{x}-5}$ **Rpta.** $\frac{1}{12}$

(85) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ **Rpta.** $-\frac{1}{3}$

(86) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{x^3-2x^2-16x+32}$ **Rpta.** $-\frac{1}{36}$

(87) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$ **Rpta.** $\frac{70}{3}$

(88) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}$ **Rpta.** $\frac{1}{48}$

(89) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+7}}{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}$ **Rpta.** $\dfrac{22}{19}$

(90) $\lim_{x\to 2}\dfrac{4\sqrt[3]{4x}-5\sqrt{8x}-x^2+16}{x^3-4\sqrt{2x}-5\sqrt[3]{4x}+10}$ **Rpta.** $-\dfrac{23}{25}$

(91) $\lim_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{5x-3}+1}{\sqrt{x+3}-3}$ **Rpta.** $-\dfrac{11}{18}$

(92) $\lim_{x\to 3}\dfrac{|x-3|^2+26|x+3|-26\sqrt{\sqrt{3x}+33}}{4-2\sqrt[3]{\dfrac{x^2+15x-6}{x-3}}}$ **Rpta.** -69

(93) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+27}-3}{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$ **Rpta.** $\dfrac{32}{27}$

(94) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{3x-2}+x-\sqrt[5]{x-2}}{\sqrt[3]{x+7}-2}$ **Rpta.** $\dfrac{57}{5}$

(95) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{1-x+x^2}}$ **Rpta.** 6

(96) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7x+2}-\sqrt[3]{5x^2+7}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt{x+2}-2x}$ **Rpta.** $\dfrac{25}{288}$

(97) $\lim_{x\to -5}\dfrac{\sqrt[3]{5x-2}+x+8}{\sqrt[5]{x^2-x+2}+x+3}$ **Rpta.** $\dfrac{2560}{1863}$

(98) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{5x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-3x+2}$ **Rpta.** $\dfrac{2}{15}$

(99) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2-8}-x\sqrt[3]{x+6}+x^2-2}{x^3-2x^2+x-2}$ **Rpta.** $\dfrac{29}{30}$

(100) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{8-x}}{3x-2\sqrt{15-3x}}$ **Rpta.** $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

(101) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[5]{x^5+1}+x^2-2}{x-x\sqrt{x+1}}$ **Rpta.** -2

(102) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ **Rpta.** $+\infty$

(103) $\lim_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{-x+6}-3}{x^2-\sqrt{-x-2}-\sqrt[3]{x^2-1}+2x}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{18}$

(104) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}+4\sqrt[11]{x-1}-\sqrt[13]{x-1}+4}{\sqrt[3]{x-1}-5\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[7]{x-1}-3}$ **Rpta.** $-\dfrac{4}{3}$

(105) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}-3x-1}{x+3\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}}$ **Rpta.** $\dfrac{27}{8}$

(106) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ **Rpta.** $\dfrac{3}{2}$

(107) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x^2+x+4}+\sqrt{x^2+5x+10}-6x^2}{\sqrt[3]{\sqrt{x+3}+6}+\sqrt{x+8}-5x^2}$ **Rpta.** $\dfrac{506}{371}$

(108) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt{x^2+3}}{x-1}$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{4}$

(109) $\lim_{x\to 4} \dfrac{8-2x+\sqrt{x}-\sqrt[3]{2x}}{x-4}$ **Rpta.** $-\dfrac{23}{12}$

(110) $\lim_{x\to 10} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{2x+7}}{x-9-\cos(x-10)}$ **Rpta.** $\dfrac{5}{54}$

(111) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4\sqrt[3]{4x}-5\sqrt{8x}-x^2+16}{x^3-4\sqrt{2x}-5\sqrt[3]{4x}+10}$ **Rpta.** $-\dfrac{23}{25}$

(112) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1-2x}}{x+x^3}$ **Rpta.** 1

(113) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-x+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3x+10}-4}$ **Rpta.** 4

(114) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^3}}{x^2}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2}$

(115) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{x+1}-1}{x}$

(116) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{3-x}}{1-x^2}$

(117) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{1-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}}$

(118) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$

(119) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{1-x^2}$

(120) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$

(121) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+2}}$

(122) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

(123) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{x+6}-4}{x-2}$

(124) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x}-2\sqrt[3]{x}}{x-8}$

(125) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x-7}-\sqrt[3]{4x}+1}{x-2}$

(126) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2\sqrt[5]{\dfrac{x}{2}}}{\sqrt{2x}-2}$

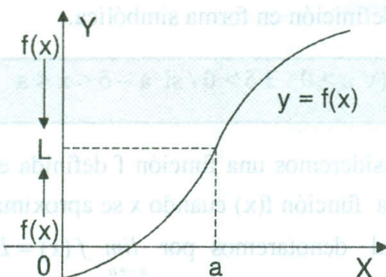
(127) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14}}{x-5}$

(128) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x-5}-\sqrt{2x+1}+4}{x-4}$

(130) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{x-1}$

3.12. LÍMITES LATERALES.-

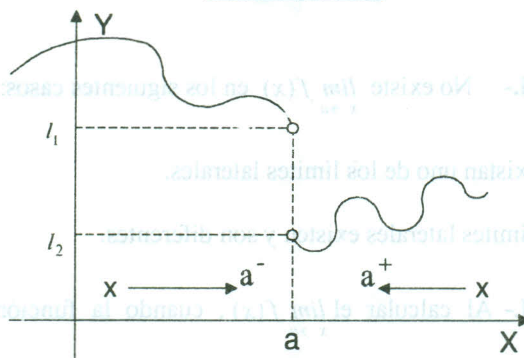
Para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$, depende del comportamiento de la función f(x) cuando x tiende hacia a, tanto para valores de x menores que a (por la izquierda de a), como para los valores de x mayores que a (por la derecha de a).



Para el caso de los límites laterales es más simple, por que depende del comportamiento de la función f(x) cuando x se aproxima hacia a ya sea por la izquierda o por la derecha de a y a esto denotaremos en la forma:

Al límite de la función f(x), cuando x se aproxima hacia a por la izquierda es el número l_1 que denotaremos por: $\lim_{x \to a^-} f(x) = l_1$

al límite de la función f(x), cuando x se aproxima hacia a por la derecha es el número l_2 que denotaremos por: $\lim_{x \to a^+} f(x) = l_2$



a) Definición.- Consideremos una función f definida en el intervalo <c,a>; el límite de la función f(x) cuando x se aproxima hacia "a" por la izquierda es el número real L al cual denotaremos por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que sí: $a - \delta < x < a$. Entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Expresando esta definición en forma simbólica.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Rightarrow (\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, \text{si } a - \delta < x < a \ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

b) Definición.- Consideremos una función f definida en el intervalo <a, d> el límite de la función f(x) cuando x se aproxima hacia "a" por la derecha es el número L al cual denotaremos por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si: $a < x < a + \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Expresando esta definición en forma simbólica.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Rightarrow (\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, \text{si } a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

OBSERVACION.- Para que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ debe de cumplirse la condición siguiente:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

En otras palabras, existe límite de una función sí y solo si, existen los límites laterales y son iguales.

OBSERVACIÓN.- No existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ en los siguientes casos:

① Cuando no existan uno de los límites laterales.

② Cuando los límites laterales existen y son diferentes.

OBSERVACIÓN.- Al calcular el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, cuando la función f(x) tiene diferentes reglas de correspondencia para $x<a$, y para $x>a$ se aplica el criterio de los límites laterales

Ejemplo.- Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ donde: $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si\ x\le 1 \\ x+1 & si\ x>1 \end{cases}$

Solución

Aplicando el criterio establecido, es decir: $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=L$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2+3=1+3=4 \qquad \text{...(1)}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x+1=1+1=2 \qquad \text{...(2)}$$

al comparar (1) y (2) se tiene que: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ entonces $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Ejemplo.- Calcular si existe, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, donde: $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x\le 2 \\ 8-2x & si\ x>2 \end{cases}$

Solución

Aplicando el criterio establecido se tiene: $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=1$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} x^2=2^2=4 \qquad \text{... (1)}$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} 8-2x=8-4=4 \qquad \text{... (2)}$$

al comparar (1) y (2) se tiene que: $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=4$ entonces $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

Ejemplo.- Calcular, si existe $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\frac{1}{4x^2}-16}$

Solución

$$\lim_{x\to 0} x\sqrt{\frac{1}{4x^2}-16}=\lim_{x\to 0} x\sqrt{\frac{1-64x^2}{4x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1-6x^2}}{2\,|\,x\,|}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sqrt{1-64x^2}}{2\,|\,x\,|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sqrt{1-64x^2}}{-2x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{\sqrt{1-64x^2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1-64x^2}}{2|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1-64x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-64x^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1-64x^2}}{2|x|} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1-64x^2}}{2|x|}$ entonces: $\nexists \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\frac{1}{4x^2}-16}$

Ejemplo.- Calcular si existe $\lim\limits_{x\to -3} \frac{[|x-1|]-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}}$

Solución

Por propiedad se tiene $[|x-1|] = [|x|]-1$

$$\lim_{x\to -3} \frac{[|x-1|]-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}} = \lim_{x\to 3} \frac{[|x|]-1-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}}$$

- + - +
-4 X -3 X -2

para $-4 \leq x < -3 \Rightarrow [|x|] = -4$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{[|x-1|]-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}} = \lim_{x\to -3^-} \frac{-4-1-x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to -3^-} \frac{-5-x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{-5+3}{\sqrt{9+4}} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

para $-3 \leq x < -2 \Rightarrow [|x|] = -3$

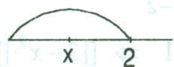
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{[|x-1|]-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}} = \lim_{x\to -3^+} \frac{-3-1-x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to -3^+} \frac{-4-x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{-4+3}{\sqrt{9+3}} = -\frac{1}{\sqrt{12}}$$

Como $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{[|x-1|]-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}} \neq \lim\limits_{x\to -3^+} \frac{[|x-1|]-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}}$ entonces $\nexists \lim\limits_{x\to -3} \frac{[|x-1|]-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}}$

Ejemplo.- Calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2[|\frac{2x+1}{x-1}|]-10x}{x^3-11x^2+38x-40}$

Solución

$$\frac{2x+1}{x-1}=2+\frac{3}{x-1} \Rightarrow [|\frac{2x+1}{x-1}|]=2+[|\frac{3}{x-1}|]$$



para $\frac{7}{4}<x\le 2 \Rightarrow \frac{3}{4}<x-1\le 1 \Rightarrow 1\le\frac{1}{x-1}<\frac{4}{3} \Rightarrow 3\le\frac{3}{x-1}<4$

Por lo tanto $[|\frac{3}{x-1}|]=3$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2[|\frac{2x+1}{x-1}|]-10x}{x^3-11x^2+38x-400}=\lim_{x\to 2^-}\frac{5x^2-10x}{x^3-11x^2+38x-40}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{5x(x-2)}{(x^2-9x+20)(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{5x}{x^2-9x+20}=\frac{10}{4-18+20}=\frac{5}{3}$$

Ejemplo.- Calcular $\lim_{x\to 7/3}\sqrt{|x|+[|3x|]}$ si existe

<u>Solución</u>

Sea $2\le x<\frac{7}{3} \Rightarrow 6\le 3x<7 \Rightarrow [|3x|]=6$

$$\lim_{x\to 7/3^-}\sqrt{|x|+[|3x|]}=\lim_{x\to 7/3^-}\sqrt{x+6}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

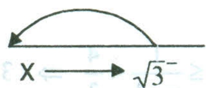
Sea $\frac{7}{3}\le x<\frac{8}{3} \Rightarrow 7\le 3x<8 \Rightarrow [|3x|]=7$

$$\lim_{x\to 7/3^+}\sqrt{|x|+[|3x|]}=\lim_{x\to 7/3^+}\sqrt{x+7}=\sqrt{\frac{28}{3}}$$

Como $\lim_{x\to 7/3^-}\sqrt{|x|+[|3x|]}\ne\lim_{x\to 7/3^+}\sqrt{|x|+[|3x|]}$ entonces $\therefore\ \nexists \lim_{x\to 7/3}\sqrt{|x|+[|3x|]}$

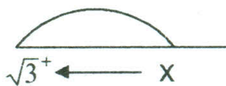
Ejemplo.- Calcular si existe $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\sqrt{[|3-x^2|]}}{x-\sqrt{3}}$

Solución



$\Rightarrow \sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x^2 < 3 \\ -3 < -x^2 < -2 \\ 0 < 3 - x^2 < 1 \Rightarrow [|3 - x^2|] = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{\sqrt{[|3-x^2|]}}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{0}{x-\sqrt{3}} = 0$$



$\Rightarrow \sqrt{3} < x < \sqrt{4} \Rightarrow 3 < x^2 < 4$

$\Rightarrow -4 < -x^2 < -3 \Rightarrow -1 < 3 - x^2 < 0 \Rightarrow$ Luego $[|3 - x^2|] = -1$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+} \frac{\sqrt{[|3-x^2|]}}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}+} \frac{\sqrt{-1}}{x-\sqrt{3}} \nexists.$$ Por lo tanto $\nexists \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{[|3-x^2|]}{x-\sqrt{3}}$

3.13 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

(1) Calcular si existen $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 4} f(x)$, donde: $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ x < 1 \\ x & si \ 1 < x < 4 \\ 4 - x & si \ x > 4 \end{cases}$

Rpta. **a)** 1 **b)** $\nexists$

(2) Calcular si existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde: $f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & si \ x < 2 \\ 2x^2 - x - 3 & si \ x > 2 \\ 6 & si \ x = 2 \end{cases}$ **Rpta. a)** $\nexists$

(3) Calcular si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ x & , x < 0 \end{cases}$ **Rpta.** 0

(4) Si $f(x) = \begin{cases} bx^2 + ab & si \ x \geq 0 \\ 2(x^2 + b)^{1/2} - b & si \ x < 0 \end{cases}$. Hallar a y b para que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y f(1) = 1

Rpta. a = 3 , $b = \frac{1}{4}$

(5) Calcular si existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 1 \\ 2 & , x>1\end{cases}$ **Rpta.** ∄

(6) Calcular si existe $\lim_{x\to 5} f(x)$, donde: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}} & , x\ge 5 \\ \dfrac{x^2-12x+35}{x-5} & , x<5\end{cases}$ **Rpta.** -2

(7) Calcular si existen **a)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

donde $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & si \ x\le 1 \\ 1 & si \ 1<x\le 2 \\ |x-3| & si \ x>2\end{cases}$ **Rpta.** **a)** ∄ **b)** 1

(8) Calcular si existe $\lim_{x\to 3} f(x)$, donde: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3} & si \ x<3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+2} & si \ x\ge 3\end{cases}$ **Rpta.** ∄

(9) Calcular si existe $\lim_{x\to 5/2} \sqrt{|x|+[|3x|]}$ **Rpta.** $\sqrt{\dfrac{19}{2}}$

(10) Calcular $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{[|x|]-x}{x}$ **Rpta.** -1

(11) Calcular si existe $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x|x-1|}{x-1}$ **Rpta.** ∄

(12) Calcular si existe $\lim_{x\to 1} \dfrac{x+|1-x|}{x^2+1}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2}$

(13) Calcular si existe $\lim_{x\to 4} \dfrac{|16-x^2|+1}{(4-x)\sqrt{5-|x-1|}}$ **Rpta.** ∄

(14) Calcular si existe $\lim_{x\to 1} \left|\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}\right|$ **Rpta.** 4

(15) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ **Rpta.** ∄

(16) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{|x-2|}$ **Rpta.** 0

(17) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 3}[|3x|]+|3x^2-1|$ **Rpta.** ∄

(18) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 5/3}\sqrt{|x|+[|3x|]+4}$ **Rpta.** ∄

(19) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x^2+1}\,[|2x-1|]}{|x^2-2|-[|x|]}$ **Rpta.** ∄

(20) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 1}\frac{[|x^2-1|]+2x}{2x^2+2[|x+1|]}$ **Rpta.** ∄

(21) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 1/6}\frac{12-[|\frac{x}{3}|]}{[|3x|]-10}$ **Rpta.** $-\frac{6}{5}$

(22) Calcular $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{2[|x^2+1|]+|x+2|-2}{[|3x+2|]}$ **Rpta.** $\frac{4+\sqrt{2}}{6}$

(23) Calcular $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{[|3x^2-1|]+2x}{[|x^2+1|]+3x-1}$ **Rpta.** 1

(24) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 5/2}\sqrt{|x|+[|3x|]+4}$ **Rpta.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

(25) Calcular $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[|2x|]+[|3x+1|]}{[|2x^2-1|]+2}$ **Rpta.** $\frac{9}{8}$

(26) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-[|\frac{x}{3}|]}{[|2x|]+10}$ **Rpta.** ∄

(27) Calcular $\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{[|x-3|]}$ **Rpta.** $-(2\sqrt{7}+6)$

(28) Calcular $\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{\frac{|x|^3}{3}-\frac{3[|x|]}{2}+\sqrt{3-x}}}{\sqrt{9\ sig\ (x-1)-x^2}}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(29) Calcular $\lim_{x\to \sqrt{2}^+} [x^2 - sig(|x^2-1|-1)]$ **Rpta.** 1

(30) Calcular si existe $\lim_{x\to \sqrt{2}} [x^2+5+sig(|x^2-1|-1)]$ **Rpta.** ∄

(31) Calcular si existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde: $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} & si\ \ x>1 \\ \frac{x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{(x-1)} & si\ \ x<1 \end{cases}$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

(32) Calcular si existe **a)** $\lim_{x\to -1} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

Donde: $f(x)=(x-2[|x|])^2$ **Rpta.** a) ∄ b) 1

(33) Calcular si existe $\lim_{x\to 3} [|x|]+[|4-x|]$ **Rpta.** 3

(34) Calcular $\lim_{x\to 3^+} [|\frac{36-5x}{10}|].[|\frac{36+5x}{10}|]$ **Rpta.** 10

(35) Calcular si existe $\lim_{x\to -1} \frac{[|x^2|]-1}{x+1}$ **Rpta.** ∄

(36) Calcular $\lim_{x\to 2^+} (x^2+2x)[|1-x|]$ **Rpta.** -16

(37) Calcular si existe $\lim_{x\to -3} \frac{[|x-1|]-x}{\sqrt{x^2-[|x|]}}$ **Rpta.** ∄

(38) Calcular si existe $\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{[|x^2-3|]-[|x^2|]}{x^2-2}$ **Rpta.** $\nexists$

(39) Calcular si existe $\lim_{x\to 3}([|x-1|]-x)\sqrt{x-[|x|]}$ **Rpta.** $\nexists$

(40) Calcular si existe $\lim_{x\to -2} f(x)$, donde: $f(x)=\begin{cases} \frac{[\![x-1]\!]-x}{\sqrt{x-[\![x]\!]}} & si \ -9\le x<-2 \\ \frac{[\![3x]\!]-[\![x]\!]-8.[|\frac{x}{3}|]}{x-|x|}, & si \ -2\le x<7 \end{cases}$

Rpta. $\nexists$

(41) Calcular si existe los límites:

a) $\lim_{x\to 2/3} \frac{x}{[|3x-1|]}$ **b)** $\lim_{x\to 1}(x-1)[|x|]$

(42) Evaluar $\lim_{x\to 1} f(x)$ donde: $f(x)=\begin{cases} \frac{x[|\sqrt{9-x}|]^2}{x+2} & si \ x\ge 1 \\ \frac{x+3}{2x+1} & si \ x\in <0,1> \end{cases}$ **Rpta.** $\frac{4}{3}$

(43) $\lim_{x\to 3^+}\left[\left|\frac{36-5x}{10}\right|\right].\left[\left|\frac{36+5x}{10}\right|\right]$ **Rpta.** -10

(44) $\lim_{x\to 6} \frac{2[|x^2+1|]+|x+2|-2}{[|3x+2|]}$ **Rpta.** $\frac{1}{3(4-\sqrt{2})}$

(45) $\lim_{x\to 1} \frac{[|2x+3|]-3x-2[|x|]}{1-x}$ **Rpta.** 3

(46) Sea $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & ; \ x\le 1 \\ 2ax-b & ; \ 1<x\le 2 \\ x+1 & ; \ x>2 \end{cases}$. Hallar los valores de a y b para que exista los límites de f(x) en x = 1 y x = 2. **Rpta.** $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

(47) Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+2}, & x<-2\\ ax^2-2bx+1, & -2\le x\le 2\\ \dfrac{x^2-13x+22}{x-2}, & x>2\end{cases}$, Hallar a y b de tal manera que existe los limites de f(x) en x = 2 y x = -2

Rpta. $a=\frac{1}{8}$ y $b=\frac{21}{8}$

(48) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, donde: $f(x)=\begin{cases}[|x|] & si\ [|x|]\ es\ par\\ 2x-[|x-2|] & si\ [|x|]\ es\ impar\end{cases}$

Rpta. $\nexists$

(49) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, donde: $f(x)=\dfrac{[|2x|]+|\operatorname{sen} x|}{|x|}$ **Rpta.** $\nexists$

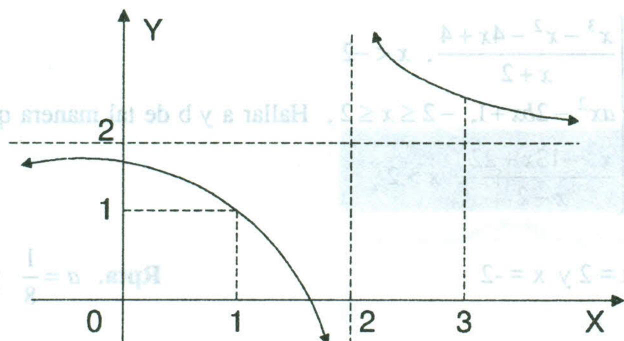
(50) Calcular si existe $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^2+5+sig(|x^2-1|-1))$ **Rpta.** $\nexists$

(51) Sí $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+3x^2-9x-27}{x+3}, & si\ \ x<-3\\ ax^2-2bx+1, & si\ \ -3\le x\le 3\\ \dfrac{x^2-22x+57}{x-3}, & si\ \ x>3\end{cases}$. Hallar a y b de tal manera que exista los limites de f(x) en x = -3, x = 3

Rpta. a = -1 y $b=\frac{4}{3}$

3.14. LIMITES AL INFINITO.-

Consideremos la función $f(x)=2+\dfrac{1}{x-2}$, cuya gráfica es:



Examinando la gráfica para valores de x cada vez más grande, el valor de la función f se aproxima a 2, por lo tanto se puede decir que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ para el caso cuando x decrece sin limite, el valor de la función f se aproxima a 2. Luego podemos decir que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$. A estos tipos de límites se les llama límites al infinito.

Ahora daremos las definiciones correspondientes.

a) DEFINICION.- Consideremos f: <a, + ∞> ⟶ R, una función definida en el intervalo <a,+∞>, él limite de la función f(x) cuando x crece sin limite es él número L y denotamos por $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, para todo ε > 0, existe un N > 0 tal que sí x > N entonces: |f(x) – L| < ε; es decir:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N>0 \ /\ \text{sí } x>N \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$$

b) DEFINICION.- Consideremos f: <-∞,b> ⟶ R, una función definida en el intervalo <-∞,b> él limite de la función f(x) cuando x decrece sin limite es él número L y denotaremos por $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, si para todo ε > 0 existe un número M < 0 tal que sí x < M, entonces: | f(x) – L| < ε, es decir:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon>0, \exists\ M<0 \ /\ \text{sí } x<M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$$

c) DEFINICION.- Consideremos la función $f: D_f \to R$, una función definida en su dominio él limite de la función f(x) cuando $x \to \infty$, es él número real L que denotaremos por $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ sí para todo $\varepsilon > 0, \exists\ M > 0$, tal que sí $|x| > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

d) TEOREMA.- Sea n un número entero positivo cualquiera entonces se cumple:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Demostración

i) Por definición: $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N > 0 / x > N \Rightarrow |\frac{1}{x^n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{x^n}| < \varepsilon$

Como $x > N > 0 \Rightarrow |x|^n > N^n \Rightarrow \frac{1}{|x|^n} < \frac{1}{N^n}$

Por lo tanto si $x > N \Rightarrow \frac{1}{|x|^n} < \frac{1}{N^n}$ y $\frac{1}{|x|^n} < \varepsilon \Rightarrow N^n = \frac{1}{\varepsilon}$

Como $N^n = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$

Luego sí $x > N \Rightarrow |\frac{1}{x^n} - 0| < \varepsilon$ siempre que: $N = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$

ii) Su demostración es en forma similar que i).

Ejemplos.- Calcular los siguientes límites:

(1) Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 - 2x + 1}$

Solución

La forma más práctica de calcular los limites cuando x ⟶ +∞ o x ⟶ -∞ es dividiendo tanto el numerador como el denominador, entre la mayor potencia de x que aparece en la expresión dada, luego se aplica el criterio del teorema anterior, para nuestro ejemplo dividimos entre x^2 tanto el numerador como denominador es decir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+5}{3x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0+0}{3-0+0} = \frac{2}{3}$$

② $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

Solución

Cuando x toma valores positivos bastante grande, se toma $x^2 = \sqrt{x^4}$ con el cual dividimos el numerador y denominador entre $x^2 = \sqrt{x^4}$ se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = \frac{2-0-0}{\sqrt{1+0}} = 2$$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}$

Solución

Como x toma valores positivos bastante grandes, se toma $x = \sqrt{x^2}$ con el cual dividimos el numerador y denominador entre $x = \sqrt{x^2}$ se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x+7}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{7}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1 \qquad \therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+7} = 1$$

④ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}$

Solución

Cuando x toma valores negativos bastante grande, se debe tomar $x = -\sqrt{x^2}$, con el cual dividimos el numerador y denominador es decir:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+4}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{x+7}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{7}{x}}=-\frac{\sqrt{1+0}}{1+0}=-1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+7}=-1$$

(5) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$

Solución

En este tipo de ejercicios para poder aplicar el método de los ejemplos anteriores, es necesario expresar a la función como un cociente y para esto se debe racionalizar:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-5x+6}-x)(\sqrt{x^2-5x+6}+x)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}$$

Como x toma valores positivos bastante grande entonces dividimos entre $x=\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}=\frac{-5+0}{\sqrt{1-0+0}+1}=-\frac{5}{2}$$

(6) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+4}+x$

Solución

En forma análoga al ejemplo anterior debemos expresar a la función como un cociente y para esto se debe racionalizar:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+4}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x+4}+x)(\sqrt{x^2-2x+4}-x)}{\sqrt{x^2-2x+4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+4}{\sqrt{x^2-2x+4}-x}$$

Como x toma valores negativos bastante grande entonces dividimos entre $x=-\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+4}{\sqrt{x^2-2x+4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1}=\frac{-2+0}{-\sqrt{1-0+0}-1}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+4}+x=1$$

(7) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2+4x+7}-\sqrt[3]{x^3+2x^2-30}\right)$

Solución

En el ejercicio dado se observa que el numerador es de un grado mayor que el denominador en estos casos se resta y se suma x a la vez para luego hacer las operaciones respectivas.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2+4x+7}-\sqrt[3]{x^3+2x^2-30}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2+4x+7}-x\right)-\left(-x+\sqrt[3]{x^3+2x^2-30}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+5}{x^2+4x+7}+\frac{-2x^2+30}{x^2+x.\sqrt[3]{x^3+3x^2-30}+\sqrt[3]{(x^3+2x^2-30)^2}}\right)$$

Ahora dividimos numerador y denominador entre x^2

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2+4x+7}-\sqrt[3]{x^3+2x^2-30}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}+\frac{-2+\frac{30}{x^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}-\frac{30}{x^3}}+\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x}-\frac{30}{x^3})^2}}\right)$$

$$=\frac{-1+0}{1+0+0}+\frac{-2+0}{1+\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[3]{1+0}}=-1-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$$

⑧ $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}{\sqrt{x+2}}$$

Solución

Como x toma valores positivos dividimos numerador y denominador entre $\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}}}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}}{\sqrt{1+0}} = 1$$

3.15 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular si existen los siguientes ejercicios.

① $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+2x^2-5}{-8x^3+x+2}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}$

③ $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+7x+5}{x^3+2x+1}$ **Rpta.** 0

④ $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^3}{x^2+2}-\frac{x^2}{x+2})$ **Rpta.** 2

⑤ $\lim_{x\to\infty} [\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}]$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

⑥ $\lim_{x\to+\infty} (\frac{3x^2-2}{2x+1} \div \frac{x^2-4x}{x-3})$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

⑦ $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1})$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{16x^2+8x+6}-\sqrt{16x^2-8x-6})$ **Rpta.** 2

⑨ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+9})$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

⑩ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+3}$ **Rpta.** $-\sqrt{2}$

⑪ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$ **Rpta.** 1

⑫ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$ **Rpta.** $\pm\frac{5}{2}$

⑬ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)$ **Rpta.** $\frac{a}{2}$

⑭ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$ **Rpta.** $\frac{a+b}{2}$

⑮ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt[3]{x^2-x^3+1})$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

⑯ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{-x}}{\sqrt{1-4x^2}}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}$

⑰ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$ **Rpta.** 0

⑱ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-\sqrt{x^2+1}}$ **Rpta.** $-\infty$

⑲ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{2x}}-\sqrt{x-\sqrt{2x}})$ **Rpta.** $\sqrt{2}$

⑳ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$ **Rpta.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(21) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ **Rpta.** 0

(22) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2}$ si $x\to+\infty$, $-\infty$ si $x\to-\infty$

(23) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$ **Rpta.** -1

(24) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^4+x^3+1}-\sqrt[4]{x^8+x^6+1})$ **Rpta.** $\dfrac{3}{4}$

(25) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}}$ **Rpta.** ∞

(26) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{\dfrac{(5-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}{243x-11}}$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{3}$

(27) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+2x^2+3}-\sqrt{x^2+4x+1})$ **Rpta.** $-\dfrac{4}{3}$

(28) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ **Rpta.** 1

(29) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$ **Rpta.** 1

(30) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}$ **Rpta.** 1

(31) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$ **Rpta.** 1

(32) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3+1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$ **Rpta.** ∞

(33) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$ **Rpta.** 0

(34) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}.x^{1/2}$ **Rpta.** $\sqrt{2}$

(35) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+6x^2-16}-x}{\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-x}}$ **Rpta.** $\dfrac{4}{3}$

(36) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^9+3x^4+1}+\sqrt[5]{x^{10}+x^2+1}+10}{\sqrt[4]{x^4+x^2+1}+\sqrt[4]{x^{12}+x^2+1}-10}$ **Rpta.** 2

(37) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$ **Rpta.** 0

(38) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x+\sqrt{4x+\sqrt{4x}}}-2\sqrt{x})$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2}$

(39) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\sqrt[5]{x^4-x^5+1})$ **Rpta.** $-\dfrac{2}{15}$

(40) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^6-4x^3}-\sqrt[4]{x^{12}+2x^9})$ **Rpta.** $-\dfrac{5}{2}$

(41) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{\dfrac{x^5-x^3}{x^2+3}}-x)$ **Rpta.** 0

(42) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-\sqrt[3]{x^6-2x^4})$ **Rpta.** $\dfrac{2}{3}$

(43) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$ **Rpta.** 1

(44) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x^3+5}+4x^2+6}-2x}{x-\sqrt[3]{x^3-12x^2+1}}$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{16}$

(45) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x\sqrt[3]{x^3+1}}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(46) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}-\sqrt[5]{x^7+3x^3+1}}$ **Rpta.** 1

(47) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{x+1}$ **Rpta.** 2

(48) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[6]{x^6-1}+2x}{x+2}$ **Rpta.** 3

(49) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3+2x}+x}{x-1}$ **Rpta.** $\sqrt{3}+1$

(50) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[5]{x^5+1}+x}{x+1}$ **Rpta.** 2

(51) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{(x-a)(x-b)})$ **Rpta.** $\frac{a+b}{2}$

(52) Hallar el mayor valor de c de modo que él $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{cx^{c-1}+2x^c}{\sqrt{3x^2+1}}$ sea infinito y calcular él limite. **Rpta.** c = 1, $L=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

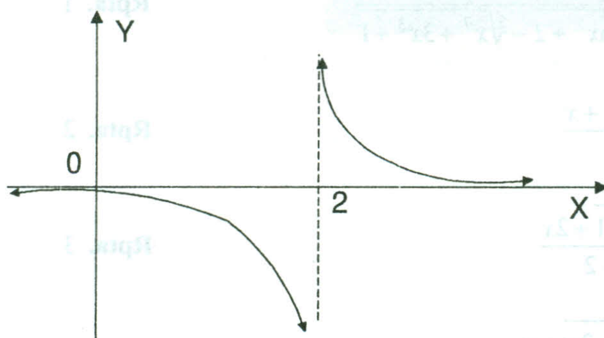
(53) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x^4+kx^3+1}{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+3x-10})=\frac{3}{2}$, calcular el valor de k **Rpta.** k = 3

(54) Hallar las constantes k y b que cumple $\lim\limits_{x\to+\infty} (kx+b-\frac{x^3+1}{x^2+1})=0$ **Rpta.** k = 1, b = 0

(55) Determinar el valor de las constantes, M y N tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} [Mx+N-\frac{x^3}{x^2+1}]=0$

3.16 LIMITES INFINITOS.-

Consideremos la función $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ cuya gráfica es:



En el gráfico se observa que cuando x se aproxima a 2 por la derecha, la función f(x) crece sin limite y su notación es:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

y cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, la función f(x) decrece sin limite y su notación es:

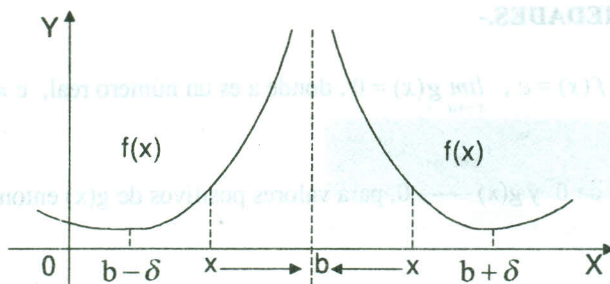
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

a todo este tipo de limites se les llama limites infinitos.

Ahora daremos las definiciones siguientes:

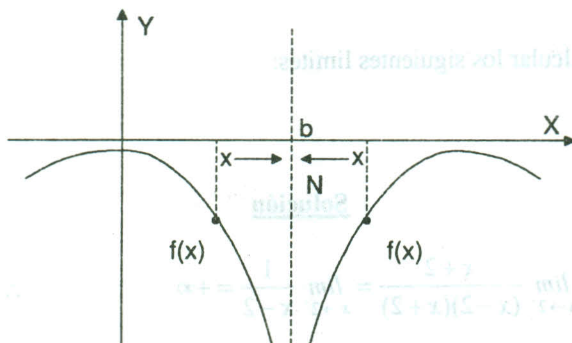
a) DEFINICION.- Consideremos una función f definida en algún intervalo I que contiene a c, excepto en c, entonces él $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, sí y solo si, dado un número N > 0, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ entonces f(x) > N.

Es decir: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty \iff (\forall N > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, \text{sí } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > N)$



b) DEFINICION.- Consideremos una función f definida en algún intervalo I que contiene a b excepto en b, entonces él $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$, sí y solo si, dado un número N<0, existe un $\delta > 0$ tal que sí: $0 < |x - b| < \delta$ entonces f(x)<N.

Es decir: $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty \iff (\forall\ N < 0,\ \exists\ \delta > 0 \ /\ \text{sí}\ 0 < |x - b| < \delta \Rightarrow f(x) < N)$



c) TEOREMA.- Si n es un número entero positivos cualquiera, entonces:

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ **ii)** $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty\ , & si\ n\ es\ impar \\ +\infty\ , & si\ n\ es\ par \end{cases}$

La demostración del teorema queda a cargo del estudiante.

NOTACION.-

i) $\frac{a}{0} = +\infty,\ \ a > 0$ **ii)** $\frac{a}{0} = -\infty,\ \ a < 0$ **iii)** $\frac{0}{a} = 0,\ \ a \neq 0$

d) PROPIEDADES.-

Sí $\lim_{x\to a} f(x) = c$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, donde a es un número real, $c \neq 0$, entonces:

i) Sí c> 0 y g(x) $\longrightarrow$ 0, para valores positivos de g(x) entonces: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ii) Sí c > 0 y g(x) $\longrightarrow$ 0, para valores negativos de g(x) entonces: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

iii) Sí c < 0 y g(x) $\longrightarrow$ 0, para valores positivos de g(x) entonces: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

iv) Si c <0 y g(x) $\longrightarrow$ 0, para valores negativos de g(x) entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Ejemplos.- Calcular los siguientes limites:

(1) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4}$

Solución

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \qquad \therefore \lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = +\infty$$

(2) $\lim_{x\to 1^-} \frac{5x^3+1}{2-x-x^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{5x^3+1}{2-x-x^2} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{5x^3+1}{x^2+x-2} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{5x^3+1}{(x+2)(x-1)} = -\frac{(-4)}{0^-} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

(3) $\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

Solución

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{16-x^2}{(x-4)\sqrt{16-x^2}}=\lim_{x\to 4^-}\frac{(4-x)(x+4)}{(x-4)\sqrt{16-x^2}}=-\lim_{x\to 4^-}\frac{x+4}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{-8}{0^+}=-\infty$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}=-\infty$$

(4) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{[|x|]-4}{x-4}$

Solución

$x\to 4^-\ \Rightarrow\ x\in[3,4>\ \Rightarrow\ [|x|]=3$

$$\lim_{x\to 4-}\frac{[|x|]-4}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{3-4}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{-1}{x-4}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \qquad \therefore\ \lim_{x\to 4-}\frac{[|x|]-4}{x-4}=+\infty$$

3.17 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular los siguientes límites:

(1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x^2-4}$ **Rpta.** $+\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x}{x+4}$ **Rpta.** $+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x^2-4}$ **Rpta.** $-\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{4x}{9-x^2}$ **Rpta.** $+\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{1}{x-5}$ **Rpta.** $+\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{1-x}$ **Rpta.** $-\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x-2}{x+1}$ **Rpta.** $-\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[|x|]-x}{3-x}$ **Rpta.** $-\infty$

(9) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$ **Rpta.** $+\infty$

(10) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-12}$ **Rpta.** $-\infty$

(11) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ **Rpta.** $+\infty$

(12) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3x^2-7x+6}{x^2-x-6}$ **Rpta.** $+\infty$

(13) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{|16-x^2|+1}{(4-x)\sqrt{5-|x+1|}}$ **Rpta.** $+\infty$

(14) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-5x-3}{x-1}$ **Rpta.** ∞

(15) $\lim\limits_{x\to 1} (\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x^2-2x-1})$ **Rpta.** $+\infty$

(16) $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4})$ **Rpta.** ∞

3.18 TEOREMA DE SANDWICH.-

Consideremos tres funciones f(x), g(x) y h(x) tales que

i) $f(x) \le g(x) \le h(x),\ \forall\ x \ne x_0$ y

ii) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$, entonces se cumple: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$

Demostración

Mediante la definición de limites se tiene:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta_1 > 0\ /\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0, \exists\ \delta_2 > 0\ /\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |h(x) - L| < \varepsilon$$

Luego si tomamos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta_1 \\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |f(x) - L| < \varepsilon \\ |h(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$

de donde: $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ entonces:

$L - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < L + \varepsilon$, de donde: $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ por lo tanto:

Si $0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |g(x) - L| < \varepsilon$, lo que significa que: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$

3.19 LIMITES TRIGONOMETRICOS.-

Para él cálculo de los límites trigonométricos es necesario establecer algunos criterios, los cuales mencionaremos en el teorema siguiente:

a) TEOREMA.- Demostrar que:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$ **ii)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg}\, x}{x} = 1$

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \text{sen}\, x = \text{sen}\, x_0$ **iv)** $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

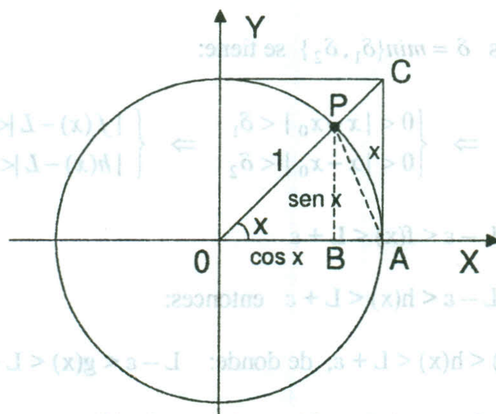
Demostración

i) Demostraremos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

para esto demostraremos la desigualdad: $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$

donde x es el ángulo medido en radianes tal que: $0<|x|<\frac{\pi}{2}$

Consideremos él circulo unitario con centro en el origen del sistema de coordenadas rectangulares XY.



Sea $0<x<\frac{\pi}{2}$ el arco AP, medido en radianes, donde:

P(cos x, sen x), A(1,0), B(cos x,0), C(1, tg x) siendo C el punto de intersección de la recta que contiene el radio OP con la recta tangente a la circunferencia en A.

En el gráfico observamos que:

Area Δ POA < Area del sector circular OPA < área Δ OCA

Donde: Area $\Delta\ POA=\frac{1}{2}(1)\operatorname{sen} x=\frac{\operatorname{sen} x}{2}$

Area del sector circular $OPA=\frac{1}{2}\text{arco(radio)}^2=\frac{x}{2}$

Area $\Delta OCA=\frac{\operatorname{tg} x}{2}$, es decir: $\frac{\operatorname{sen} x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg} x}{2}$, de donde:

sen x < x < tg x dividiendo entre sen x.

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{tomando inverso} \quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \textbf{... (1)}$$

Además $d(A,P) < arc.\overset{\frown}{AP}$, $(1-\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x < x^2$

$$1-\cos x < \frac{x^2}{2} \Rightarrow 1-\frac{x^2}{2} < \cos x \qquad \textbf{... (2)}$$

Ahora de (1) y (2) se tiene: $1-\frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ **... (α)**

si $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ suponiendo que $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \frac{\pi}{2}$

que reemplazando en (α) se cumple:

$$1-\frac{(-x)^2}{2} < \cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} < 1 \Rightarrow 1-\frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Luego $1-\frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ se cumple para $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

Como $\lim\limits_{x \to 0} 1-\frac{x^2}{2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ entonces por el teorema de Sándwich se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Ejemplo.- Calcular los siguientes límites:

① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{x}$

Solución

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{x} = \lim_{x \to 0} 7\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = 7(1) = 7$$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{6x-\text{sen}\,2x}{2x+3\,\text{sen}\,4x}$

Solución

Dividimos numerador y denominador entre x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x-\text{sen}\,2x}{x}}{\frac{2x+3\,\text{sen}\,4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{6-\frac{\text{sen}\,2x}{x}}{2+3\frac{\text{sen}\,4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{6-2\frac{\text{sen}\,2x}{2x}}{2+12\frac{\text{sen}\,4x}{4}}=\frac{6-2}{2+12}=\frac{2}{7}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{6x-\text{sen}\,2x}{2x+3\,\text{sen}\,4x}=\frac{2}{7}$$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}.\frac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}=(1)(\frac{0}{2})=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\text{sen}\,x}{x})^2\frac{1}{1+\cos x}=(1)(\frac{1}{1+1})=\frac{1}{2}$$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(mx)-\cos(n)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos(nx)]-[1-\cos mx]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\, nx}{x^2(1+\cos nx)}-\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\, mx}{x^2(1+\cos mx)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{n\,\text{sen}\, nx}{nx}\right)^2\frac{1}{1+\cos nx}-\lim_{x\to 0}\left(\frac{m\,\text{sen}\, mx}{mx}\right)^2\frac{1}{1+\cos mx}$$

$$=\frac{n^2}{2}-\frac{m^2}{2}=\frac{n^2-m^2}{2}$$

⑥ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\text{sen}\,4x)}{\text{sen}^2(\text{sen}\,3x)}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\text{sen}\,4x)}{\text{sen}^2(\text{sen}\,3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{16.\frac{\text{sen}^2\,4x}{16x^2}\left(\frac{1-\cos(\text{sen}\,4x)}{\text{sen}^2\,4x}\right)}{9.\frac{\text{sen}^2\,3x}{9x^2}\left(\frac{\text{sen}(\text{sen}\,3x)}{\text{sen}\,3x}\right)^2}=\frac{16(1)(\frac{1}{2})}{9(1)(1)}=\frac{8}{9}$$

NOTA.- Si se tiene que calcular limites de funciones trigonométricos, cuando x tiene a x_0 diferente de cero, aplicaremos el teorema siguiente.

b) TEOREMA.- Sí $\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=L$

Demostración

Aplicando la definición de limites se tiene:

Para cada ε >0, existe δ > 0 tal que sí $x\in D_f$ y $0<|x-x_0|<\delta$ entonces:

$$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad \ldots (1)$$

Ahora hacemos un cambio $h=x-x_0$ de donde $x=x_0+h$ es decir la sustitución en (1) se tiene: $x_0+h\in D_f$ y $0<|x_0+h-x_0|<\varepsilon$ entonces $|f(x_0+h)-L|<\varepsilon$, por lo tanto:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, x_0 + h \in D_f \quad \Lambda \quad 0 < |h| < \delta \Rightarrow \; | f(x_0 + h) - L | < \varepsilon$$

Luego por definición de límite se tiene: $\therefore \; \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$

OBSERVACION.- En la práctica este procedimiento consiste en hacer el cambio de variable de la siguiente forma:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x - x_0 \to 0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) \quad \text{donde:} \quad x - x_0 = h \;\Rightarrow\; x = x_0 + h$$

A este procedimiento se le da el nombre de reducción del limite de x_0 a 0.

Ejemplo.- Calcular los siguientes límites:

① $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$

Solución

Aplicando el procedimiento de reducción: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x} = \lim\limits_{x - \frac{\pi}{3} \to 0} \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$ ... **(1)**

Sea $x - \dfrac{\pi}{3} = h \;\Rightarrow\; x = h + \dfrac{\pi}{3}$ ... **(2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{x - 3x} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2\cos(h + \frac{\pi}{3})}{\pi - 3(h + \frac{\pi}{3})} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2[\cosh . \cos\frac{\pi}{3} - \text{senh} . \text{sen}\frac{\pi}{3}]}{-3h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2[\frac{\cosh}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{senh}]}{-3h} = -\frac{1}{3} \lim_{h \to 0} [\frac{1 - \cosh}{h} + \sqrt{3}\,\frac{\text{senh}}{h}]$$

$$= -\frac{1}{3}[0 + \sqrt{3}] = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cosh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cosh)(1+\cosh)}{h(1+\cosh)}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cosh)}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}^2 h}{h(1+\cosh)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\text{senh}}{h}.\frac{\text{senh}}{1+\cosh}=(1)(\frac{0}{1+1})=\frac{0}{2}=0$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$

Solución

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}=\lim_{x-1\to 0}\frac{1+\cos \pi x}{(x-1)^2} \qquad \textbf{... (1)}$$

Sea $x-1=h \Rightarrow x=h+1$ **... (2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos \pi x}{x^2-2x+1}=\lim_{h\to 0}\frac{1+\cos \pi(h+1)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1+\cos \pi h\cos \pi-\text{sen}\,\pi h\,\text{sen}\,\pi}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos \pi h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos \pi h)(1+\cos \pi h)}{h^2(1+\cos \pi h)}=\lim_{h\to 0}(\frac{\pi\,\text{sen}\,\pi h}{\pi h})^2.\frac{1}{1+\cos \pi h}$$

$$=\pi^2(\frac{1}{1+1})=\frac{\pi^2}{2} \qquad \therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}=\frac{\pi^2}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\text{sen}\,6x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\text{sen}\,6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos 6x}{x}}{\frac{6\,\text{sen}\,6x}{6x}}=\frac{0}{6}=0$$

donde $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}6.\dfrac{\text{sen}\,6x}{6x}.\dfrac{\text{sen}\,6x}{1+\cos 6x}=6(1)(0)=0$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\operatorname{sen}x-\cos x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\operatorname{sen}x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+\operatorname{sen}-\cos x}{x}}{\frac{1-\operatorname{sen}x-\cos x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}+\frac{1-\cos x}{x}}{-\frac{\operatorname{sen}x}{x}+\frac{1-\cos x}{x}}=\frac{1+0}{-1+0}=-1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\operatorname{sen}x-\cos x}=-1$$

(5) $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}(\pi-x)}{x(\pi-x)}$

Solución

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}(\pi-x)}{x(\pi-x)}=\lim_{x-\pi\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi-x)}{x(\pi-x)} \quad \text{... (1)}$$

Sea $z = x - \pi \Rightarrow x = z + \pi$ **... (2)**

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}(\pi-x)}{x(\pi-x)}=\lim_{z\to\pi}\frac{\operatorname{sen}(-z)}{(z+\pi)(-z)}=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}z}{z}\left(\frac{1}{z+\pi}\right)=(1)\left(\frac{1}{0+\pi}\right)=\frac{1}{\pi}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}(\pi-x)}{x(\pi-x)}=\frac{1}{\pi}$$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos 3x}{x^2}}{\frac{1-\cos 4x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\operatorname{sen}3x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos 3x}}{\left(\frac{\operatorname{sen}4x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos 4x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(3\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x})^2 (1+\cos 4x)}{(4\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x})^2 (1+\cos 3x)} = \frac{9(2)}{16(2)} = \frac{9}{16}$$

3.20 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Calcular los siguientes límites:

① $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\pi - x}$ **Rpta.** 0

② $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ **Rpta.** 4

③ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} 2x}{x + \operatorname{sen} 3x}$ **Rpta.** $-\frac{1}{4}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

⑥ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$ **Rpta.** cosx

⑦ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$ **Rpta.** 1

⑧ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$ **Rpta.** $-\frac{1}{12}$

⑨ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$ **Rpta.** 3

⑩ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2\cos x + \cos 2x}{x^2}$ **Rpta.** -1

(11) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^7 x}{x^2}$ **Rpta.** $\frac{7}{2}$

(12) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(13) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(14) $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ **Rpta.** $\frac{2}{\pi}$

(15) $\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{1-\sqrt{x}}$ **Rpta.** π

(16) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\operatorname{sen}(x-\pi/6)}{\sqrt{3}/2-\cos x}$ **Rpta.** 2

(17) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$ **Rpta.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(18) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\operatorname{tg} x$ **Rpta.** 1

(19) $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}$ **Rpta.** cos a

(20) $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$ **Rpta.** –sen a

(21) $\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen} 6x}{3x-2\pi}$ **Rpta.** 2

(22) $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(h+a)-\operatorname{sen}^2 a}{h}$ **Rpta.** sen 2a

(23) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,3x.\text{sen}\,5x}{(x-x^3)^2}$ **Rpta.** 15

(24) $\lim_{x\to 0} \frac{3\,\text{sen}\,\pi x - \text{sen}\,3\pi x}{x^3}$ **Rpta.** $4\pi^3$

(25) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 3\cos x + 1}{1-\cos x}$ **Rpta.** $\frac{7}{2}$

(26) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{sen}^2\,6x + \text{tg}\,3x}{3x-\pi}$ **Rpta.** -1

(27) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \text{tg}^2\,x(\sqrt{2\,\text{sen}^2\,x + 3\,\text{sen}\,x + 4} - \sqrt{\text{sen}^2\,x + 6\,\text{sen}\,x + 12})$ **Rpta.** $\frac{1}{12}$

(28) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+2x)\cos(\frac{3\pi}{2}+3x)}{\text{sen}(3\frac{\pi}{2}+3x)}$ **Rpta.** $\frac{2}{3}$

(29) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(a+2x) - 2\,\text{sen}(a+x) + \text{sen}\,a}{x^2}$ **Rpta.** -sen a

(30) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$ **Rpta.** -cos a

(31) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(a+2x) - 2\,\text{tg}(a+x) + \text{tg}\,a}{x^2}$ **Rpta.** $\frac{2\,\text{sen}\,a}{\cos^3 a}$

(32) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\text{tg}^3\,x - \text{sen}^3\,x}$ **Rpta.** ∞

(33) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$ **Rpta.** 1

(34) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,ax - \text{tg}^3\,ax}{\text{tg}\,x}$ **Rpta.** a

(35) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\operatorname{sen} x)^3}{(1+\cos 2x)^3}$ **Rpta.** $\frac{1}{64}$

(36) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(1-x)}{\sqrt{x}-1}$ **Rpta.** -2

(37) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4 - x^4 \operatorname{sen}^2 x}}{1-\cos x}$ **Rpta.** 2

(38) $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{\cos x}-\cos x}{x^2}$ **Rpta.** $\frac{3}{4}$

(39) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{3})}$ **Rpta.** $\sqrt{3}$

(40) $\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{(\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x)^2}$ **Rpta.** 4

(41) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{(1-\cos ax+x)\sec ax}$ **Rpta.** a

(42) $\lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen}(x^2-10x+25)}{x^3+5x^2-125x+375}$ **Rpta.** $\frac{1}{20}$

(43) $\lim_{x\to 0} (\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x})$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(44) $\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2x)}{1-\cos(\operatorname{sen} 4x)}$ **Rpta.** $\frac{1}{4}$

(45) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$ **Rpta.** $\sqrt{2}$

(46) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{x\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(47) $\lim_{x\to\pi} \frac{1-\operatorname{sen} x/2}{\cos x/2(\cos\frac{x}{4}-\operatorname{sen}\frac{x}{4})}$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(48) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$ **Rpta.** -2sena

(49) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{tg} x}$ **Rpta.** 1

(50) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

(51) $\lim_{x\to 0} \frac{4\cos x-\cos 2x-3}{x\operatorname{sen}^3 x}$ **Rpta.** ∞

(52) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-4\cos^2 x}{8\operatorname{sen}(x-\pi/3)}$ **Rpta.** 0

(53) $\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{sen}(\frac{1}{x-1})$ **Rpta.** 0

(54) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-\cos(x-1)-1}{x^2-1}$ **Rpta.** 3

(55) $\lim_{x\to 0} \frac{5\operatorname{sen} x-3\cos x+3}{2\operatorname{tg} x+1-\cos x}$ **Rpta.** $\frac{5}{2}$

(56) $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 a}{x-a}$ **Rpta.** sen 2a

(57) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos(\operatorname{sen} 2x)}{x^2}$ **Rpta.** $\frac{3}{2}$

(58) $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}}$ **Rpta.** $\sqrt[3]{\frac{n^2-m^2}{2}}$

(59) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$ **Rpta.** 14

(60) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(2x+a)-2\,\text{sen}(x+a)+\text{sen}\,a}{x^2}$ **Rpta.** sen a

(61) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-x}{\text{sen}(x-1)}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\text{sen}(x-1)}\right)$

(62) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\text{sen}\,x}{\cos x}$

(63) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-4\cos^2 x}{8\,\text{sen}(x-\frac{\pi}{3})}$

(64) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x)}{x\,\text{tg}\,x}$

(65) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}(x+\frac{\pi}{4})-1}{\text{sen}\,x}$

(66) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-c\,\text{tg}\,x-1+\cos ec x}{x}$

(67) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\text{sen}^2 x}$

(68) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2-2\cos x)^2}{x^4}$

3.21 FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA.-

a) FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASÉ "A" POSITIVA

Sea $a\in R^+$ y a $\neq 1$, a la función exponencial de base "a" definiremos en la forma siguiente:

$$\exp_a = \{(x,y)\in RxR\,/\,y=a^x\}$$

donde su dominio es <-∞ , +∞> y su rango es <0,∞>

Si a > 1, la función $y=a^x$ es creciente gráfica (a)

Si 0 < a < 1, la función $y=a^x$ es decreciente gráfica (b)

Si a = e entonces $y=e^x$ su gráfica es (c)

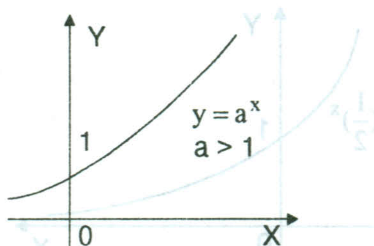


Fig (a)

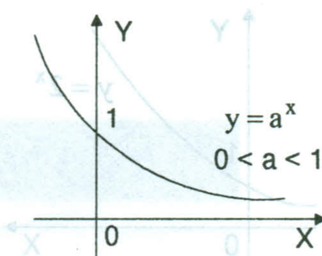


Fig (b)

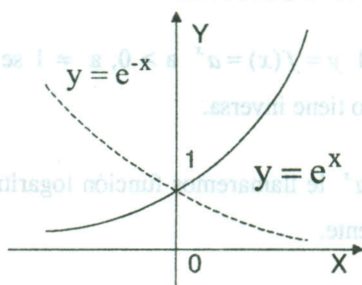


Fig (c)

① $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

② $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

③ $\lim\limits_{x\to 0} e^{x} = 1$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

b) PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.-

Sí a, b > 0, entonces:

① $a^{0} = 1$ ② $a^{x}.a^{y} = a^{x+y}$ ③ $(a^{x})^{y} = a^{xy}$

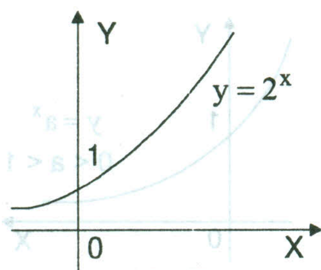
④ $\dfrac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$ ⑤ $(ab)^{x} = a^{x}b^{x}$ ⑥ $(\dfrac{a}{b})^{x} = \dfrac{a^{x}}{b^{x}}$

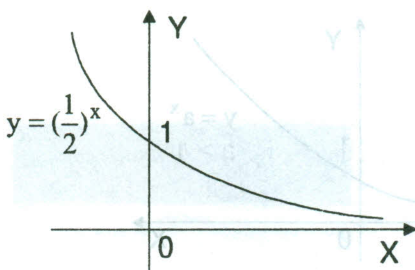
Ejemplos.- Trazar la gráfica de las siguientes funciones.

① $y = 2^{x}$ ② $y = (\dfrac{1}{2})^{x}$

Solución

Como a = 2 > 1 ⇒ $y = 2^{x}$ es creciente Como $a = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow y = (\dfrac{1}{2})^{x}$ es decreciente





c) FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE "A" POSITIVA.-

De la definición de la función exponencial $y = f(x) = a^x$ a > 0, a ≠ 1 se deduce que dicha función es inyectiva y por lo tanto tiene inversa.

Luego a la función inversa de $y = f(x) = a^x$ le llamaremos función logarítmica de base "a" y la definiremos en la forma siguiente.

Definición.- A la función f: <0, + ∞> → R definida por:

$$f = \{(x, y) \in RxR / y = \log_a x, x \in <0, \infty>, y \in R\}$$

Le llamaremos función logarítmica (ó función logaritmo) de base a donde a>0, a≠1

Se sabe que $\log_a x$ es un número único b, tal que $x = a^b$ es decir:

$$a > 0,\ a \neq 1;\ \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

NOTA: $\log_a x = b$ se lee "el logaritmo en base "a" del número x es b"

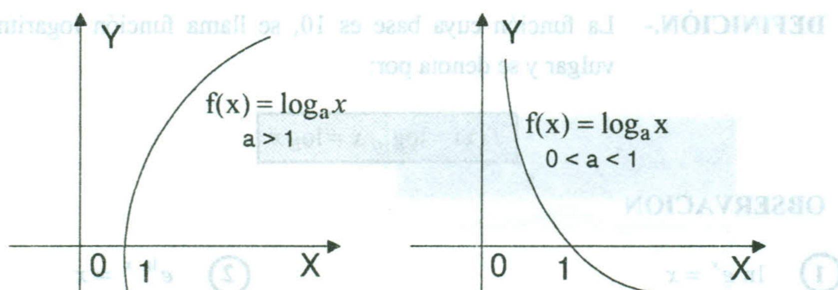
OBSERVACION

La función logarítmica de base "a" tiene por regla de correspondencia la ecuación:

$$f(x) = \log_a x$$, donde

i) Si a > 1, la función $f(x) = \log_a x$ es creciente

ii) Si 0 < a < 1, la función $f(x) = \log_a x$ es decreciente



d) PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Si a, b > 0; entonces:

① $\log_a 1 = 0$ ② $\log_a a = 1$

③ $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ ④ $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

⑤ $\log_a A^n = n \log_a A$ ⑥ $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$

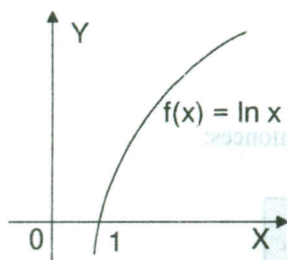
⑦ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ⑧ $\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$

OBSERVACION.- Si $x = e^y \Leftrightarrow y = \log_e x = \ln x$

DEFINICIÓN.- La función logaritmo cuya base es e, se llama función logaritmo natural ó neperiano y denotaremos por:

$$f(x) = \log_e x = Ln\ x$$

donde $D_f < 0,+\infty >$ y $R_f = R$



① $\lim\limits_{x \to +\infty} Ln\ x = +\infty$

② $\lim\limits_{x \to 0} Ln\ x = -\infty$

DEFINICIÓN.- La función cuya base es 10, se llama función logaritmo decimal ó vulgar y se denota por:

$$f(x) = \log_{10} x = \log x$$

OBSERVACION

① $\ln e^x = x$ ② $e^{\ln x} = x$

3.22 EL NÚMERO e.-

La expresión $(1+\frac{1}{n})^n$ tiene limite comprendido en 2 y 3 cuando n ⟶∞, es:

$$2 < \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n < 3$$

a) Definición.- Al número e definiremos como el límite de la expresión $(1+\frac{1}{n})^n$ cuando n→∞, es decir:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

donde: e ≅ 2.718281828459045….

OBSERVACION

① La función $(1+\frac{1}{x})^x$ tiende al número e, cuando x →∞, es decir:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

② Sea $z=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{z}$ cuando x → ∞; z → 0, entonces:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = e$$

3.23 CALCULO DE LIMITES DE LA FORMA.-

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$$

Para el cálculo de los límites de la forma $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ se consideran los siguientes casos:

1er. Sí existen los límites $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$ y son finitos, entonces:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = (\lim_{x\to a} f(x))^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = A^B$$

2do. Sí $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ es inmediato.

3er. Si $\lim_{x\to a} f(x) = A = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ (1^∞ indeterminado)

En estos casos, estos límites se calculan de la siguiente forma.

A la función f(x) expresamos así: f(x) = 1 + ϕ (x) donde $\lim_{x\to a}\phi(x) = 0$

Luego se hace la sustitución y se aplica la definición del número e.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a}[(1+\phi(x))^{\frac{1}{\phi(x)}}]^{\phi(x)g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\phi(x)g(x)}$$

OBSERVACION.- En el cálculo de los límites de funciones logarítmicas se aplica la propiedad siguiente:

$$\lim_{x\to a} Ln(f(x)) = Ln[\lim_{x\to a} f(x)]$$

3.24 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

Calcular los siguientes límites.

① $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{x-4}{x+1}]^{x-2}$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{x-4}{x+1}]^{x-2} = \lim_{x\to\infty}[1+\frac{-5}{x+1}]^{x-2} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{-5}{x+1})^{-\frac{x+1}{5}}]^{-\frac{5}{x+1}(x-2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5(x-2)}{x+1}} = e^{-5}$$

② $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{x^2+3}{x^2+4x}]^{\frac{x^2-1}{x}}$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2+4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Ahora hacemos la transformación indicada en el criterio establecido.

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2+3}{x^2+4x}]^{\frac{x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}[1+\frac{3-4x}{x^2+4x}]^{\frac{x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{3-4x}{x^2+4x})^{\frac{x^2+4x}{3-4x}}]^{(\frac{x^2-1}{x})(\frac{3-4x}{x^2+4x})}$$

$$=\exp\{\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)(3-4x)}{x(x^2+4x)}\}=e^{-4}$$

③ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}+1-\sqrt{x+1})^{\sqrt{x}}$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}+1-\sqrt{x+1})^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}[1+(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})]^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}[1+\frac{-1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}]^{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}[(1+\frac{-1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}})^{-(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}]^{-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}} = e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}} = e^{-1/2}$$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}Ln(\frac{1+x}{1-x})^{1/x}=\frac{1}{2}Ln[\lim_{x\to 0}(\frac{(1+x)^{1/x}}{[(1+(-x))^{-1/x}]^{(-1)}})]$$

$$=\frac{1}{2}Ln(\frac{e}{e^{-1}})=\frac{1}{2}Ln\,e^2=Ln\,e=1 \quad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=1$$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x})^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$

Solución

Como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}=\frac{\operatorname{sen} a+0}{\operatorname{sen} a-0}=1$

Entonces transformamos la función mediante el criterio establecido.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x})^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}=\lim_{x\to 0}(1+\frac{2\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x})^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}[(1+\frac{2\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x})^{\frac{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}{2\operatorname{sen} 3x}}]^{\frac{2}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}}=e^{\frac{2}{\operatorname{sen} a}}$$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\operatorname{sen} bx)^{1/x}$

Solución

Como $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\operatorname{sen} bx)=1+0=1$ entonces transformamos la función mediante el criterio establecido

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+a\operatorname{sen} bx)^{1/x}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos x+a\operatorname{sen} bx-1))^{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0}[(1+(\cos x+a\operatorname{sen} bx-1))^{\frac{1}{\cos x+a\operatorname{sen} bx-1}}]^{\frac{\cos x+a\operatorname{sen} x-1}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x + a\,\text{sen}\,bx - 1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(a\,b\frac{\text{sen}\,bx}{bx} - \frac{1-\cos x}{x})} = e^{ab-0} = e^{ab}$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$

Solución

Sea $\alpha = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + \alpha$ tomando logaritmo

$$\Rightarrow Lne^x = Ln(1+\alpha) \Rightarrow x\,Lne = Ln(1+\alpha) \Rightarrow x = \text{Ln}(1+\alpha)$$

Cuando $x \to 0$; $\alpha \to 0$ entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{Ln(1+\alpha)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{Ln(1+\alpha)^{1/\alpha}} = \frac{1}{Lne} = \frac{1}{1} = 1$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x - 1}{x}$

Solución

Sea $\alpha = 7^x - 1 \Rightarrow 7^x = 1 + \alpha \Rightarrow Ln7^x = Ln(1+\alpha) \quad \Rightarrow x = \frac{1}{Ln7}Ln(1+\alpha)$

Cuando $x \to 0$; $\alpha \to 0$ entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x - 1}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\frac{1}{Ln7}Ln(1+\alpha)} = Ln7.\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{Ln(1+\alpha)^{1/\alpha}} = Ln7.\frac{1}{Lne} = Ln7$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x - 5^x}{x}$

Solución

En este límite se debe de aplicar el criterio del ejemplo (8) es decir la forma del límite del ejemplo anterior.

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x - 5^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(7^x - 1) - (5^x - 1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{7^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{5^x - 1}{x} = Ln7 - Ln5 = Ln\frac{7}{5}$$

(10) $\lim_{x\to 0}\frac{9^x-7^x}{8^x-6^x}$

Solución

Ahora debemos de expresar en la forma del ejemplo anterior, dividiendo entre x

$$\lim_{x\to 0}\frac{9^x-7^x}{8^x-6^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9^x-7^x}{x}}{\frac{8^x-6^x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9^x-1}{x}-\frac{7^x-1}{x}}{\frac{8^x-1}{x}-\frac{6^x-1}{x}}=\frac{\ln 9-\ln 7}{\ln 8-\ln 6}=\frac{\ln\frac{9}{7}}{\ln\frac{4}{3}}$$

(11) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x-\text{sen }x}{Ln(1+x)}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x-\text{sen }x}{Ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen }3x-\text{sen }x}{x}}{\frac{1}{x}Ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\text{sen }3x}{3x}-\frac{\text{sen }x}{x}}{Ln(1+x)^{1/x}}=\frac{3(1)-1}{Lne}=\frac{3-1}{1}=2$$

(12) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha x}-1}{x}-\frac{e^{\beta x}-1}{x}\right)=Ln\,e^{\alpha}-Ln\,e^{\beta}=\alpha\,Ln\,e-\beta\,Ln\,e=\alpha-\beta$$

3.25 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Hallar los siguientes límites:

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{x^2+2}$ **Rpta.** e^2

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$ **Rpta.** e^2

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ **Rpta.** $e^{-2/3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$ **Rpta.** e

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(a+x)-Lna}{x}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{a}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+a)-\ln x)$ **Rpta.** a

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$ **Rpta.** $\dfrac{3}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ **Rpta.** 1

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ **Rpta.** e^3

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$ **Rpta.** e^{-2}

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$ **Rpta.** e^{2a}

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{\frac{1-x^3}{x}}$ **Rpta.** e^{-2}

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{sen} 3x)^{\frac{1}{2x}}$ **Rpta.** $e^{-\frac{3}{2}}$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{m}{x}}$ **Rpta.** e^{2n}

(15) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$ **Rpta.** e^2

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$ **Rpta.** $e^{-(a+b)}$

(17) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[\sqrt{3}]{1+\operatorname{sen}\sqrt{3}x})^{\frac{1}{\operatorname{sen}\sqrt{3}x}}$ **Rpta.** $e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

(18) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4}{\sqrt{16x\operatorname{sen}\dfrac{1}{4x}}}\right)^{x\operatorname{sen}\frac{1}{3x}}$ **Rpta.** $\sqrt[3]{2}$

(19) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{x}$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$ **Rpta.** e^{2}

(21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$ **Rpta.** e^{2}

(22) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}})^{\frac{1}{x^2}}$ **Rpta.** 1

(23) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ **Rpta.** $e^{-\frac{1}{2}}$

(24) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\sqrt{\dfrac{5a}{x}}\right)^{bx}$ **Rpta.** $e^{-\frac{15ab}{2}}$

(25) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(e^{x}+x)^{\operatorname{tg}x}}{(1+\operatorname{sen}x)^{x}}\right]^{\frac{c\operatorname{tg}x}{x}}$ **Rpta.** e

(26) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{tg}x}$ **Rpta.** 1

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ **Rpta.** $e^{\frac{3}{2}}$

(28) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^{2})^{c\operatorname{tg}^{2}x}$ **Rpta.** e

(29) $\lim_{x\to 0}(1+\text{tg}\,\sqrt[2]{x})^{\frac{1}{2x}}$ **Rpta.** $\sqrt{e}$

(30) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\text{sen}\,x}}$ **Rpta.** 1

(31) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}$

(32) $\lim_{x\to 0}(\frac{\text{sen}\,x}{x})^{\frac{\text{sen}\,x}{x-\text{sen}\,x}}$ **Rpta.** $\frac{1}{e}$

(33) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ **Rpta.** $(\frac{a}{b})^2$

(34) $\lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ **Rpta.** 0

(35) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$ **Rpta.** 1

(36) $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{1+\sqrt{3}\ln x}}$ **Rpta.** $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(37) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\text{sen}\,\alpha x-\text{sen}\,\beta x}$ **Rpta.** 1

(38) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,2x}{\ln(1+x)}$ **Rpta.** 2

(39) $\lim_{x\to\infty}(\text{sen}\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$ **Rpta.** e

(40) $\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}, a>0$ **Rpta.** $a^x Ln^2 a$

(41) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{Lnx - Lna}$ **Rpta.** a

(42) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{b^{bx}-1}$ **Rpta.** $\frac{a}{b}$

(43) $\lim\limits_{x\to b} \frac{a^x - a^b}{x-b}$, $a>0$ **Rpta.** $a^b Lna$

(44) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{ax} \ln\sqrt[3]{\frac{1+ax}{1-ax}}$ **Rpta.** $\frac{2}{3}$

(45) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 - x}$ **Rpta.** $-Ln\frac{5}{4}$

(46) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{x\ln x}$ **Rpta.** 1

(47) $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-2}}$ **Rpta.** $\sqrt{e}$

(48) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}$

(49) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$ **Rpta.** $\frac{9}{4}$

(50) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1+\text{tg}\, x}{1+\text{sen}\, x})^{\frac{1}{\text{sen}\, x}}$ **Rpta.** 1

(51) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2})^x$ **Rpta.** $\sqrt{ab}$

(52) $\lim\limits_{x\to\infty} (\cos\frac{a}{x} + n.\text{sen}\frac{a}{x})^x$ **Rpta.** $e^{a.n}$

(53) $\lim\limits_{x\to\infty} [3 - 2(\frac{ax+1}{ax})]^{\text{tg}(\frac{\pi}{2}(\frac{ax+1}{ax}))}$ **Rpta.** $e^{4/\pi}$

(54) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{Ln(x+\sqrt{1-x^2})}$ **Rpta.** n

(55) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x.\cos\alpha x}{1+\operatorname{sen} x.\cos\beta x}\right)^{c\operatorname{tg}^3 x}$ **Rpta.** $\dfrac{e^{\beta^2}-\alpha^2}{2}$

(56) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{x\pi}{2a}}\right]$ **Rpta.** $\dfrac{2\sqrt{a}}{3a^{\frac{2}{3}}}+e^{\frac{2}{\pi}}$

(57) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

(58) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$

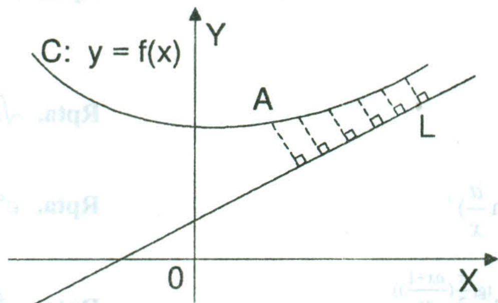
(59) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2}$

(60) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+c\operatorname{tg} x)^{\sec x}$

3.26 ASINTOTAS DE UNA CURVA.-

a) **DEFINICIÓN.-** Consideremos una recta L y un punto A que se desplaza a lo largo de la curva C: y = f(x), cuando la distancia entre la recta L y el punto A de la curva tiende a cero, cuando el punto A tiende al infinito, entonces a la recta L se denomina asíntota de la curva, es decir:

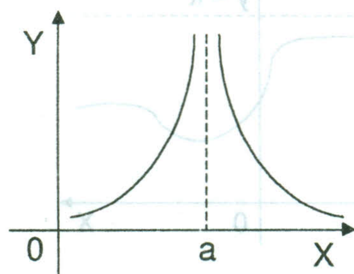
$$\lim_{A\to\infty} d(L,A)=0$$



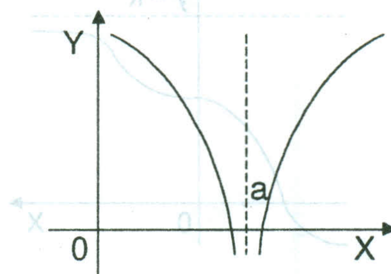
b) DEFINICIÓN.- La recta x = a es una asíntota vertical de la curva C: y = f(x) si se cumple una de las relaciones siguientes:

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ **ii)** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ **iii)** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

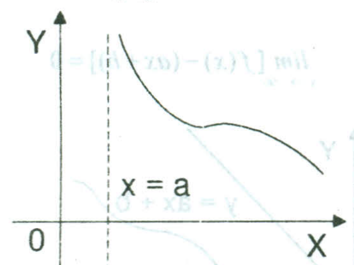
Ilustración Gráfica



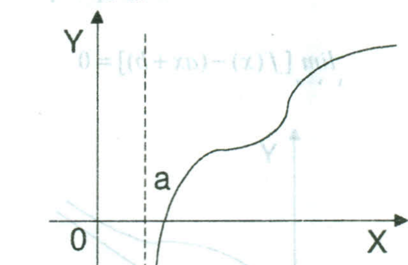
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$



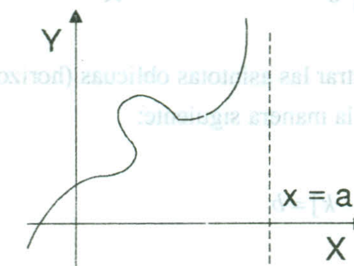
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$



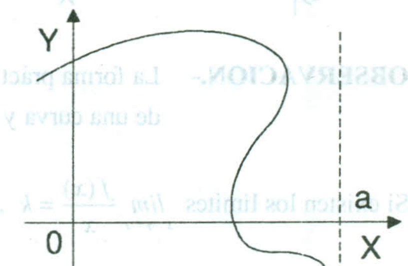
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



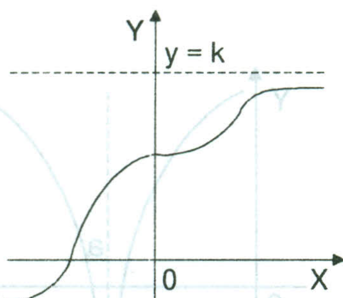
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

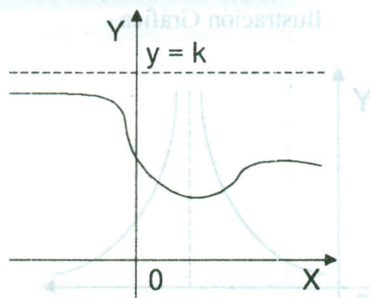


$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

c) DEFINICIÓN.- La recta y = k es una asíntota horizontal de la curva y = f(x) si se cumple una de las siguientes relaciones:

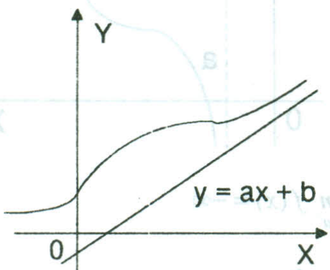
i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$ **iii)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

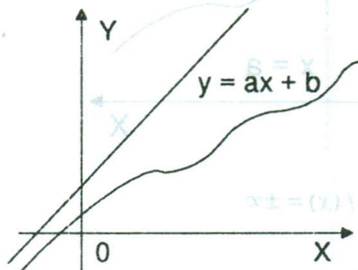




d) Definición.- La recta y = a x + b es una asíntota oblicua de la curva C: y = f(x) si se cumple que:

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$





OBSERVACION.- La forma práctica de encontrar las asíntotas oblicuas (horizontales) de una curva y = f(x) es de la manera siguiente:

Si existen los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-k] = b$

La recta y = k x + b es una asíntota oblicua (a la derecha cuando x $\to+\infty$ y a la izquierda cuando x$\to-\infty$) y es una asíntota horizontal cuando k=0.

Ejemplo.- Hallar las asíntotas de la función:

(1) $y(x-3)=x^2+9$

Solución

$y(x-3)=x^2+9 \Rightarrow y=\dfrac{x^2+9}{x-3}$, como el denominador se anula para x = 3 entonces:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x-3}=\pm\infty$ entonces x=3 es una asíntota vertical

Ahora calculamos las asíntotas horizontales si existe y = k donde $k=\lim\dfrac{x^2+9}{x-3}=+\infty$

Por lo tanto no existen asíntotas horizontales.

Calculando las asíntotas oblicuas: y =mx + b donde:

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty^2}\dfrac{x^2+b}{x-3x}=1\Rightarrow$ m = 1

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{x^2+b}{x-3})=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+9}{x-3}=3\Rightarrow$b = 3

Luego la asíntota oblicua es la recta: y = x + 3

(2) $y=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}$

Solución

Observamos que el denominador se anula para x = ± 2 y además $\lim\limits_{x\to\pm 2}\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}=+\infty$

entonces se tiene que x = ± 2 Son las asíntotas verticales.

Ahora veremos las asíntotas horizontales: y = k donde $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2-4}}=\pm\infty$

Por lo tanto no tiene asíntotas horizontales.

Calculando las asíntotas oblicuas y = mx + b, donde:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{x\sqrt{x^2-4}} = \pm 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y-mx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{x^2+3}{\sqrt{x-4^2}} \pm x) = 0 \Rightarrow b = 0$$

Luego las asíntotas oblicuas son y = x , y = -x

(3) $y = \frac{x^2+1}{x-1} + \sqrt[3]{x}$

Solución

Se observa que el denominador se anula para x = 1 y además $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-1} + \sqrt[3]{x} = \infty$, entonces la asíntota vertical es x = 1

Calculando la asíntota horizontal y = k, donde: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} + \sqrt[3]{x} = \infty$

Por lo tanto no tiene asíntota horizontal.

Calculando las asíntotas oblicuas y = mx + b donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 1$$

$b = \lim_{x\to\infty} (y-mx) = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^2+1}{x-1} + \sqrt[3]{x} - x) = \infty$, Luego, no existe asíntota oblicua.

(4) $y = \frac{a^2(a-x)}{a^2+x^2}$

Solución

Cálculo de las asíntotas verticales, como el denominador no se anula para ningún valor real de x entonces no tiene asíntota vertical.

Cálculo de la asíntota horizontal: y = k donde: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{a^2(a-x)}{a^2+x^2} = 0$

Por lo tanto la asíntota horizontal es y = 0.

Cálculo de las asíntotas oblicuas: y = mx + b donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^2(a-x)}{a^2x+x^3} = 0$$

$b = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{a^2(a-x)}{a^2+x^2} - 0 = 0$, Luego y = 0 es la asíntota horizontal.

(5) $y = \frac{2x^2-5x-3}{x-1}$

Solución

Como el denominador se anula para x = 1 y además: $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-5x-3}{x-1} = \infty$, entonces la asíntota vertical es calculando la asíntota horizontal: y = k, donde:

$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x-3}{x-1} = \infty$. Por lo tanto no se tiene asíntota horizontal.

Calculando las asíntotas oblicuas: y = mx + b donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x-3}{x^2-x} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-5x-3}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-5x-3-2x^2+2x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x-3}{x-1} = -3$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es: y = 2x – 3

(6) $y^2(x-2a) = x^3 - a^3$

Solución

$$y^2(x-2a)=x^3-a^3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{x^3-a^3}{x-2a}}$$

Se observa que el denominador se anula para x = 2a

Además $\lim_{x\to 2a} \pm\sqrt{\frac{x^3-a^3}{x-2a}}=\pm\infty$, por lo tanto x = 2a es la asíntota vertical.

Calculando la asíntota horizontal: y = k donde:

$$k=\lim_{x\to\infty} \pm\sqrt{\frac{x^3-a^3}{x-2a}}=\pm\infty$$, por lo tanto no se tiene asíntota horizontal.

Calculando las asíntotas oblicuas y = mx + b, donde:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\pm\frac{\sqrt{x^3-a^3}}{x\sqrt{x-2a}}=\pm 1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\pm\left(\sqrt{\frac{x^3-a^3}{x-2a}}\pm x\right)=\pm a$$

por lo tanto y = ± (x + a) son las asíntotas oblicuas

3.27 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

① $y(x-3)^2=x^2+9$ **Rpta.** x = 3 , y = 1

② $x^2(x+y)=a^2(x-y)$ **Rpta.** y = -x

③ $xy^2-3y^2-4x=8$ **Rpta.** x = 3, y = -2 , y = 2

④ $y=\sqrt{x^2+x}-x$ **Rpta.** $y=\frac{1}{2}$

⑤ $xy^2+yx^2=a^3$ **Rpta.** x = 0, y = 0, y = -x

⑥ $y = x\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$ **Rpta.** x = a

⑦ $x^2(x-y)^2 - a^2(x^2+y^2) = 0$ **Rpta.** $x = \pm a, y = x \pm a\sqrt{2}$

⑧ $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ **Rpta.** x = 1, x = -1, y = ± x

⑨ $y = |x+4| + \dfrac{4}{|x|-3}$ **Rpta.** x = ±3, y = x+4, y = -x-4

⑩ $y = \dfrac{x^2}{x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x + 32}$ **Rpta.** x = ±2, x = -4, y = 0

⑪ $y = \dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$ **Rpta.** y = -x, y = x

⑫ $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ **Rpta.** x = 0, y = x + 2

⑬ $y = 3 - 2x - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-x-2}}$ **Rpta.** x = 1, x = 2, $y = -3x + \dfrac{5}{2}$, $y = -x - \dfrac{7}{2}$

⑭ $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

⑮ $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-7x+10}$

⑯ $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x}$

⑰ $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-8}{x+3}$

⑱ $f(x) = \sqrt{\dfrac{16x^2+4x-6}{9x^2-6x-8}}$

⑲ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2+2x-24}}$

⑳ $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x^2-6x-8}{16x^2+4x-6}}$

㉑ $f(x) = \sqrt{\dfrac{20+x-x^2}{x^2+4x-12}}$

(22) $f(x)=\sqrt{\dfrac{21+4x-x^2}{x^2+7x-8}}$

(23) $f(x)=\sqrt{x^4-x^3-9x^2+9x}$

(24) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2-9x+27}$

(25) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-5x^2-25x+125}$

(26) $f(x)=\dfrac{3x^3+3x+1}{x+x-6}+\sqrt{x^2+4}$

(27) $f(x)=\dfrac{x^2-x^3+1}{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}$

(28) $f(x)=\dfrac{-6x^5+4x^4+5}{x^3-6x^2-4x+24}+\sqrt{36x^2+5}$

3.28 CONTINUIDAD DE UNA FUNCION.-

a) CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.-

Consideremos una función real de variable real f: R→R, diremos que la función f es continua en el punto $x = x_0$, si y solo si, se cumple las tres condiciones siguientes:

i) Exista $f(x_0)$, es decir $x_0 \in D_f$

ii) Exista $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

OBSERVACION.- Cuando una de las tres condiciones ó más no se cumple, se dice que la función f es discontinua en el punto $x = x_0$.

b) PROPIEDADES SOBRE CONTINUIDAD.-

(1) Consideremos dos funciones f y g continua en $x = x_0$, entonces:

a) f ± g es continua en el punto $x = x_0$

b) k f es continua en el punto $x = x_0$, k ∈ R

c) f.g es continua en el punto $x = x_0$

(2) La función polinomial definida por:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, donde n es entero positivo y $a_i \in R$, i = 0,1,...,n es continua.

(3) La función racional $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ es continua en todos los puntos $x = x_0$ donde $h(x_0) \neq 0$

(4) Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ y si f es continua en b entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \to x_0} g(x))$$

(5) Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces la función compuesta f o g es continua en $x = x_0$.

3.29 TIPOS DE DISCONTINUIDAD.-

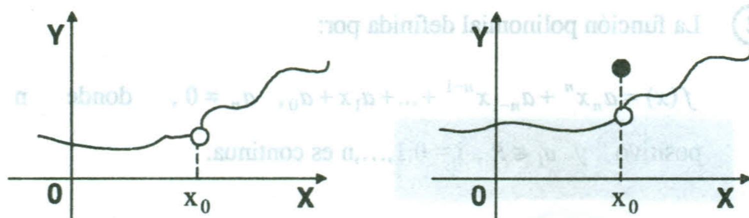
a) DISCONTINUIDAD EVITABLE O REMOVIBLE.-

Diremos que la función real de variable real f: R→R tiene una discontinuidad evitable ó removible en un punto $x = x_0$ sí:

i) Existe el número $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

ii) $x_0 \notin D_f$ o bien $x_0 \in D_f$ se tiene que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, en este caso definimos la función

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \ si\ x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & si\ x = x_0 \end{cases}$$



b) DISCONTINUIDAD NO EVITABLE O IRREMOVIBLE.-

1ro. Discontinuidad de primera especie.- Diremos que la función f(x) tiene una discontinuidad de primera especie si existe los límites laterales $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, finitos y diferentes.

2do. Discontinuidad de Segunda Especie.- Diremos que la función f(x) tiene una discontinuidad de segunda especie en el punto x_0, si no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, o si uno de los límites laterales es $\pm\infty$.

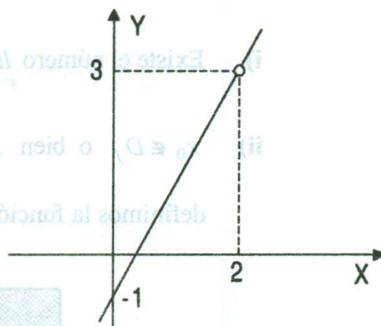
EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Determinar los valores de x para los cuales la función f es discontinua y construir la gráfica.

① $f(x)=\begin{cases} 2x-1 \ , & x\neq 2 \\ 3 \ , & x=2 \end{cases}$

Solución

Analizaremos la discontinuidad en el punto x = 2



i) f(2) = 3 existe

ii) $\exists \lim_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 2x-1=4-1=3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 2x-1=4-1=3$

como $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=3 \Rightarrow \exists \lim_{x\to 2} f(x)=3$

iii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$, por lo tanto la función f(x) es continua en todo x.

(2) $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x^2 - 9}$

Solución

Primeramente simplificamos: $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x^2 - 9} = \dfrac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = x^2 + 9$, x≠-3,3

La función f(x) tienen puntos de discontinuidad evitable en los puntos x = -3, x = 3

Ahora definiremos a la función de tal manera que sea continua en todo x.

$\lim\limits_{x \to 3} x^2 + 9 = \lim\limits_{x \to -3} x^2 + 9 = 18$

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 9 & para \quad x \neq -3{,}3 \\ 18 & para \quad x = -3{,}3 \end{cases}$. Por lo tanto F(x) es continua ∀ x.

(3) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 5x + 4}$

Solución

Primeramente simplificamos:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(x-4)(x-1)(x+3)}{(x-4)(x-1)} = x + 3, x \neq 1{,}4$$

Luego la función f(x) tiene puntos de discontinuidad evitable en los puntos x = 1, x = 4.
Ahora definiremos la función de tal manera que se continua en todo x.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x + 3 = 1 + 3 = 4$ y $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} x + 3 = 4 + 3 = 7$

$F(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{para} \quad x \neq 1{,}4 \\ 4 & \text{para} \quad x = 1 \\ 7 & \text{para} \quad x = 4 \end{cases}$. Por lo tanto F(x) es continua ∀x.

④ $$f(x)=\begin{cases}2x+3 & si \quad x\le 1\\ 8-3x & si \quad 1<x<3\\ x+3 & si \quad x\ge 3\end{cases}$$

Solución

Los posibles puntos de discontinuidad son 1,3 analizando la discontinuidad en x= 1 y x=3

i) f(1) = 5, f(3) = 6 existen

ii) $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x), \exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x+3=2+3=5\\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 8-3x=8-3=5\end{array}\right\}\Rightarrow \ \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 8-3x=8-9=-1\\ \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} x+3=3+3=6\end{array}\right\}\text{Como } \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$$

Por lo tanto la función tiene una discontinuidad de primera especie en x=3.

⑤ $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-27\,sig(x-1)}{x^3+3x^2+3x-9[|\frac{x}{9}|]}, si \ -5<x<0 \ \wedge \ x\ne -3\\ \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3} \quad si \ \ 0\le x<5 \ \wedge \ x\ne 3\\ \dfrac{9}{4} \quad si \ \ x=-3\\ \dfrac{3}{2} \quad si \ \ x=3\end{cases}$$

Solución

Los puntos donde posiblemente sean discontinuos son: **x = -3, x = 0, x = 3**

Ahora los puntos x = -3, x = 0, x = 3

Para $-5 < x < 0,\ [|\frac{x}{9}|] = -1$

$$sig(x-1) = \begin{cases} 1 & , x > 1 \\ 0 & , x = 1 \\ -1 & , x < -1 \end{cases}$$; entonces la función f(x) queda simplificado en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+27}{x^3+3x^2+3x+9} & si\ -5 < x < 0 \wedge x \neq -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3} & si\ 0 \leq x < 5 \wedge x \neq 3 \\ \dfrac{9}{4} & si\ x = -3 \\ \dfrac{3}{2} & si\ x = 3 \end{cases}$$

para x = -3 entonces f(-3) = 9/4 está definida.

$\exists \lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3+27}{x^3+3x^2+3x+9} = \dfrac{9}{4}$, Luego f(x) es continua en x = -3

Para x = 0 entonces f(0) = 3 está definida

$\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$, Luego f(x) es continua en x = 0

Para x = 3 entonces f(3) = 3/2 está definida

$\exists \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \dfrac{3}{2}$, Luego f(x) es continua en x = 3

⑥ $$f(x) = \begin{cases} (\sqrt{2-\sqrt{\cos x}})^{1/x^2} & si\ x \neq 0 \\ 1/8 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Solución

El punto donde la función puede ser discontinua es x = 0 es decir:

i) $f(0)=\frac{1}{8}$, la función está definida

ii) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}})^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(2-\sqrt{\cos x})^{1/2x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}([1+(1-\sqrt{\cos x}]^{\frac{1}{1-\sqrt{\cos x}}})^{\frac{1-\sqrt{\cos x}}{2x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{2x^2}}=e^{1/8}$$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$, por lo tanto la función f(x) es discontinua en x = 0.

7 $f(x)=\begin{cases} x\ \text{sen}\frac{1}{x} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

Solución

Analizaremos la continuidad en x = 0

i) f(0) = 0 la función está definida en x = 0

ii) $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{sen}\ 1/x=0$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

Por lo tanto f(x) es continua en todo x.

NOTA: $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{sen}\,1/x=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\text{sen}\,z}{z}=0$ puesto que: $-1\leq \text{sen}\ z\leq 1$

$-1/z\leq\frac{\text{sen}\,z}{z}\leq 1/z$ tomando límite $\lim\limits_{x\to 0} -1/z\leq\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\text{sen}\,z}{z}\leq\lim\limits_{z\to\infty}1/z$

$0\leq\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\text{sen}\,z}{z}\leq 0$ $\therefore\ \lim\limits_{z\to\infty}\frac{\text{sen}\,z}{z}=0$

⑧ $$H(x) = \text{sen}(\frac{3x^3 - 2}{x^2 + 4})$$

Solución

Sea f(x) = senx, $g(x) = \frac{3x^3 - 2}{x^2 + 4}$, de donde g(x) es continua ∀ x ∈ R, y f es continua en todo g(x), para x ∈ R, luego:

$H(x) = f(g(x)) = \text{sen}(\frac{3x^3 - 2}{x^2 + 4})$ es la función compuesta y es continua ∀x∈R.

3.30 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I Determinar los valores de x para los cuales la función es discontinua y construir la gráfica:

① $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \; x \neq 1 \end{cases}$$ **Rpta.** Cont. en todo x ≠ 1

② $$f(x) = \begin{cases} 1 + x \;\; , \; x \leq -2 \\ 2 - x \;\; , \; -2 < x \leq 2 \\ 2x - 1 \; , \; x > 2 \end{cases}$$ **Rpta.** Discont. En x = -2, x = 2.

③ $$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}}{x}, x \neq 0 \\ 0 \; , \; x = 0 \end{cases}$$ **Rpta.** Discont, en x = 0

④ $$f(x) = \begin{cases} \frac{-|x| + x}{2}, x < 0 \\ 2 \; , \; x = 0 \end{cases}$$ **Rpta.** Discont. En x = 0

⑤ $$f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 6x + 1}{x^2 - x}$$ **Rpta.** Discont. En x=0, x=1

⑥ $$f(x) = \frac{2x - |x|}{3x + |x|}$$ **Rpta.** Discont. x=0

⑦ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}, & x\neq 1\\ 4, & x=1\end{cases}$ **Rpta.** Discont. en x=1

⑧ $f(x)=\begin{cases}x^2+2\ , & x\leq 0\\ 2\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\ , & x>0\end{cases}$ **Rpta.** Cont. En todo R

⑨ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-7x+2}{x-2}, & si\ x\neq 0\\ 3, & si\ x=0\end{cases}$ **Rpta.** Discont. En x=0, x=2

⑩ $f(x)=\begin{cases}|x-[|x|]|\ , & si\ [|x|]\ es\ par\\ |x-[|x|]|\ , & si\ [|x|]\ es\ impar\end{cases}$

⑪ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{|x^2-4|} & si\ x\neq\pm 2\\ \dfrac{3}{4} & si\ x=\pm 2\end{cases}$ **Rpta.** Discont. en ± 2

⑫ $f(x)=\begin{cases}x^2-9\ , & x\leq 3\\ x\ , & x>3\end{cases}$ **Rpta.** Discont. en x=3

⑬ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{[|1-x|]+[|x-1|]}{2\sqrt{|x|-[|x|]}}\ , & si\ 0\leq x<2\\ 2x-5\ , & si\ x>2\end{cases}$

Rpta. Es continua en x = 2, discontinua en x = 0, x = 1

⑭ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{|x-1|}, & x>-1, x\neq 1\\ Sig(|x^2-1|-1)\ , & x<-1\end{cases}$ **Rpta.** Es Discont. En $x=-\sqrt{2},-1,1$

(15) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+8}{x+2}, & si\ x\neq -2\\ 5\ , & si\ x=-2, en\ x=-1\end{cases}$ **Rpta.** Discont. en x = -2

(16) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8-x}{\sqrt[3]{x}-2}, x<8\\ 3-2x, x\geq 8\end{cases}$ **Rpta.** Discont. en x = 8

(17) $f(x)=\begin{cases}sig(x^2-\dfrac{1}{4}), & x\leq -1\\ \dfrac{x^3}{x^2-9}, & |x|<1\\ -\dfrac{1}{8}+\sqrt{x^2-2x+1}, & x\geq 1\end{cases}$ **Rpta.** Discont. en x = -1

(18) $f(x)=\begin{cases}sig(x^2-4x)-1, & x\leq -3\\ \dfrac{\sqrt{x^2+7}+\sqrt[3]{3x^2-19}-6}{x-3}, & -3<x\leq 3\\ \dfrac{9}{4}(\dfrac{3-10x}{x^3-27}+\dfrac{1}{x-3}), & 3<x\leq 4\\ \dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt[3]{16-x\sqrt{5x-4}}}, & x>4\end{cases}$ **Rpta.** discont. en x = -3, x = 3

(19) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{sen}\,x-\text{sen}\,a}{x-a}, x\neq a\\ \cos a\ \ , x=a\end{cases}$ **Rpta.** Cont. en x = a

(20) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{m^2-n^2}{2}\ \ , x=0\end{cases}$ **Rpta.** Discont. en x = 0

(21) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}, & x\neq 1\\ \dfrac{\pi^2}{2}, & x=1\end{cases}$ **Rpta.** Cont. ∀ x

II. Determinar el valor de A para que la función f sea continua.

① $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & si\ x\neq 2\\ A & si\ x=2\end{cases}$ **Rpta.** A = 4

② $f(x)=\begin{cases}-Ax^2 & si\ x<4\\ -6x+16 & si\ x\geq 4\end{cases}$ **Rpta.** $A=\dfrac{1}{2}$

③ $f(x)=\begin{cases}Ax^2 & si\ x\leq 2\\ 3 & si\ x>2\end{cases}$ **Rpta.** $A=\dfrac{3}{4}$

III. Determinar A y B de modo que la función f dada sea continua en todo su dominio.

① $f(x)=\begin{cases}x+2A & si\ x<-2\\ 3Ax+B & si\ -2\leq x\leq 1\\ 6x-2B & si\ x>1\end{cases}$ **Rpta.** $A=\dfrac{4}{9}, B=\dfrac{14}{9}$

② $f(x)=\begin{cases}-2\operatorname{sen}x & ,\ x\leq -\dfrac{\pi}{2}\\ A\operatorname{sen}x+B & ,\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x & ,\ x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ **Rpta.** A = -1, B=1

③ $f(x)=\begin{cases}x+2A & ,\ si\ x<-2\\ 3Ax+B & ,\ si\ -2\leq x<1\\ 6x-2B & ,\ si\ x\geq 1\end{cases}$ **Rpta.** $A=\dfrac{1}{3},\ B=\dfrac{2}{3}$

④ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}|x|}{x}, & x\in<-\pi,0>\\ Ax+B, & x\in[0,\pi>\\ \cos x, & x\in[\pi,2\pi>\end{cases}$ **Rpta.** A=0 , B=-1

5

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|2x^2-3x-9|}{2x^2-3x-9} & si \quad x<-\dfrac{3}{2} \;\; V \;\; x>3 \\ A & si \;\; x=3 \\ B & si \;\; x=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Rpta. A = 1 , B = -1

6

$$f(x)=\begin{cases}-2\operatorname{sen}x \;, & x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ A+B\operatorname{sen}x \;, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1-\operatorname{sen}x \;, & x\ge \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Rpta. A = 1 , B = -1

7

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt[3]{3x+3}}{A(\sqrt[3]{x}-2)} & si \quad x<8 \\ AB & si \quad x=8 \\ \dfrac{2}{|2x-7|B} & si \quad x>8\end{cases}$$

Rpta. A = 2 , $B=-\dfrac{1}{3}$

8

$$f(x)=\begin{cases}B[|3x+4|] \;, & x\in[1,2> \\ 3x\sqrt{A-2x} \;, & x\in<2,3> \\ 18 \;, & x=2\end{cases}$$

Rpta. A = 13 , B = 2

9

$$f(x)=\begin{cases}A\left(\dfrac{\sqrt{x^2+8}-\sqrt[3]{x^2-24x+2}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt{5-x^2}-4}\right) \;, & -\sqrt{5}\le x<-1 \\ \dfrac{A}{B} \;, & x=-1 \\ \dfrac{\sqrt[5]{31-x}-6x-8}{B^2(\sqrt[3]{26-x}-5x-8)} \;, & x>-1\end{cases}$$

Rpta. $A=\dfrac{24{,}531}{13{,}500}$, $B=\dfrac{135}{204}$

IV

① Analizar la continuidad de la función f en el punto $x = \frac{\pi}{2}$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen} x}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 3 & , x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

② Analizar la continuidad de la función f dado por: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 5[|\frac{x}{2}|]}, & -2 \le x \le 2 \\ 1 - x^3 & , x < -2 \\ x + 1 & , x \ge 2 \end{cases}$

③ Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \le 1 \\ 2ax - b & , 1 < x \le 2 \\ x + 1 & , x > 2 \end{cases}$. Hallar el valor de las constantes a y b para que la función f sea continua en R.

④ Para que valores de a y b la función: $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2, & x < 1 \\ 1 - bx^2, & 1 \le x \le 3 \\ -2 - ax, & x \ge 3 \end{cases}$ es continua en el intervalo <0,5>

⑤ Dada la función $f(x) = \begin{cases} A & , si \ x \le -1 \\ \dfrac{x^6 - 1}{x^4 - 1}, & si \ |x| < 1 \\ B + x, & si \ x \ge 1 \end{cases}$. Hallar los valores de A y B para que la función sea continua en $x = \pm 1$.

⑥ Hallar los valores de a y b para que la función: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le 3 \\ ax^2 + b, & 3 < x \le 5 \\ x^2 + 2, & x > 5 \end{cases}$ sea continua en todo R.

(7) Halle los valores de A, B y C para que la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & x\leq -2\\ Ax^2+Bx, & -2<x<3\\ cx+6, & x\geq 3\end{cases}$ sea continua en todo R.

(8) Determinar sí la función f dada por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}, & x=0\end{cases}$ es continua en x = 0

(9) Hallar los valores de a y b, para que la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} 2(x-3)}{x-3}, & x\leq 3\\ ax+b, & 3<x<5\\ 7, & x\geq 5\end{cases}$ sea continua en todo R.

(10) Dada la función $f(x)=\begin{cases}b[|3x+4|], & 1\leq x<2\\ 3x\sqrt{a-2x}, & 2<x<3\\ 18, & x=2\end{cases}$. Hallar los valores de a y b para que f sea continua en x = 2.

(11) Dada la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}, & -\dfrac{5}{2}<x<-2\\ ax+b, & -2\leq x\leq 0\\ \dfrac{2\operatorname{sen} x+3\operatorname{sen}^2 x}{x+2x^4}, & x>0\end{cases}$. Hallar los valores de a y b para que f sea continua en $<-\dfrac{5}{2},+\infty>$

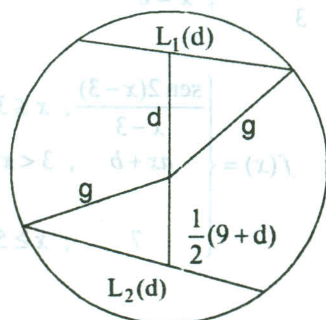
(12) Hallar los valores de a y b para que la función: $f(x)=\begin{cases}x+2a, & x<-2\\ 3ax+b, & -2\leq x\leq 1\\ 3x-2b, & x\geq 1\end{cases}$ sea continua en todo R.

3.31 PROBLEMAS SOBRE LIMITES.-

① En una circunferencia de radio 9, sea $L_1(d)$ y $L_2(d)$ las longitudes de dos cuerdas a las distancias d y $\frac{1}{2}(9+d)$ del centro respectivamente, donde 0 < d < 9. Hallar $\lim_{d\to 9}\frac{L_2(d)}{L_1(d)}$

Solución

Representando gráficamente los datos se tiene:



$$\frac{L_2(d)}{2}=\sqrt{81-\frac{1}{4}(9+d)^2}$$

$$L_2(d)=2\sqrt{81-\frac{1}{4}(9+d)^2}$$

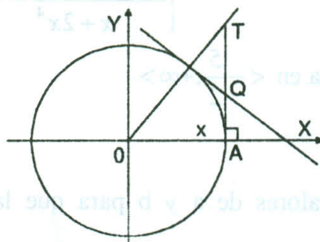
$$L_1=2\sqrt{81-d^2}$$

$$\lim_{d\to 9}\frac{L_2(d)}{L_1(d)}=\lim_{d\to 9}\frac{2\sqrt{81-\frac{1}{4}(9+d)^2}}{2\sqrt{81-d^2}}$$

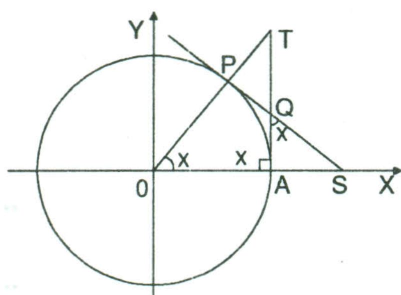
$$\lim_{d\to 9}\frac{\sqrt{324-(9+d)^2}}{2\sqrt{81-d^2}}=\frac{1}{2}\lim_{d\to 9}\sqrt{\frac{(18-9-d)(18+9+d)}{(9-d)(9+d)}}=\frac{1}{2}\lim_{d\to 9}\sqrt{\frac{27+d}{9+d}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{36}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

② En la figura mostrada.

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\overline{QT}^2}{\overline{AS}}$



Solución



Dibujo de la figura:

$\overline{QT} = \overline{AT} - \overline{AQ}$ ...(1)

En el ΔQAS: $\overline{AQ} = \overline{AS}\ \text{cotg}\, x$ ...(2)

En el Δ OAT: $\overline{AT} = \text{tg}\, x$ ...(3)

Ahora reemplazando (2), (3) en (1) se tiene: $\overline{QT} = \text{tg}\, x - \overline{AS}.\text{cotg}x$ ...(4)

En el Δ OPS: $\overline{OS} = \sec x \wedge \overline{AS} = \overline{OS} - \overline{OA}$ se tiene: $\overline{AS} = \sec x - 1$ ...(5)

reemplazando (5) en (4) se tiene:

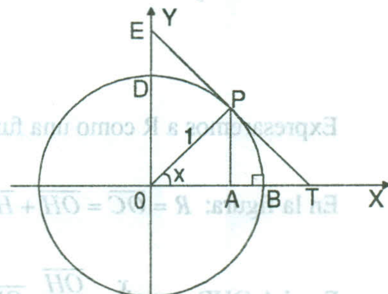
$$\overline{QT} = \text{tg}\, x - (\sec x - 1)\text{cotg}x = \frac{\text{tg}^2 x - \sec x + 1}{\text{tg}\, x} = \frac{\sec^2 x - \sec x}{tgx} = \frac{\sec x(\sec x - 1)}{tgx} \quad ...(6)$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\overline{QT^2}}{\overline{AS}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sec^2 x(\sec x - 1)^2}{\text{tg}^2 x}}{\sec x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x(\sec x - 1)}{\text{tg}^2 x} \lim_{x\to 0} \frac{\sec x - 1}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x.\text{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

③ En la figura, C es una circunferencia unitaria cuyo centro es el origen de coordenadas, T es la recta tangente a C en el punto P y $0 < x < \pi/2$, Hallar: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\overline{DE}}{\overline{OA}}$



Solución

Por trigonometría: $\overline{OE} = \cos ecx$

En el Δ OPE: cosec $x = \dfrac{\overline{OE}}{\overline{OP}} = \overline{OE}$

En la figura $\overline{DE} = \overline{OE} - \overline{OD} = \text{cosec}\, x - 1$ **...(1)**

$\overline{OA} = \cos x$ **...(2)**

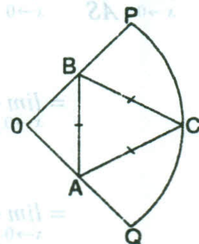
$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\overline{DE}}{\overline{OA}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{cosec}\, x - 1}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{sen}\, x}{\text{sen}\, x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \text{sen}\, x)(1 + \text{sen}\, x)}{\text{sen}\, x \cos x (1 + \text{sen}\, x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x \cos x (1 + \text{sen}\, x)}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\text{sen}\, x (1 + \text{sen}\, x)} = \frac{0}{2} = 0 \qquad \therefore\ L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\overline{DE}}{\overline{OA}} = 0$$

(4) Dado el sector circular de radio R y ángulo central x (como se muestra en la figura), se inscribe en el un triángulo equilátero de lado L, calcular:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{R - L\sqrt{3}}{3x - \pi}$$



Solución

Expresaremos a R como una función de x

En la figura: $R = \overline{OC} = \overline{OH} + \overline{HC}$ **...(1)**

En el Δ OHB $\text{cotg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{HB}}, \overline{OH} = \overline{HB}.\text{cotg}\dfrac{x}{2}$ **...(2)**

En el Δ BHC: $\overline{HC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}L$ **...(3)**

Ahora reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$R=\overline{HB}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}L \quad \text{pero} \quad \overline{HB}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{L}{2} \quad \text{entonces} \quad R=\frac{L}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{R-L\sqrt{3}}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{L}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}L-L\sqrt{3}}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{2}(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-\sqrt{3})}{3x-\pi}$$

$$=\frac{L}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{(3x-\pi)\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=\frac{L}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{x}{2}-c\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{(3x-\pi)\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{L}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{\pi}{6}.\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{(3x-\pi)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}.\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=\frac{L}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})}{-6(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}.\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(-\frac{1}{6})\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6}}=-\frac{L}{12}(4)=-\frac{L}{3} \qquad \therefore=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{R-L\sqrt{3}}{3x-\pi}=-\frac{L}{3}$$

(5) Hallar el límite del ángulo interno de un polígono regular de n lados sí $n\to\infty$

Solución

La suma de los ángulos internos de un polígono regular de n lados es: Sí = π (n-2)

Como nos piden el límite de un ángulo interno cuando n →∞, es decir $i=\frac{si}{n}$

Osea $i=\frac{\pi(n-2)}{2}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} i=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi(n-2)}{n}=\pi$

6) Hallar el límite, cuando n→∞, del perímetro de la línea quebrada $M_0M_1...M_n$, inscrita en la espiral logarítmica $r=e^{-\varphi}$ si los vértices de esta quebrada tienen, respectivamente, los ángulos polares: $\varphi_0=0$, $\varphi_1=\frac{\pi}{2},...,\varphi_n=\frac{n\pi}{2}$

Solución

Teniendo en cuenta la magnitud del ejercicio daremos algunas reflexiones iniciales.

i) En el espiral $r=e^{-\varphi}$, r es un radio vector, ∀ valor de φ.

ii) La quebrada inscrita en la espiral significa que a cada vértice le corresponde un vector.

iii) Cada segmento de la quebrada está obviamente entre dos vértices consecutivos.

iv) Cada segmento es el lado de un triángulo cuyos otros dos lados son los radios vectores correspondientes.

Si C es el segmento de la línea quebrada que es el lado de un triángulo se aplica la fórmula. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

v) A cada vértice M_k le corresponde un radio vector

$$r_k=e^{-\varphi}k \text{ donde } \varphi_k=\frac{k\pi}{2} \qquad \textbf{...(1)}$$

vi) El k-ésimo segmento de la línea quebrada S_k está comprendida entre los radios vectores r_{k-1} y r_k, los cuales forman el k-ésimo ángulo $(\varphi_k-\varphi_{k-1})$.

vii) Calculando el k-ésimo segmento S_k :

$$S_k = \sqrt{r_{k-1}^2 + r_k^2 - 2r_{k-1}r_k \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1})} \quad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2) y simplificando exponentes:

$$S_k = \sqrt{e^{-k\pi}.e^{\pi} + e^{-k\pi} - 2e^{-k\pi}.e^{\pi/2}\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{e^{-k\pi}(e^{\pi}+1)} = \sqrt{\frac{e^{\pi}+1}{e^{k\pi}}} \quad ...(3)$$

viii) Calculando el perímetro de la línea quebrada finita $M_0M_1M_2...M_n$ se tiene:

$$P_n = P_n(M_0M_1M_2...M_n) = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{e^{\pi}+1}{e^{k\pi}}} \quad ...(4)$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sqrt{e^{\pi}+1}\left(\frac{1}{e^{\pi/2}} + \frac{1}{e^{2\pi/2}} + \frac{1}{e^{3\pi/2}} .. + \frac{1}{e^{n\pi/2}}\right) \quad ...(5)$$

$$P_n = \frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}}\left(1 + \frac{1}{e^{\pi/2}} + \frac{1}{e^{2\pi/2}} + ... + \frac{1}{e^{(n-1)\pi/2}}\right)$$

Para la suma de una progresión geométrica es dado por: $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$P_n = \frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}}\left[\frac{1-(\frac{1}{e^{\pi/2}})^n}{1-\frac{1}{e^{\pi/2}}}\right] = \frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}}\left[\frac{1-e^{-n\pi/2}}{e^{\pi/2}-1}\right]e^{\pi/2} = \frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}-1}(1-e^{-n\pi/2})$$

ix) Calculando el perímetro de la línea llevando el límite para $n \to \infty$, se tiene:

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}-1}(1-e^{-\pi n/2}) = \frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}-1}\lim_{n\to\infty}(1-e^{-\pi n/2}) = \frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}-1}(1-0)$$

$$\therefore P = \frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}-1}$$

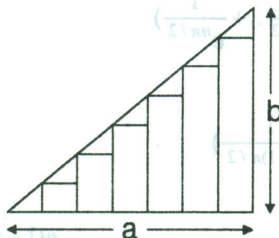
3.32 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

(1) Hallar el límite de las áreas de los cuadrados construidos sobre las ordenadas de la curva $y = 2^{1-x}$ como base, donde x = 1,2,3, ….,n, con la condición de que n→∞

Rpta. 4

(2) Hallar el límite de la suma de las longitudes de las ordenadas de la curva $y = e^{-x}\cos\pi x$ trazadas en los puntos x = 0,1,2, ….,n , sin →∞ **Rpta.** $\frac{e}{e+1}$

(3) Sobre los segmentos obtenidos al dividir el cateto a de un triángulo rectángulo en n partes iguales, se han construido rectángulos inscritos (ver figura). Determinar el límite del área de la figura escalonada así construida, si n →∞



Rpta. $S = \frac{ab}{2}$

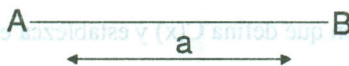
(4) Hallar el límite de los perímetros de los polígonos regulares de n lados inscritos en una circunferencia de radio R y de los circunscritos a su alrededor, sí n→∞ **Rpta.** L=2Rπ

(5) El punto C_1 divide al segmento AB=L en dos partes iguales, el punto C_2 divide el segmento AC_1 en dos partes también iguales; el punto C_3 divide a su vez, el segmento C_2C_1 en dos partes iguales; él C_4 hace lo propio con el segmento C_2C_3 y así sucesivamente. Determinar la posición límite del punto C_n, cuando n→∞ **Rpta.** $\frac{1}{3}$

(6) Consideremos un triángulo equilátero de lado a sus tres alturas sirven para engendrar un nuevo triángulo equilátero y así sucesivamente n veces. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los triángulos cuando n→∞ **Rpta.** $a^2\sqrt{3}$

(7) Un círculo de radio R lleva inscrito un cuadrado; éste, lleva inscrito un círculo el cual, a su vez, tiene inscrito un cuadrado y así sucesivamente n veces. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los círculos y el de la suma de las áreas de todos los círculos y el de la suma de las áreas de todos los cuadrados cuando n→∞. **Rpta.** $2\pi R^2$

(8) El segmento AB cuya longitud es $\underline{a}$, está dividido en partes iguales por n puntos, desde los cuales se han trazado rayos en ángulos $\frac{\pi}{2n}$ (ver figura). Hallar el límite de la longitud de dicha línea quebrada cuando n crece infinitamente. **Rpta.** a



(9) El segmento AB cuya longitud es $\underline{a}$ está dividido en n partes iguales. Los pequeños segmentos resultantes sirven de cuerdas subtienden arcos de circunferencia, cada uno de los cuales es igual a $\frac{\pi}{n}$ radian (ver figura). Hallar el límite de la longitud de la línea resultante cuando n→∞ ¿Cómo cambiaría el resultado si las cuerdas subtendiesen una semicircunferencia? **Rpta.** $a, \frac{\pi a}{2}$

(10) En los puntos extremos y medios del arco AB de una circunferencia se han trazado las tangentes y los puntos A y B se han unido por una cuerda. Demostrar que la razón de las áreas de dos triángulos resultantes tienden a 4, disminuyendo infinitamente el arco AB.

(11) Sea C_1 un círculo de radio 7 y T_1 el triángulo equilátero inscrito en C_1;C_2 el círculo inscrito en T_1 y T_2 el triángulo inscrito en C_2 y así sucesivamente se construye T_n el triángulo equilátero inscrito en C_n

Si A_n es la suma de las áreas de los triángulos : $T_1, T_2, \dots T_n$ y B_n es la suma de las áreas de los círculos $C_1, C_2, \dots C_n$. Hallar $\lim_{n\to\infty} An$ y $\lim_{n\to\infty} Bn$.

(12) La gráfica de $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ es una semicircunferencia de radio 2 con centro en el origen. Sea Q un punto fijo de la semicircunferencia con Q ≠ (±2,0).

Sea p un punto que se mueve hacia Q a lo largo de la curva. La secante que pase por P y Q interceptada a la recta vertical x = 4 en el punto E.

Hallar la posición límite del punto E cuando P se aproxima a Q.

Demostrar que esta posición límite está en la tangente a la semicircunferencia en Q.

(13) Una caja cerrada con base cuadrada va ha tener un volumen de 2000 $pulg^3$. El material para las partes superior e inferior de la caja costara $ 3 por pulgada cuadrada y el material por los lados costara $ 1.50 por pulgada cuadrada y el material para los lados costara $ 1.50 por pulgada cuadrada. Sea x pulgadas la longitud de un lado de la base cuadrada y C(x) dólares el costo total del material.

a) Escribir una ecuación que defina C(x) y establezca el dominio de la función C.

b) Calcular él $\lim_{x\to 0^+} C(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} C(x)$ y explicar estos resultados en términos del problema.

c) Trazar la gráfica de C.

(14) Un campo rectangular que tiene una rea de 2,700 m^2 va a ser limitado por una cerca, además, otra cerca dividirá el terreno por la mitad. El costo de la cerca que dividirá el terreno es $ 4 por metro y el costo de los lados es de $ 6 por metro. Sea x metros de longitud de la cerca divisora y C(x), el costo de la cerca.

a) Escriba la ecuación que definida C(x) y establezca el dominio de la función C.

b) Encuentre $\lim_{x\to 0^+} C(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} C(x)$ y explique sus resultados en termino del problema.

c) Trazar la gráfica de C.

(15) Un tanque abierto de forma rectangular tendrá una base cuadrada y su capacidad será de 125 metros cúbicos. El costo por metro cuadrado para el fondo será de $ 8 y para los lados será de $ 4. Sea x m la longitud de un lado de la base cuadrada y C(x), el costo del material.

a) Establezca una ecuación que defina C(x) y determine el dominio de C.

b) Halle $\lim_{x\to 0^+} C(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} C(x)$ y explique sus resultados en términos del problema.

c) Trace la gráfica de C.

CAPITULO IV

4. LA DERIVADA.

En este capítulo realizaremos el estudio de la derivada de una función, que es un instrumento matemático muy potente, que sirve para el estudio del cálculo diferencial e integral.

Las derivadas aparecieron aunque de una forma un tanto obscuras en el siglo XVIII, como consecuencia del estudio de las velocidades, hechos por el matemático y físico inglés NEWTON y el estudio sobre tangentes de curvas hecho por el matemático y filósofo alemán LEIBNIZ.

En este capítulo haremos el estudio de las derivadas en las diversas funciones, de tal manera que el siguiente capítulo trataremos sus aplicaciones.

4.1. DEFINICION.-

Consideremos la función real de variable real y = f(x), si $x \in D_f$ entonces la derivada de la función f con respecto a x definiremos por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que dicho límite exista.

El proceso de encontrar la derivada se llama "diferenciación".

Ejemplo.- Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, encontrar la derivada f'(x)

Solución

Por definición de derivada se tiene: Si $x \in D_f$, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

Ejemplo.- Si $f(x)=x^2$, calcular $f'(x)$

Solución

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x.\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x.\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to}(2x+\Delta x)=2x+0=2x \qquad \therefore \quad f'(x)=2x$$

Ejemplo.- Si f(x) = cos x, calcular $f'(x)$

Solución

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x.\cos\Delta x-\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}\Delta x-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[-\operatorname{sen}x.\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}-\cos x\frac{(1-\cos\Delta x)}{\Delta x}]$$

$$=-\operatorname{sen}x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}-\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}=\text{-senx.(1)}-\text{cosx.(0)}=\text{-senx}-0=\text{-senx}$$

$$\therefore \quad f'(x)=-\operatorname{sen}x$$

Ejemplo.- Si $f(x)=e^x$, calcular $f'(x)$

Solución

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x.e^{\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^x(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x})$$

$$=e^x.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x.\ln e=e^x \qquad \therefore \quad f'(x)=e^x$$

OBSERVACIÓN:

Si la derivada de una función f(x) se desea calcular en un punto $x = x_0$, simplemente se reemplaza x por x_0 en la definición es decir: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Ejemplo.- Calcular $f'(-1)$ si $f(x) = 8 - 2x^3$

Solución

Por definición se tiene: $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

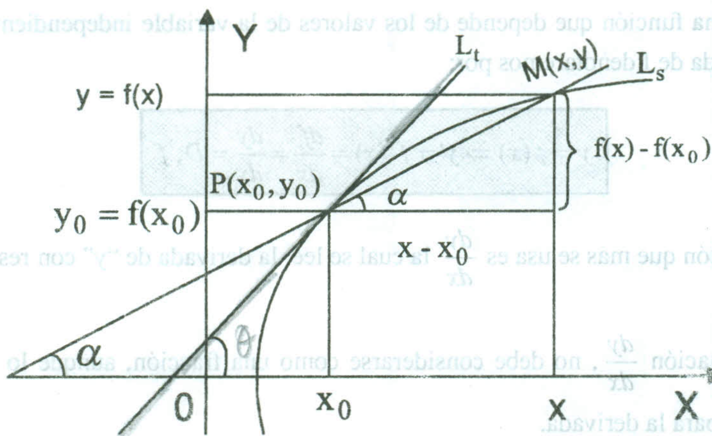
$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{(8 - 2(-1+h)^3) - (8 - 2(-1)^3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 - 2h^3 + 6h + 2 - 8 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} -2h^2 + 6h - 6 = -6$$

4.2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.-

Consideremos una curva C: y = f(x) y un punto fijo $P_0(x_0, y_0)$ de dicha curva, sea L_s la recta secante que pasa por $P_0(x_0, y_0)$ y por el punto M(x, y) ∈C.

La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P_0 y M es:



$$mL_s = \text{tg}\,\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0}\ ,\ x \neq x_0$$

Si el punto M(x,y) se aproxima al punto $P_0(x_0, y_0)$ resulta que la variable x se aproxima a x_0 de tal manera que $\Delta x = x - x_0$ se aproxima a cero, con lo cual se está haciendo uso del concepto de límite.

Por lo tanto, cuando el punto M(x,y) se aproxima al punto $P_0(x_0, y_0)$ la recta secante L_s se ha transformado en la recta tangente L_t, lo cual indica que el ángulo α tiende a coincidir con el ángulo θ y $\text{tg}\,\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ tiende a convertirse en:

$$\text{tg}\,\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\therefore f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Luego la derivada de la función f en él $P_0(x_0, y_0)$ es $f'(x_0)$ y representa la pendiente de la recta tangente en el punto $P_0(x_0, y_0)$

NOTACION

Si f es una función que depende de los valores de la variable independiente x entonces a la derivada de f denotaremos por:

$$y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f$$

La notación que más se usa es $\frac{dy}{dx}$ la cual se lee: la derivada de "y" con respecto a "x".

En la notación $\frac{dy}{dx}$, no debe considerarse como una fracción, aunque lo parezca, es un símbolo para la derivada.

OBSERVACIÓN:

Si $x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \Delta x = h$ entonces $h = x - x_0$ y cuando $x \to x_0$ se tiene $h \to 0$, lo que es lo mismo cuando $\Delta x \to 0$, $h \to 0$: por lo tanto la definición de derivada $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, daremos en la forma:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ donde } x + h \in D_f$$

4.3. DEFINICION.-

La función real de variable real y = f(x) es diferenciable en un punto $x = x_0$ si existe su derivada en el punto $x = x_0$, es decir si $f'(x_0)$ existe.

4.4. DEFINICION.-

Diremos que la función f es diferenciable en un intervalo [a, b] si la función f es diferenciable en cada uno de los puntos del intervalo [a, b]

Ejemplo.- Demostrar que la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \cos(\frac{1}{x}); x > 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$ es diferenciable en el punto x = 0

Solución

Para que f sea diferenciable en x = 0, debe existir $f'(0)$, en efecto

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{3/2} \cos(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt{h} \cos(\frac{1}{h}) = 0$$

Luego $\exists$ f´(0) = 0 $\Rightarrow$ f(x) es diferenciable en x = 0

Ejemplo.- Demostrar que la función f definida por $f(x) = x^{2/3}$, $x \in R$, no es diferenciable en x = 0

Solución

Para que f no sea diferenciable en x = 0, debemos probar que $\nexists\ f'(0)$, es decir

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}}$$

por lo tanto como $f'(0)$ no existe $\Rightarrow$ f no es diferenciable en x = 0

4.5 DERIVADAS LATERALES.-

Consideremos una función real de variable real, y = f(x), entonces:

i) La derivada de la función f en el punto $x=x_0$, por la derecha representaremos por $f'(x_0^+)$ y está definido por:

$$f'(x_0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

o equivalente a la forma $$f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

si el límite existe.

ii) La derivada de la función f en el punto $x=x_0$, por la izquierda representaremos por $f'(x_0^-)$ y está definido por:

$$f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

o equivalente a la forma: $$f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

si el límite existe.

Ejemplo.- Hallar $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$ en $x=x_0$ sí $f(x)=\begin{cases}2x^2-3, si\ x\le 2\\ 8x-11\ , si\ x>2\end{cases}$

Solución

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(8(2+h)-11)-(8-3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{16+8h-11-8+3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{8h}{h}=8$$

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2(2+h)^2-3)-(8-3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{8+8h+2h^2-3-8+3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{8h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}8+2h=8$$

OBSERVACIÓN.- Diremos que la derivada de la función f(x) existe en el punto $x=x_0$, si sus derivadas laterales existen y son iguales es decir:

$$\exists\ f'(x_0)\ \Leftrightarrow\ f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$$

4.6 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.-

Las propiedades de las funciones más útil en el cálculo son: la continuidad y la derivabilidad; como estos conceptos son definidos mediante un límite, entonces nos haremos las siguientes preguntas

- ¿Si una función es continua, es derivable en ese punto?
- ¿Si una función es derivable ha de ser también continua o quizás las dos propiedades son equivalentes?

Para dar respuesta a estas preguntas daremos un ejemplo;

Sea f: R → R / f(x) = |x| es continua en R, en particular en x = 0, ahora veremos si es derivable en x = 0, es decir

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & h>0\\ -1, & h<0\end{cases}$$

entonces $f'(0^+) \neq f'(0^-) \Rightarrow \nexists f'(0)$, esto quiere decir que la función f no es derivable en x = 0 por lo tanto "Si f es continua en $x = x_0 \not\Rightarrow$ f sea diferenciable en: $x = x_0$". Si f es derivable en $x = x_0 \Rightarrow$ f es continua en: $x = x_0$"

a) TEOREMA

Sea f una función y $x_0 \in D_f$, si f es diferenciable en x_0 entonces f es continúa en x_0

Demostración

Por hipótesis se tiene que f es diferenciable en x_0, esto quiere decir que $\exists\ f'(x_0)$, y

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.\lim_{h\to 0} h = f'(x_0)0 = 0$$

entonces: $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - \lim_{h\to 0} f(x_0) = 0$

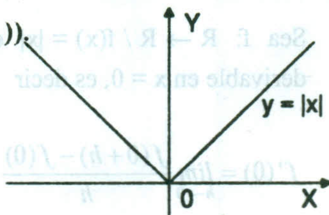
$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

$\therefore$ **f es continua en x_0**

COMENTARIO:

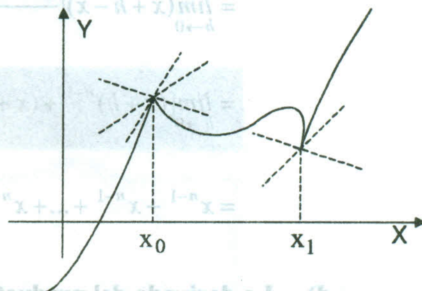
Sabemos que si existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ entonces existe una recta tangente no vertical bien definida y es única en el punto $(x_0, f(x_0))$.

La no existencia de la recta tangente no vertical cuando las derivadas laterales existen pero no son iguales.



Tal es el caso del valor absoluto f(x) = |x| en donde sus derivadas laterales en $x_0 = 0$ son diferentes $f'(0^+) \neq f'(0^-)$. También no existe recta tangente no vertical cuando uno o ambas derivadas laterales no existen, es +∞ ó -∞

Como la recta tangente no vertical es única entonces en la gráfica de las funciones se presentan esquinas como se muestra en la figura.



4.7 ALGUNAS REGLAS DE DERIVACION.-

a) La derivada de una constante es cero.- Sí y = f(x) = c $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$

Demostración

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

b) La derivada de la función identidad es 1.- Sí y = f(x) = x $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1$

Demostración

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 1$$

c) La derivada de la función potencia simple.-

Si y = f(x)= x^n $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, n es cualquier número real.

Demostración

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}, \text{ para } n \in Z^+$$

$$= \lim_{h\to 0}(x+h-x)[\frac{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n+2}x}{h}+...+\frac{(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}}{h}]$$

$$= \lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n+2}x+...+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]$$

$$= x^{n-1}+x^{n-1}+...+x^{n-1}+x^{n1}=nx^{n-1} \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

d) La derivada del producto de una función por el escalar

Sí $y = k\, f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = k\, f'(x)$

Demostración

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{k(f(x+h)-kf(x)}{h}=k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=kf'(x) \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=kf'(x)$$

e) La derivada de la suma de dos funciones

Sí $y = f(x) + g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)+g'(x)$

Demostración

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)-g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=f'(x)+g'(x)$$

f) La derivada del producto de dos funciones.-

Sí $y = f(x).g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

Es decir: La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda más el producto de la derivada de la primera función por la segunda función.

Demostración

Sea y = F(x) = f(x).g(x), entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

ahora sumamos y restamos f(x + h) g(x) en el numerador

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x+h)g(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x)+g(x)f'(x) \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = f(x).g'(x)+g(x).f'(x)$$

g. La derivación del cociente de dos funciones.-

Sí $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$, g(x) ≠ 0

Es decir: La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador menos el producto del numerador por la derivada del denominador dividido por el cuadrado del denominador.

Demostración

Sea $y = F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$$

Ahora sumando y restando f(x) g(x) en el numerador se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x)}{hg(x)g(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}-\frac{f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}}{g(x)g(x+h)}=\frac{g(x)f'(x)-f(x).g'(x)}{g(x).g(x+0)}$$

$$=\frac{g(x).f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{g(x).f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

RESUMIENDO:

① $y=F(x)=c \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$

② $y=F(x)=x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$

③ $y=k\,F(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=k\,F'(x)$

④ $y=F(x)=x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$

⑤ $y=F(x)+G(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=F'(x)+G'(x)$

⑥ $y=F(x).G(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$

⑦ $y=\frac{F(x)}{G(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{G(x)F'(x)-F(x)G'(x)}{(G(x))^2}$

Ejemplo.- Hallar la derivada $f'(x)$ si la función f(x) es:

① $$f(x)=x^7+x^5+\frac{1}{x^3}+4x$$

Solución

$$f(x)=x^7+x^5+\frac{1}{x^3}+4x=x^7+x^5+x^{-3}+4x$$

$$f'(x)=7x^6+5x^4-3x^{-4}+4=7x^6+5x^4-\frac{3}{x^4}+4 \qquad \therefore\ f'(x)=7x^6+5x^4-\frac{3}{x^4}+4$$

② $$f(x)=(x^5+2x)(x^3+x^2+x+7)$$

Solución

$$f'(x)=(x^5+2x)'.(x^3+x^2+x+7)+(x^5+2x).(x^3+x^2+x+7)'$$

$$=(5x^4+2).(x^3+x^2+x+7)+(x^5+2x).(3x^2+2x+1)$$

$$=8x^7+9x^6+6x^5+41x^4+2x^3+10x^2+4x+14$$

③ $$f(x)=\frac{x^3+2x^2+7}{x^4+x^3+x}$$

Solución

$$f'(x)=\frac{(x^4+x^3+x).(x^3+2x^2+7)'-(x^3+2x^2+7).(x^4+x^3+x)'}{(x^4+x^3+x)^2}$$

$$=\frac{(x^4+x^3+x).(3x^2+4x)-(x^3+2x^2+7).(4x^3+3x^2+1)}{(x^4+x^3+x)^2}$$

$$=-\frac{x^6+4x\ \ +2x^4+5x^3+19x^2+7}{(x^4+x^3+x)^2}$$

4.8 DERIVADAS DE UNA FUNCION COMPUESTA. (Regla de la cadena)

El criterio de la regla de la cadena para la derivada de las funciones compuestas, es la herramienta más importante del cálculo diferencial.

Antes de dar una demostración formal, le daremos un tratamiento intuitivo y para esto, consideremos dos funciones diferenciales en general:

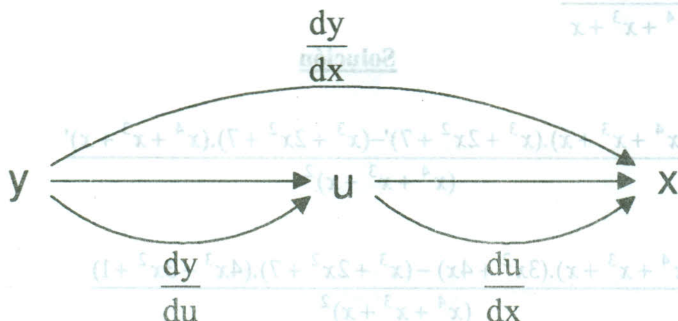
$$\begin{cases} y = f(u) & \text{"y es función de u"} \\ u = g(x) & \text{"u es función de x"} \end{cases}$$

entonces a "y" se puede expresar en función de x, es decir y = f(u) = f(g(x)) = (f o g)(x) esto viene hacer la composición de funciones, ahora para calcular su derivada se hace de la forma siguiente:

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{du} = f'(u) \\ \dfrac{du}{dx} = g'(x) \end{cases}, \text{ entonces } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

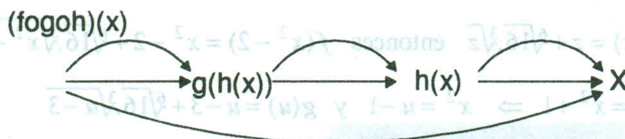
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x)}$$

Sí y = (f o g)(x) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x)$. Ilustraremos mediante un diagrama



NOTA.- Cuando se trata de tres funciones f, g, h, se tiene:

$(fogoh)(x) = f'(g(h(x))g'(h(x))h'(x)$



Ejemplo.- Calcular mediante la regla de la cadena $\frac{dy}{dx}$ donde: $y=(f(x))^n$

Solución

Sea $y=u^n$, u = f(x) $\Rightarrow \frac{dy}{du}=nu^{n-1}$, $\frac{du}{dx}=f'(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}=n(f(x))^{n-1}f'(x) \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx}=n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

OBSERVACIÓN.- Sea f una función derivable en x_0, si $y=F(x)=(f(x))^n$, n $\in$ Q entonces F es derivable en x_0 y es dado por:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=F'(x_0)=n(f(x_0))^{n-1}f'(x_0)$$

Ejemplo.- Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y=[\frac{a+bx^n}{a-bx^n}]^m$

Solución

Sea $f(x)=\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\Rightarrow f'(x)=\frac{nbx^{n-1}(a-bx^n)+nbx^{n-1}(a+bx^n)}{(a-bx^n)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2abnx^{n-1}}{(a-bx^n)^2}$

$$y=([\frac{a+bx^n}{a-bx^n}])^m=f^m(x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=m(f(x))^{m-1}f'(x)\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{2abnmx^{n-1}}{(a-bx^n)^2}[\frac{a+bx^n}{a-bx^n}]^{m-1}$$

Ejemplo.- Sí $f(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[6]{16(x^2+1)}$ y $f(x^2-2)=g(x^2+1)$. Calcular $g'(5)$

Solución

Sí $z=\sqrt{x^2+1}$ entonces $z^2=x^2+1$, de donde $f(z)=z+\sqrt[6]{16z^2}$

Luego $f(z)=z+\sqrt[6]{16}.\sqrt[3]{z}$ entonces $f(x^2-2)=x^2-2+\sqrt[6]{16}.\sqrt[3]{x^2-2}$

ahora sí $u=x^2+1 \Rightarrow x^2=u-1$ y $g(u)=u-3+\sqrt[6]{16}.\sqrt[3]{u-3}$

de donde $g'(u)=1+\dfrac{\sqrt[6]{16}}{3\sqrt[3]{(u-3)^2}}$ $\quad\therefore\quad g'(5)=\dfrac{4}{3}$

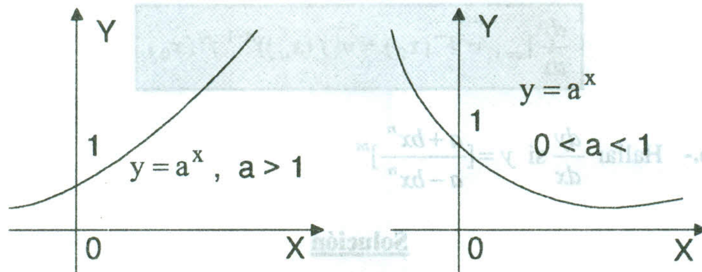
4.9 DERIVACION DE LA FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA.-

a) Función Exponencial de Base "a" Positiva.-

Sea $a \in R^+$ y $a \neq 1$, a la función exponencial de base "a" definiremos en la forma:

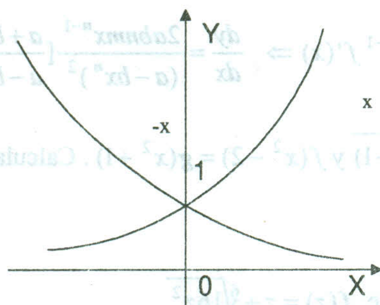
$$\exp_a = \{(x,y) \in RxR \,/\, y = a^x\}$$

donde su dominio es $<-\infty,+\infty>$ y su rango es $<0,+\infty>$, si $a > 1$, entonces la función $y=a^x$ es creciente, si $0 < a < 1$ entonces la función $y=a^x$ es decreciente.



Sí $a = e \Rightarrow y = e^x$

OBSERVACIÓN.- Del gráfico se observa que:



① $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

② $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

④ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

b) Propiedades de la Función Exponencial: Sí a, b > 0, entonces:

① $a^0 = 1$ ② $a^x a^y = a^{x+y}$

③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

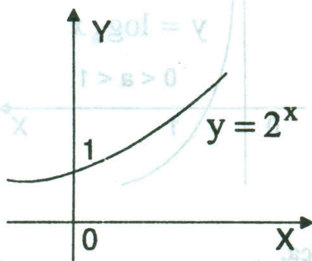
⑤ $(ab)^x = a^x b^x$ ⑥ $(\dfrac{a}{b})^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

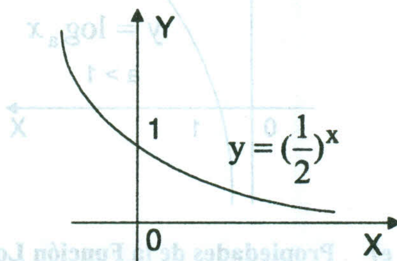
Ejemplo.- Trazar la gráfica de las siguientes funciones:

① $y = 2^x$ ② $y = (\dfrac{1}{2})^x$

Solución

Como a = 2 > 1 ⇒ $y = 2^x$ es creciente Como $a = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow y = (\dfrac{1}{2})^x$ es decreciente





c) Función Logarítmica de Base "a" Positiva

De la definición de la función exponencial $y = f(x) = a^x$, a > 0, a ≠ 1 se deduce que dicha función es inyectiva y por lo tanto tiene inversa.

Luego a la función inversa de $y = f(x) = a^x$ le llamaremos función logarítmica de base "a" y la definiremos en la forma:

d) Definición.- A la función f: <0,+∞> →R, definida por:

$$f = \{(x, y) \in RxR \,/\, y = \log_a x ,\ x \in \langle 0, +\infty \rangle,\ y \in R\}$$

Le llamaremos función logarítmica (o función logaritmo) de base "a", donde $a > 0$, $a \neq 1$ se sabe que $\log_a x$ es un número único b, tal que $a^b = x$

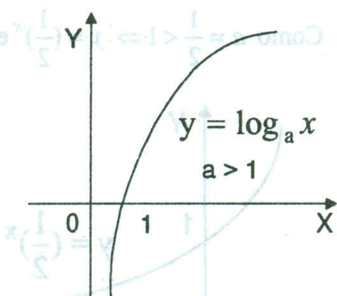
Es decir: $a > 0, a \neq 1;\ \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

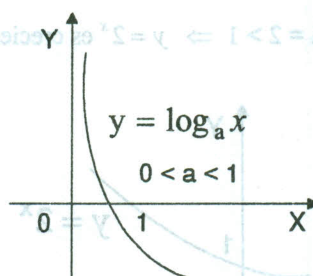
NOTA: $Log_a x = b$ se lee "el logaritmo en base a del número x es b"

OBSERVACIÓN.- La función logarítmica de base "a" tiene por regla de correspondencia la ecuación: $f(x) = \log_a x$ de donde:

i) Si $a > 1 \Rightarrow f(x) = \log_a x$ es creciente

ii) Si $0 < a < 1 \Rightarrow f(x) = \log_a x$ es decreciente.





e) Propiedades de la Función Logarítmica.

① $\log_a 1 = 0$

③ $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$

② $\log_a a = 1$

④ $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

③ $\log_a A^n = n \log_a A$

⑥ $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n} \log_a A$

⑦ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

⑧ $\log_b A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$

Las demostraciones de estas propiedades se deja para el lector

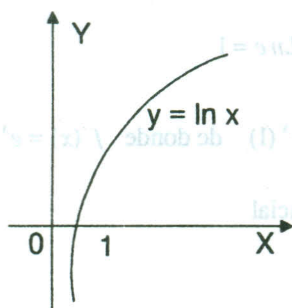
OBSERVACIÓN.- Si $x = e^y \Leftrightarrow y = \log_e x = Ln\, x$

f) **Definición.-**

La función cuya base es e, se llama función logaritmo natural o neperiano y denotaremos por:

$$f(x) = \log_e x = Ln\, x\,, \text{ donde } D_f = <0,+\infty> \text{ y } R_f = R$$

OBSERVACIÓN.- En la gráfica de la función y = ln x, observamos:



① $\lim\limits_{x \to +\infty} Ln\, x = +\infty$

② $\lim\limits_{x \to 0^+} Ln\, x = -\infty$

g) **Definición.-** La función logaritmo cuya base es 10, se llama función logaritmo decimal o vulgar y es denotado por:

$$f(x) = \log_{10} x = \log x$$

OBSERVACIÓN.- Casos particulares de las funciones exponenciales y logarítmicas son:

① $Ln\, e^x = x$ ② $e^{\ln x} = x$

OBSERVACIÓN.- Algunos límites que se dan en la definición de las derivadas:

① $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ② $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

③ $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha$ ④ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = Lna$, a > 0, a ≠ 1

4.10 TEOREMAS. (Derivación de la Función Exponencial y Logarítmica)

a) Demostrar que la derivada de la función exponencial: $f(x)=e^x$ es $f'(x)=e^x$

Demostración

Por definición de la derivada se tiene:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \quad ...(1)$$

Por la observación 4 se tiene: $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=Ln\,e=1$ **...(2)**

Ahora reemplazando 2 en 1 tenemos: $f'(x)=e^x(1)$ de donde $f'(x)=e^x$

b) Demostrar que la derivada de la función exponencial

$F(x)=a^x$, a > 0. a ≠ 1 es $F'(x)=a^x.Lna$

Demostración

Por definición de derivada se tiene:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \quad ...(1)$$

Por la observación 4 se tiene: $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=Ln\,a$ **...(2)**

Ahora reemplazado 2 en 1 tenemos: $F'(x)=a^x.Ln\,a$

c) Demostrar que la derivada de la función logarítmica: $F(x)=Ln$ x es $F'(x)=\frac{1}{x}$

Demostración

Por definición de derivada se tiene:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{Ln(x+h)-Lnx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}Ln(1\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}Ln(1+\frac{h}{x})^{1/h}$$

$$=Ln\,e^{1/x}=\frac{1}{x}Ln\,e=\frac{1}{x} \qquad \therefore F'(x)=\frac{1}{x}$$

d) Demostrar que la derivada de la función logarítmica: $F(x)=\log_a x$ e $F'(x)=\frac{1}{xLna}$, x > 0

Demostración

Por ser similar al anterior inciso, se deja como ejercicio.

OBSERVACIÓN.- Si y=Ln u donde u=f(x), entonces aplicando la regla de la cadena

$$\begin{cases} y=Lnu \\ u=f(x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{dy}{du}=\frac{1}{u} \\ \frac{du}{dx}=f'(x)\end{cases}$$

dy/dx

y → u → x

dy/du du/dx

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}.f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Por lo tanto: Sí $y=Ln(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

OBSERVACIÓN.- Sí $y=e^u$ y u = f(x), entonces:

$$\begin{cases} y=e^u \\ u=f(x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{dy}{du}=e^u \\ \frac{du}{dx}=f'(x)\end{cases}$$

dy/du du/dx

y ← u → x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=e^u.f'(x)=e^{f(x)}.f'(x)$$

Por lo tanto Si $y=e^{f(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{f(x)}.f'(x)$

RESUMIENDO:

① Sí $y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$

② Sí $y = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x Lna$

③ Sí $y = \text{Ln}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

④ Sí $y = \log_a x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}.x > 0$

⑤ Sí $y = e^{f(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{f(x)}.f'(x)$

⑥ Sí $y = \text{Ln}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Ejemplos.- Hallar $\frac{dy}{dx}$ si:

① $y = e^{x^2+x}$

Solución

$$y = e^{x^2+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x^2+x} \frac{d}{dx}(x^2+x) = (2x+1)e^{x^2+x}$$

② $y = 5^{x^3+x^2}$

Solución

$$y = 5^{x^3+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{x^3+x^2} \frac{d}{dx}(x^3+x^2)Ln5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x^2-2x)Ln5.e^{x^3-x^2}$$

③ $y = Ln[a+x+\sqrt{x^2+2ax}] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x(a+x+\sqrt{x^2+2ax})}{a+x+\sqrt{x^2+2ax}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{x+a}{\sqrt{x^2+2ax}}}{a+x+\sqrt{x^2 2ax}} = \frac{a+x+\sqrt{x^2+2ax}}{(a+x+\sqrt{x^2+2ax})\sqrt{x^2+2ax}} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2ax}}$$

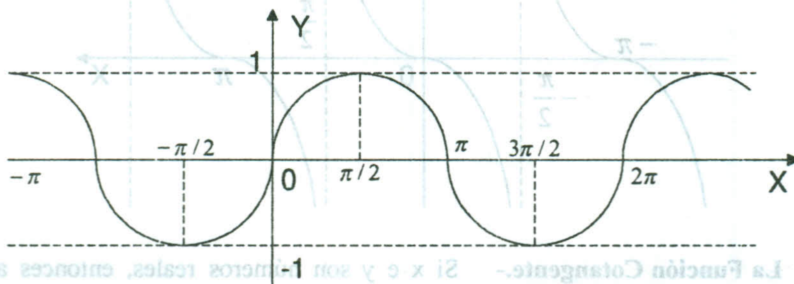
4.11 DERIVACION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.-

Para definir la derivada de las funciones trigonométricas daremos la definición de dichas funciones:

a) La Función Seno.- Si x e y son números reales, entonces a la función seno definiremos por:

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = \text{sen } x\}$$

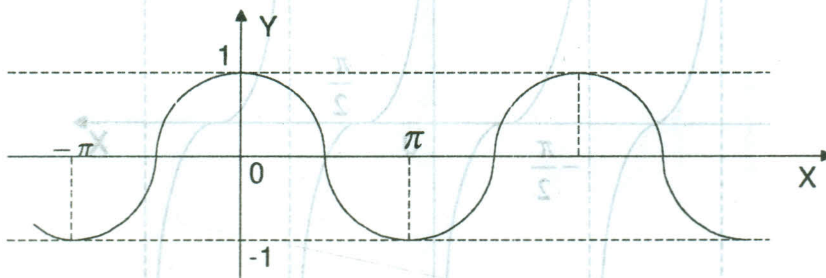
ó también mediante la regla f(x)=sen x donde $D_f = R$ y $R_f[-1,1]$, cuya gráfica es



b) La función Coseno.- Si x e y son números reales, entonces a la función coseno definiremos por:

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = \cos x\}$$

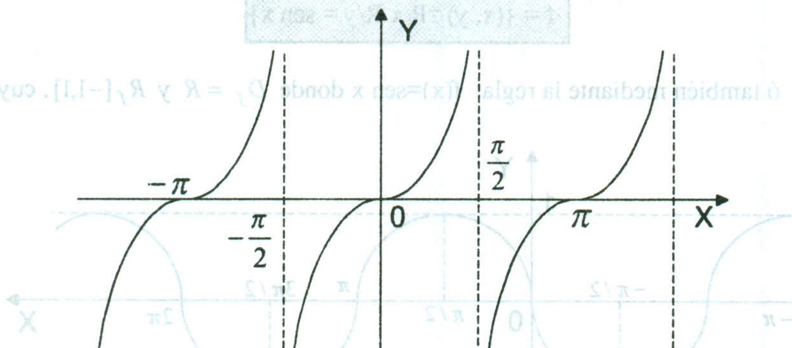
ó también mediante la regla f(x) = cos x , donde $D_f = R$ y $R_f = [-1,1]$, cuya gráfica es:



c) La Función Tangente.- Si x e y son números reales, entonces a la función tangente definiremos por:

$$f = \{(x, y) \in R \times R \,/\, y = tg\, x\}$$

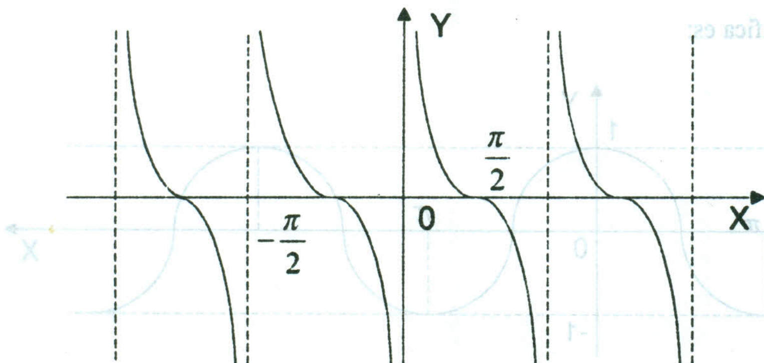
ó también mediante la regla f(x) = tg x , donde: $D_f = \{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi . k \in z\}$ y $R_f = R$ cuya gráfica es:



d) La Función Cotangente.- Si x e y son números reales, entonces a la función cotangente definiremos por:

$$f = \{(x, y) \in R \times R \,/\, y = ctg\, x\}$$

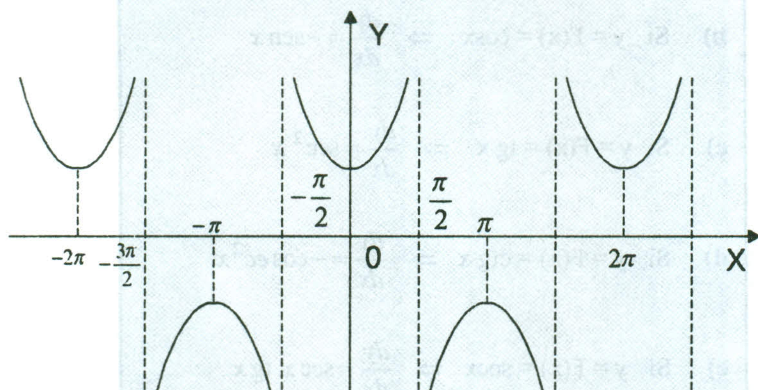
ó también mediante la regla f(x) = ctg x , donde $D_f = \{x \in R / x \neq k\pi, k \in z\}$ y $R_f = R$, cuya gráfica es:



e) **La Función Secante.-** Si x e y son números reales, entonces a la función secante definiremos por

f = {(x, y) ∈ R x R / y = sec x}

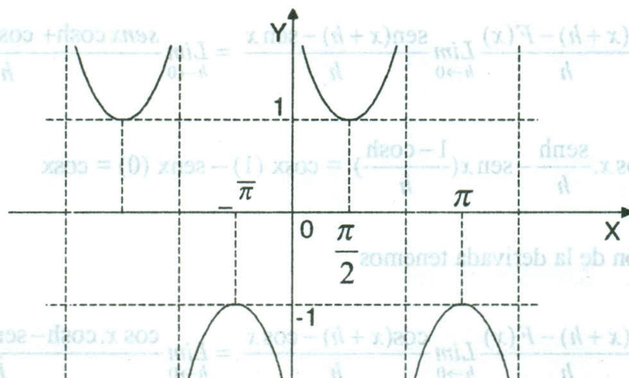
ó también mediante la regla f(x) = sec x, donde: $D_f = \{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in z\}$ y $R_f =< -\infty,-1] \cup [1,+\infty >$ cuya gráfica es:



f) **La Función Cosecante.-** Si x e y son números reales, entonces a la función cosecante definiremos por:

f = {(x, y) ∈ R x R / y = cosec x}

ó también mediante la regla f(x) = cosec x , donde: $D_f = \{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in z\}$ y R_f = <-∞,-1] ∪ [1,+∞> , cuya gráfica es:



4.12 TEOREMA: (Derivadas de las Funciones Trigonométricas)

Las funciones trigonométricas son derivables en todo su dominio y:

a) Si $y = F(x) = \text{senx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$

b) Si $y = F(x) = \text{cosx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\text{sen}\, x$

c) Si $y = F(x) = \text{tg}\, x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

d) Si $y = F(x) = \text{ctg}\, x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cos ec^2 x$

e) Si $y = F(x) = \text{secx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec x.\text{tg}\, x$

f) Si $y = F(x) = \text{cosec}\, x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cos ecx.c\,\text{tg}\, x$

Demostración

a) Por definición de la derivada tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}\, x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{senx}\cosh + \cos x\,\text{senh} - \text{senx}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x.\frac{\text{senh}}{h} - \text{sen}\, x(\frac{1-\cosh}{h}) = \text{cosx}\ (1) - \text{senx}\ (0) = \text{cosx}$$

b) Por definición de la derivada tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x.\cosh - \text{sen}\, x.\text{senh} - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(-\cos x\,\frac{1-\cosh}{h}) - \operatorname{sen} x.\frac{\operatorname{senh}}{h}) = -\cos x(0) - \operatorname{sen} x(1) = -\operatorname{sen} x$$

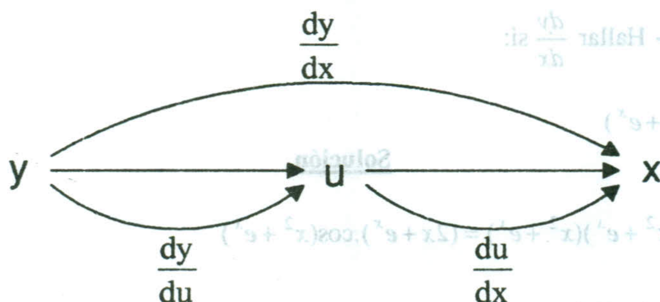
c) $$\frac{dy}{dx} = D_x \operatorname{tg} x = D_x(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}) = \frac{\cos x(\operatorname{sen} x)' - \operatorname{sen} x(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x.\cos x + \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec^2 x$$

d), e), f) Su demostración dejamos como ejercicio.

OBSERVACIÓN.- Si y = sen u, u = f(x) funciones derivables en general

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} u \\ u = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{du} = \cos u \\ \dfrac{du}{dx} = f'(x) \end{cases}$$. Calculemos $\frac{dy}{dx}$ mediante la regla de la cadena



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \cos u.f'(x) = \cos(f(x)).f'(x)$$

por lo tanto: Sí $y = \operatorname{sen}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x(f(x)).f'(x)$

En forma similar se calcula la derivada de las demás funciones trigonométricas.

Corolario.- Si u = f(x) es una función derivable entonces:

a) Si y = sen (f(x)) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(f(x)).f'(x)$
b) Si y = cos (f(x)) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(f(x)).f'(x)$
c) Si y = tg (f(x)) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2(f(x)).f'(x)$
d) Si y = ctg (f(x)) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cos ec^2(f(x)).f'(x)$
e) Si y = sec (f(x)) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec(f(x))\operatorname{tg}(f(x)).f'(x)$
f) Si y = cosec (f(x)) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cos ecx(f(x))c\operatorname{tg}(f(x)f'(x)$

Ejemplos.- Hallar $\frac{dy}{dx}$ sí:

① $y = \operatorname{sen}(x^2 + e^x)$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + e^x)(x^2 + e^x) = (2x + e^x).\cos(x^2 + e^x)$$

② y = tg(senx + cosx)

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\operatorname{sen} x + \cos x).D_x(\operatorname{sen} x + \cos x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)\sec^2(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

③ $y = \cos(\operatorname{sen} x + x^2)$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x + x^2).D_x(\operatorname{sen} x + x^2) = -(\cos x + 2x).\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x + x^2)$$

④ $y = c\,\text{tg}(e^x + Lnx)$

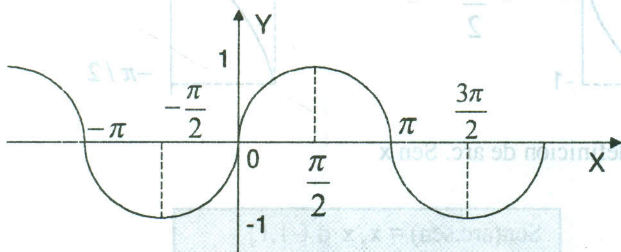
<u>Solución</u>

$$\frac{dy}{dx} = -\cos ec^2(e^x + Lnx)D_x(e^x + \ln x) = -(e^x + \frac{1}{x})\cos ec^2(e^x + \ln x)$$

4.13 DERIVACION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS.-

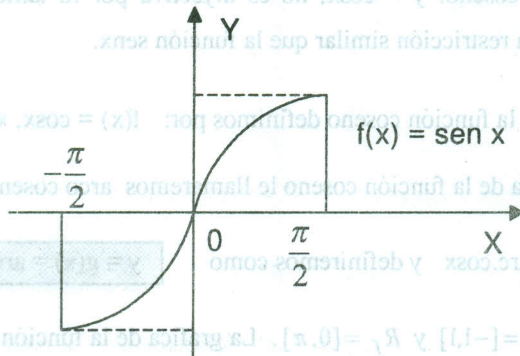
Antes de definir las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, daremos la definición de dichas funciones:

a) **Función Inversa del Seno: Arcoseno.-** La función seno: y = f(x) = senx, no es inyectiva, por lo tanto no tiene inversa



Pero si se observa el gráfico de la función f(x) = sen x en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se tiene que f(x) es estrictamente creciente.

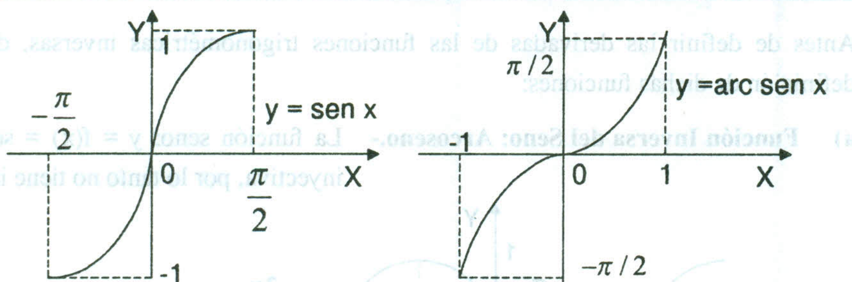
Por lo tanto a pesar que la función seno no tiene inversa, se concluye que para la función definida por f(x) = senx, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si tiene inversa:



A la inversa del seno le llamaremos arcoseno por lo tanto a la función arcoseno de x denotaremos por:

y = g(x) = arc.senx y definiremos por: **y = g(x) = arc.senx ⇒ x = sen y**

donde $D_g = [-1,1]$ y $R_g = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La gráfica de la función arco seno es:



De la definición de arc. Sen x

$$\text{Sen(arc.sen)} = x,\ x \in [-1,1]$$

$$\text{Arcsen(sen y)} = y,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

b) Función Inversa del Coseno: Arcocoseno.-

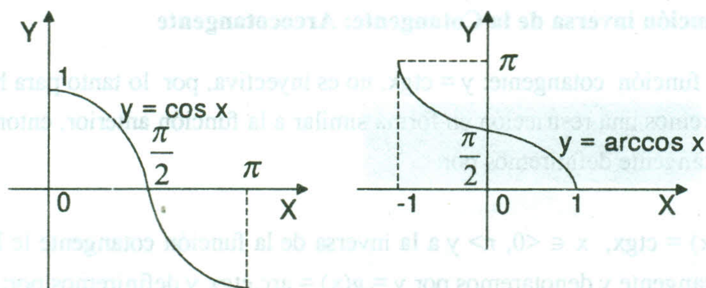
La función coseno: y = cosx, no es inyectiva por lo tanto para hallar su inversa haremos una restricción similar que la función senx.

Entonces a la función coseno definimos por: f(x) = cosx, x ∈ [0,π]

y a la inversa de la función coseno le llamaremos arco coseno y denotaremos por:

y = g(x) = arc.cosx y definiremos como **y = g(x) = arc.cosx ⇔ x = cos y**

donde: $D_f = [-1,1]$ y $R_f = [0, \pi]$. La gráfica de la función arco coseno es



De la definición del ar.cosx se tiene:

Cos(arc.cosx) = x, para x ∈ [-1,1]
Arc(cos y) = y, para y ∈[0,π]

c) Función Inversa de la Tangente: Arcotangente.-

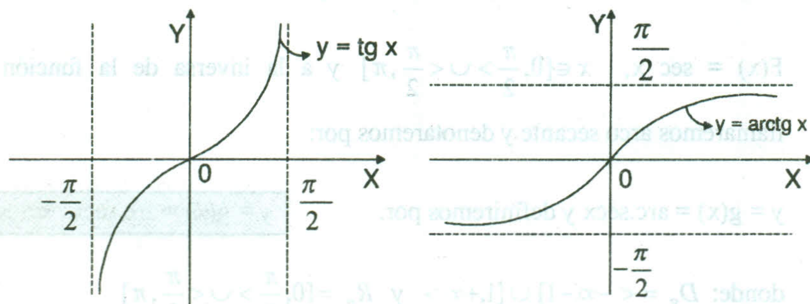
Arco tangente la función tangente: y = tgx, no es inyectiva, por lo tanto para hallar su inversa haremos una restricción similar a las funciones anteriores.

Entonces a la función tangente lo definiremos por:

$F(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in <-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>$ y a la inversa de la función tangente le llamaremos arco tangente y denotaremos por:

y = g(x) = arc.tgx definiremos por: **y = g(x) = arc.tgx ⟺ x = tgy**

donde $D_g = R$ y $R_f = <-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>$ cuyo gráfico de la función arco tangente es:



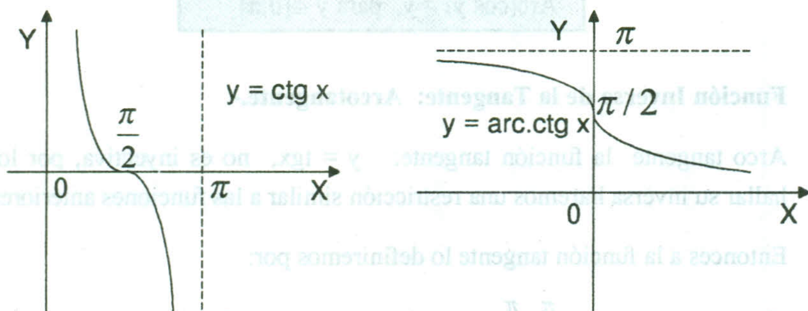
d) Función inversa de la Cotangente: Arcocotangente

La función cotangente: y = ctgx, no es inyectiva, por lo tanto para hallar su inversa, haremos una restricción en forma similar a la función anterior, entonces a la función cotangente definiremos por:

F(x) = ctgx, $x \in <0, \pi>$ y a la inversa de la función cotangente le llamaremos arco cotangente y denotaremos por y = g(x) = arc.ctgx y definiremos por:

$$y = g(x) = arc.tgx \Leftrightarrow x = ctgy$$

donde $D_g = R$ y $R_g =< 0, \pi >$. La gráfica de la función arco cotangente es:



e) Función Inversa de la Secante: Arcosecante

La función secante: y = sec x no es inyectiva , por lo tanto para hallar su inversa se hará una restricción en forma similar a las funciones anteriores.

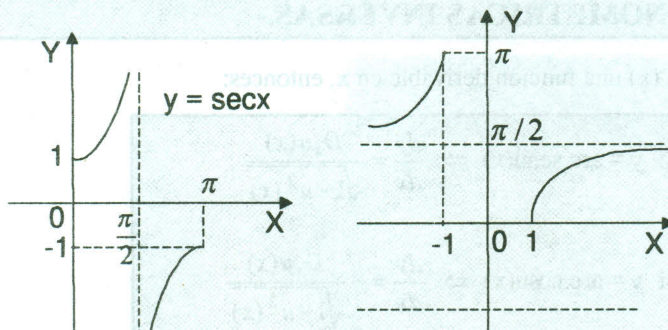
Entonces a la función secante definiremos por:

F(x) = sec x, $x \in [0, \frac{\pi}{2} > \cup < \frac{\pi}{2}, \pi]$ y a la inversa de la función secante le llamaremos arco secante y denotaremos por:

y = g(x) = arc.secx y definiremos por: $y = g(x) = arc.secx \Leftrightarrow x = sec\, y$

donde: $D_g = < -\infty, -1] \cup [1, +\infty >$ y $R_g = [0, \frac{\pi}{2} > \cup < \frac{\pi}{2}, \pi]$

La gráfica de la función arco secante es:



f) Función Inversa de la Cosecante: Arcocosecante

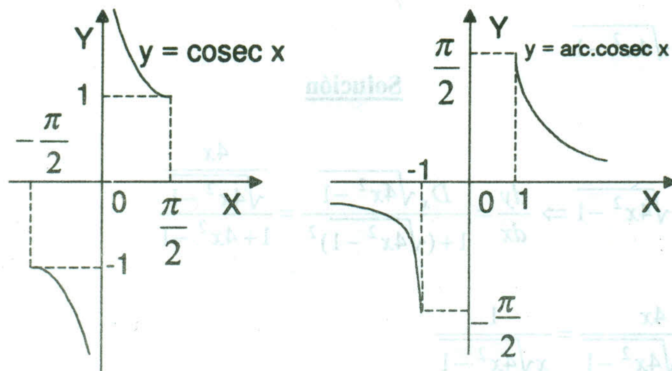
La función cosecante: y = cosecx, no es inyectiva, por lo tanto para hallar su inversa, haremos una restricción en forma similar a la función secante.

Entonces a la función cosecante definiremos por: F(x) = cosecx, $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0> \cup <0, \frac{\pi}{2}]$ y a la inversa de la función cosecante le llamaremos arco cosecante y denotaremos por y = g(x) = arc.cosecx y definiremos por:

$$y = g(x) = \text{arc.cosec}x \Leftrightarrow x = \text{cosec } y$$

Donde $D_g = <-\infty - 1] \cup [1, \infty>$ y $R_g = [-\frac{\pi}{2}, 0> \cup <0, \frac{\pi}{2}>$

La gráfica de la función arco cosecante es:



4.14 REGLA DE DERIVACION PARA LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS.-

Sea u = u (x) una función derivable en x, entonces:

① Si $y = arc.senu(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x u(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

② Si $y = arc.cosu(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{D_x u(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

③ Si $y = arc.tgu(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x u(x)}{1+u^2(x)}$

④ Si $y = arc.ctgu(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{D_x u(x)}{1+u^2(x)}$

⑤ Si $y = arc.secu(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x u(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x)-1}}$

⑥ Si $y = arc.cosecu(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-D_x u(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x)-1}}$

Ejemplos.- Hallar $\frac{dy}{dx}$ sí:

① $y = arc.\text{tg}\sqrt{4x^2-1}$

Solución

$$y = arc.\text{tg}\sqrt{4x^2-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x\sqrt{4x^2-1}}{1+(\sqrt{4x^2-1})^2} = \frac{\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}}{1+4x^2-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{4x^2\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$$

(2) $y = \text{arc.sen } e^x + arc.\text{sen}\sqrt{1-e^{2x}}$

Solución

$y = arc.\text{sen}\, e^x + arc.\text{sen}\sqrt{1-e^{2x}}$, **derivando se tiene:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_x e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} + \frac{D_x\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-e^{2x}})^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \frac{\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}}{\sqrt{1-1+e^{2x}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \frac{e^{2x}}{e^x\sqrt{1-e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

(3) $y = \text{arc.sen }(\text{Ln}x)$

Solución

$$y = \text{arc.sen }(\text{Ln}x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x Lnx}{\sqrt{1-Ln^2 x}} = \frac{1}{x\sqrt{1-Ln^2 x}}$$

(4) $y = arc.\text{tg}(\frac{x\,\text{sen}\,\alpha}{1-x\cos\alpha})$

Solución

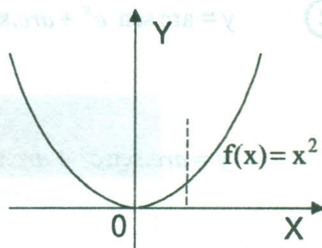
$$y = arc.\text{tg}(\frac{x\,\text{sen}\,\alpha}{1-x\cos\alpha}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x(\frac{x\,\text{sen}\,\alpha}{1-x\cos\alpha})}{1+(\frac{x\,\text{sen}\,\alpha}{1-x\cos\alpha})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{(1-x\cos\alpha)(x\,\text{sen}\,\alpha)' - (x\,\text{sen}\,\alpha)(1-x\cos\alpha)'}{(1-x\cos\alpha)^2}}{\frac{(1-x\cos\alpha)^2 + x^2\,\text{sen}^2\,\alpha}{(1-x\cos\alpha)^2}} = \frac{(1-x\cos\alpha)sen\alpha + xsen\alpha\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha + x^2\cos^2\alpha + x^2 sen^2\alpha}$$

$$= \frac{sen\alpha}{1-2x\cos\alpha + x^2} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1-2x\cos\alpha + x^2}$$

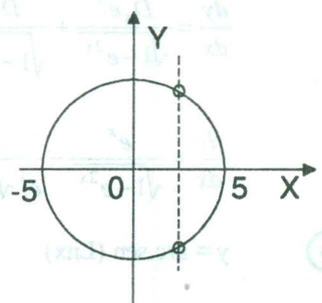
4.15 DERIVACION IMPLICITA.-

A las funciones y = f(x) definidas en un intervalo se denominan funciones explícitas; por ejemplo: la función $y = f(x) = x^2$, a las ecuaciones de las variables x e y denotaremos por: E(x,y) = 0.

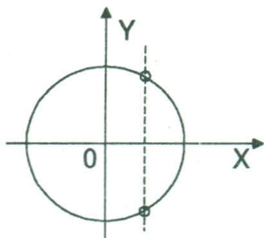


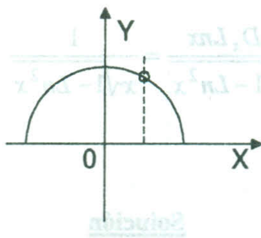
Por ejemplo:

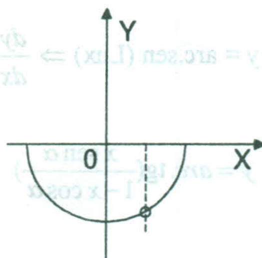
$E(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ es decir, $x^2 + y^2 = 25$, que nos representa a una circunferencia.



La ecuación $x^2 + y^2 = 25$, no es una función definida en forma explícita, pero $x^2 + y^2 = 25$ entonces $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$







Es decir de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, que no es una función definida en forma explícita; se puede obtener dos ecuaciones, cada una definida en forma explícita; por lo tanto una ecuación de dos variables E(x, y) = 0, de donde se obtiene dos o más funciones en forma explícita se denomina función implícita.

En la ecuación E(x,y) = 0 muchas veces no es fácil despejar la variable y, por ejemplo:

$$y^7 - 3y^5 + 7y^2 - y - x\cos x = 0 \qquad \textbf{... (1)}$$

entonces para calcular su derivada se hace de la siguiente manera: como E(x, y)=0 se verifica para y = f(x) entonces remplazando en la ecuación (1) se tiene:

$f^7(x)-3f^5(x)+7f^2(x)-f(x)+x\cos x=0$ ahora derivamos aplicando la regla de la cadena: $7f^6(x).f'(x)-15f^4(x).f'(x)+14f(x).f'(x)-f'(x)+\cos x-x\operatorname{sen}x=0$

como y = f(x) $\Rightarrow$ $y'=f'(x)$, entonces $7y^6.y'-15y^4.y'+14y.y'-y'+\cos x-x\operatorname{sen}x=0$

$(7y^6-15y^4+14y-1)y'=x\operatorname{sen}x-\cos x$ de donde $y'=\dfrac{x\operatorname{sen}x-\cos x}{7y^6-15y^4+14y-1}$

a este proceso de derivar se denomina derivación implícita.

Ejemplo: Hallar $y'=\dfrac{dy}{dx}$ sí

(1) $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$

Solución

$x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0 \Rightarrow 3x^2+2axy+ax^2y'+by^2+2bxy.y'+3y^2y'=0$

$3x^2+2axy+by^2+(ax^2+2bxy+3y^2)y'=0$ $\therefore\ y'=\dfrac{3x^2+2by^2+2axy}{ax^2+2bxy+3y^2}$

(2) x sen y – cos y + cos 2y = 0

Solución

$x\operatorname{sen}y-\cos y+\cos 2y=0 \Rightarrow \operatorname{sen}y+x\cos y.y'+\operatorname{sen}y.y'-2\operatorname{sen}2y.y'$

$(x\cos y+\operatorname{sen}y-2\operatorname{sen}2y)y'=-\operatorname{sen}y$ $\therefore\ y'=-\dfrac{\operatorname{sen}y}{x\cos y+\operatorname{sen}y-2\operatorname{sen}2y}$

OBSERVACION.- La derivada $(\dfrac{dy}{dx})$ de la función implícita E(x,y) = 0, se calcula derivando término a término, considerando a y = f(x) como una función de x, y de esta ecuación despejamos $y'=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Una forma más práctica para calcular $y'=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ de la ecuación E(x,y)=0, es aplicando la fórmula siguiente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-E'_x(x,y)}{E'_y(x,y)}$$

Donde $E'_x x(x,y)$ es la derivada de E(x, y) = 0 con respecto a "x" donde a la variable "y" se le considera como constante y $E'y(x,y)$ es la derivada de E(x, y) = 0 con respecto a "y", y la variable "x" se le considera como constante.

Ejemplo.- Hallar $y'=\frac{dy}{dx}$ sí

① $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$

Solución

Sea $E(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2+y^3$

$$\Rightarrow \quad E'_x(x,y)=3x^2+2axy+by^2 \quad \text{y} \quad E'_y(x,y)=ax^2+2bxy+3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{E'_x(x,y)}{E'_y(x,y)}=-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2} \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$$

4.16 DERIVADA DE LA FUNCION DE LA FORMA $y=(f(x))^{g(x)}$.-

Para calcular la derivada de la función $y=(f(x))^{g(x)}$, primero se toma logaritmo en ambos miembros, es decir:

$Lny=Ln(f(x))^{g(x)}=g(x).Ln(f(x))$. ahora derivamos implícitamente:

$\frac{y'}{y}=g'(x)Ln(f(x))+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}$, despejando y'

$$y'=y[g'(x).Ln(f(x))+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}]$$

$$y'=(f(x))^{g(x)}[g'(x).Ln(f(x))+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}]$$

$$\frac{dy}{dx}=(f(x))^{g(x)-1}f'(x)g(x)+(f(x))^{g(x)}g'(x)Ln(f(x))$$

Ejemplo.- Hallar $\frac{dy}{dx}$ sí $y=x^{\operatorname{sen} x}$

Solución

Tomando logaritmo a $y=x^{\operatorname{sen} x}$ se tiene: $Lny=Lnx^{\operatorname{sen} x}=\operatorname{sen} x.Lnx$

derivando se tiene: $\frac{y'}{y}=\cos x.Lnx+\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ de donde $y'=y(\cos x.\ln x+\frac{\operatorname{sen} x}{x})$

$$\frac{dy}{dx}=x^{\operatorname{sen} x}(\cos x.\ln x+\frac{\operatorname{sen} x}{x})$$

4.17 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

I Hallar $\frac{dy}{dx}$ sí

(1) $y=\frac{\arccos x}{x^2}+\frac{1}{2}\ln(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}})$

Solución

A la función expresaremos en la forma:

$y=\frac{\arccos x}{x^2}+\frac{1}{2}[\ln(1-\sqrt{1-x^2})-\ln(1+\sqrt{1-x^2})]$, derivando aplicando la regla

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2D_x\arccos x-(\arccos x)D_x x^2}{x^4}+\frac{1}{2}[\frac{D_x(1-\sqrt{1-x^2})}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{D_x(1+\sqrt{1-x^2})}{1+\sqrt{1-x^2}}]$$

$$=\frac{-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}-2x\arccos x}{x^4}+\frac{1}{2}[\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}}]$$

$$= -\frac{(x^2 + 2x\sqrt{1-x^2}\ \text{arccos}\, x)}{x^4\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\,(1-\sqrt{1-x^2})} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}\right]$$

$$= -\frac{x + 2\sqrt{1-x^2}\ \text{arccos}\, x}{x^3\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{1+\sqrt{1-x^2}+1-\sqrt{1-x^2}}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}\right]$$

$$= -\frac{x + 2\sqrt{1-x^2}\ \text{arccos}\, x}{x^3\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - x - 2\sqrt{1-x^2}\ \text{arccos}\, x}{x^3\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_x(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x^2-1}(x)' - x(\sqrt{x^2-1})'}{(\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})} - \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)} = \frac{x^2}{(x^2-1)^{3/2}}$$

de donde $\quad \therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{(x^2-1)^{3/2}}$

(3) $y = \dfrac{1}{20}\,\text{sen}(5x^2) - \dfrac{1}{4}\,\text{sen}\, x^2$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{20}\cos(5x^2)D_x(5x^2) - \frac{1}{4}\cos(x^2)D_x(x^2) = \frac{10x}{20}\cos 5x^2 - \frac{2x}{4}\cos x^2 = \frac{x}{2}\cos 5x^2 - \frac{x}{2}\cos x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}(\cos 5x^2 - \cos x^2)$$

(4) $y = \ln(\frac{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}}) + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{sen} x}$

Solución

Antes de derivar, a la función expresaremos así:

$$y = \ln(1+\sqrt{\operatorname{sen} x}) - \ln(1-\sqrt{\operatorname{sen} x}) + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{sen} x}$$

Ahora derivando mediante las reglas establecidas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_x(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})}{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \frac{D_x(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + 2\frac{D_x\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1+(\sqrt{\operatorname{sen} x})^2} = \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1+\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}(\frac{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}+1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})}) + \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}(1-\operatorname{sen} x)} + \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}(\frac{1+\operatorname{sen} x+1-\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)})$$

$$= \frac{2\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}(1-\operatorname{sen}^2 x)} = \frac{2\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}(\cos^2 x)} = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{sen} x}.\cos x}$$

(5) $y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

Solución

Derivamos mediante la regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)D_x(\operatorname{sen} x-\cos x) - (\operatorname{sen} x-\cos x)D_x(\operatorname{sen} x+\cos x)}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)(\cos x+\operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x-\cos x)(\cos x-\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x-\cos x)^2}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{2(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$$

(6) $y = (1 + Ln(\operatorname{sen} x))^n$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = n(1 + Ln(\operatorname{sen} x))^{n-1} D_x(1 + Ln(\operatorname{sen} x)) = n(1 + Ln(\operatorname{sen} x))^{n-1} \frac{D_x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{n \cos x}{\operatorname{sen} x}(1 + Ln(\operatorname{sen} x))^{n-1} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = nc\operatorname{tg} x(1 + Ln(\operatorname{sen} x))^{n-1}$$

(7) $y = (\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 2(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}) D_x(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}) = 2(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})(\frac{1}{2}(\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}))$$

$$= (\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}) = \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = -\cos x \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -\cos x$$

(8) $y = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

Solución

A la función $y = f(x)\dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$. Expresamos en la forma siguiente:

$$y = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}$$

$$y = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{(x+1) - (x-1)} = \frac{x + 1 - 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} + x - 1}{x + 1 - x + 1} = \frac{2x - 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

Ahora calculamos la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir: $\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(9) $y = x^6(1-\cos 2x)^2$

Solución

Aplicando la regla del producto se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = x^6 D_x(1-\cos 2x)^2 + (1-\cos 2x)^2 D_x x^6 = x^6(2\operatorname{sen} 2x)2(1-\cos 2x) + 6x^5(1-\cos 2x)^2$$

$$= 2x^5(1-\cos 2x)(2x\operatorname{sen} 2x + 3(1-\cos 2x))$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 8x^5(2x\cos x + 3\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}^3 x$$

(10) $y = Ln\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$

Solución

A la función dada la expresaremos así: $y = \frac{1}{2}[Ln(1-\operatorname{sen} x) - Ln(1+\operatorname{sen} x)]$

ahora derivando de acuerdo a las reglas establecidas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[\frac{D_x(1-\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen} x} - \frac{D_x(1+\operatorname{sen} x)}{1+\operatorname{sen} x}] = \frac{1}{2}[\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}]$$

$$= -\frac{\cos x}{2}(\frac{1+\operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}) = -\frac{\cos x}{2}.\frac{2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\sec x$$

(11) $y = \ln(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x})$

Solución

A la función dada expresaremos en la forma:

$$y = \ln(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}) = \ln(\sqrt{x^2+a^2}+x) - \ln(\sqrt{x^2+a^2}-x)$$

ahora derivando mediante la regla establecida:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{D_x(\sqrt{x^2+a^2}+x)}{\sqrt{x^2+a^2}+x}-\frac{D_x(\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+1}{\sqrt{x^2+a^2}+x}-\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-1}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}(\sqrt{x^2+a^2}+x)}-\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}(\sqrt{x^2+a^2}-x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

(12) $y=\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x})$

Solución

Aplicando la regla de derivación del arco tangente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{D_x(\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x})}{1+(\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x})^2}=\frac{\frac{(\operatorname{sen}x-\cos x)(\operatorname{sen}x+\cos x)'-(\operatorname{sen}x+\cos x)(\operatorname{sen}x-\cos x)'}{(\operatorname{sen}x-\cos x)^2}}{\frac{(\operatorname{sen}x-\cos x)^2+(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{(\operatorname{sen}x-\cos x)^2}}$$

$$=\frac{(\operatorname{sen}x-\cos x)(\cos x-\operatorname{sen}x)-(\operatorname{sen}x+\cos x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x-2\operatorname{sen}x\cos x+\operatorname{sen}^2x+\cos^2+2\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$=\frac{-(\operatorname{sen}x-\cos x)^2-(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x-2\operatorname{sen}x\cos x+\operatorname{sen}^2x+\cos^2x+2\operatorname{sen}x\cos x}{2}=-\frac{2}{2}=-1.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-1$$

(13) $y=\sqrt{\operatorname{arctg}x}-(\operatorname{arcsen}x)^3$

Solución

Aplicando la regla de la potenciación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{D_x \operatorname{arctg} x}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}}-3(\operatorname{arcsen} x)^2 D_x \operatorname{arcsen} x=\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}(\operatorname{arcsen} x)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}-\frac{3(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(14) $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}Ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

Solución

Derivando mediante los criterios establecidos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}D_x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2}D_x x+\frac{a^2}{2}\frac{D_x(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\left[\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\right]$$

$$=\frac{2x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}\,(x+\sqrt{x^2+a^2})}\right)=\frac{2x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{2(x^2+a^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2} \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+a^2}$$

(15) $y=\operatorname{tg}(e^{Ln(arc.\operatorname{tg} x^{1/3})})$

Solución

Antes de derivar aplicamos la propiedad: $e^{\ln a}=a$

$e^{Ln(arc.\operatorname{tg} x^{1/3})}=arc.\operatorname{tg} x^{1/3}$ de donde $y=\operatorname{tg}(e^{Ln(arc.\operatorname{tg} x^{1/3})})=\operatorname{tg}(arc.\operatorname{tg} x^{1/3})=x^{1/3}$

Ahora derivando se tiene: $\frac{dy}{dx}=\frac{x^{-2/3}}{3}$

(16) $y = \text{arctg}(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\ \text{sen}\, x}{b+a.\cos x})$

Solución

Derivando mediante la regla del arco tangente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_x \frac{\sqrt{a-b^2}\ \text{sen}\, x}{b+a.\cos x}}{1+(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\ \text{sen}\, x}{b+a.\cos x})^2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}\ \frac{(b+a\cos x)D_x \text{sen}\, x - \text{sen}\, x D_x(b+a\cos x)}{(b+a.\cos x)^2}}{\frac{(b+a\cos x)^2+(a^2-b^2)\text{sen}^2 x}{(b+a\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}[(b+a\cos x)\cos x + a\,\text{sen}^2 x]}{b^2+2ab\cos x + a^2\cos^2 x + a^2\text{sen}^2 x - b^2\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}(b\cos x + a\cos^2 x + a\,\text{sen}^2 x)}{b^2+2ab\cos x + a^2\cos^2 x + a^2 - a^2\cos^2 x - b^2(1-\cos^2 x)}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}(a+b.\cos x)}{b^2+\cos^2 x + 2ab\cos x + a^2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}(a+b\cos x)}{(a+b\cos x)^2} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b.\cos x}$$

II.

(1) Si $y = f(z)$, $z = g(x)$, calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$

Solución

Para calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ aplicaremos la regla de la cadena



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} \qquad ...(1)$$

Ahora calculemos la derivada de la ecuación (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}) = \frac{dy}{dz}.\frac{d}{dx}(\frac{dz}{dx}) + \frac{dz}{dx}.\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dz})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dz}.\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}.\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dz}) \quad ...(2)$$

$$\frac{dy}{dz}\to z\to x,\quad \frac{dy}{dx}(\frac{dy}{dz})=\frac{d}{dz}(\frac{dy}{dz})\frac{dz}{dx}=\frac{d^2y}{dz^2}.\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dz})=\frac{d^2y}{dz^2}.\frac{dz}{dx} \quad ...(3)$$

reemplazando (3) en (2) se tiene: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dz}.\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2y}{dz^2}.(\frac{dz}{dx})^2$ ...(4)

como $\begin{matrix} y=f(z) \\ z=g(x)\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\frac{dy}{dz}=f'(z) \\ \frac{dz}{dx}=g'(x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{d^2y}{dz^2}=f''(z) \\ \frac{d^2z}{dx^2}=g''(x)\end{cases}$ ...(5)

Ahora reemplazando (5) en (4) se tiene: $\frac{d^2y}{dx^2}=f'(z).g''(x)+f''(z).(g'(x))^2$

(2) Sí $f'(x)=\operatorname{sen}x^2$ e $y=f(\frac{(2x-1)}{x+1})$. Calcular $\frac{dy}{dx}$

Solución

Sea $z=\frac{2x-1}{x+1}$, y = f(z),



$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$ donde $\begin{cases}y=f(z) \\ z=\frac{2x-1}{x+1}\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\frac{dy}{dz}=f'(z) \\ \frac{dz}{dx}=\frac{3}{(x+1)^2}\end{matrix}$

$$\frac{dy}{dx}=f'(z)\frac{dz}{dx}=\operatorname{sen}z^2.\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}.\operatorname{sen}(\frac{2x-1}{x+1})^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{(x+1)^2}.\text{sen}(\frac{2x-1}{x+1})^2$$

(3) Hallar $f'(x)$ sí $f(x)=\text{sen}^3(\text{sen}^2(\text{sen}\,x))$

Solución

Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$f(x)=\text{sen}^3(\text{sen}^2(\text{sen}\,x)) \Rightarrow f'(x)=3\,\text{sen}^2(\text{sen}^2(\text{sen}\,x)).D_x\,\text{sen}(\text{sen}^2(\text{sen}\,x))$$

$$f'(x)=3\,\text{sen}^2(\text{sen}^2(\text{sen}\,x))\cos(\text{sen}^2(\text{sen}\,x)).D_x\,\text{sen}^2(\text{sen}\,x) \qquad \textbf{...(1)}$$

$$D_x\,\text{sen}^2(\text{sen}\,x)=2\,\text{sen}(\text{sen}\,x)D_x\,\text{sen}(\text{sen}\,x)=2\,\text{sen}(\text{sen}\,x).\cos(\text{sen}\,x)\cos x$$

$$D_x\,\text{sen}^2(\text{sen}\,x)=2\,\text{sen}(\text{sen}\,x)\cos(\text{sen}\,x)\cos x=\text{sen(2senx)cosx} \qquad \textbf{...(2)}$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$f'(x)=3\,\text{sen}^2(\text{sen}^2(\text{sen}\,x)).\cos(\text{sen}^2(\text{sen}\,x)).\text{sen}(2\,\text{sen}\,x)\cos x$$

(4) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2\,\text{sen}\frac{1}{x}+x, & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$. Demostrar que $f'(0)=1$

Solución

Por definición de derivada se tiene: $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\,\text{sen}\frac{1}{h}+h}{h}=\lim_{h\to 0}(h\,\text{sen}\frac{1}{h})+1=0+1=1 \qquad \therefore\ f'(0)=1$$

NOTA.- $\forall\ h\neq 0,\ -1\leq\text{sen}\frac{1}{h}\leq 1,\ \ -h\leq h\,\text{sen}\frac{1}{h}\leq h$

$$\lim_{h\to 0}(-h)\leq\lim_{h\to 0}h\,\text{sen}\frac{1}{h}\leq\lim_{h\to 0}(h);\ \text{de donde}\ \therefore\ \lim_{h\to 0}(-h)\text{sen}\frac{1}{h}=0$$

(5) Sea $f(x)=\begin{cases} x^{5/2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$. Hallar $f'(0)$

Solución

Por definición de derivada se tiene:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{5/2}\operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h^{3/2}\operatorname{sen}\frac{1}{h}=0$$

puesto que: $\quad -1\leq \operatorname{sen}\frac{1}{h}\leq 1 \Rightarrow -h^{3/2}\leq h^{3/2}\operatorname{sen}\frac{1}{h}\leq h^{3/2}$

$$\lim_{h\to 0}(-h^{3/2})\leq \lim_{h\to 0}h^{3/2}\operatorname{sen}\frac{1}{h}\leq \lim_{h\to 0}h^{3/2}$$

$$0\leq \lim_{h\to 0}h^{3/2}\operatorname{sen}\frac{1}{h}\leq 0$$

luego: $\lim_{h\to 0}h^{3/2}\operatorname{sen}\frac{1}{h}=0$, por lo tanto: $\quad f'(0)=0$

(6) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+b \ , & x\leq 1 \\ |\frac{1}{x}| \ , & x>1 \end{cases}$. Hallar los valores de a y b de tal forma que $f'(x)$ exista

Solución

Como para x > 1, se tiene |x| = x entonces: $\quad f(x)=\begin{cases} ax^2+b \ , & x\leq 1 \\ \frac{1}{x} \ , & x>1 \end{cases}$

mediante derivadas laterales en x = 1 se tiene

$$\begin{cases} f'_{-}(1)=2ax\,|_{x=1}=2a \\ f'_{+}(1)=\frac{-1}{x^2}\,|_{x=1}=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad 2a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

además de ser continua en x = 1 entonces: $\lim_{h\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 1^+} f(x) \Rightarrow a + b = 1$

como $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + b = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$ por lo tanto: $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{2}$

(7) Hallar A, B y C para que la función que se da, sea continua en –2 y derivable en 3

$$f(x) = \begin{cases} Ax + 5 & , \quad x < -2 \\ Bx^2 + cx & , \quad -2 \le x \le 3 \\ Ax^2 + Bx & , \quad x > 3 \end{cases}$$

Solución

Para que f sea continua en x = -2 se tiene: $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$

$\lim_{x\to -2^-} Ax + 5 = \lim_{x\to -2^+} Bx^2 + cx$

- 2A + 5 = 4B - 2C de donde 2A + 4B – 2C = 5 **...(1)**

Para que f sea derivable en x = 3 debe $\exists\ f'(3)$

$\exists\ f'(3) \Leftrightarrow f'_-(3) = f'_+(3)$

$2Bx + C'|_{x=3} = 2Ax + B|_{x=3} \Rightarrow$ 6B + C = 6A + B de donde 6A – 5B – C = 0 **...(2)**

como f es derivable en x = 3 ⇔ f es continua en x = 3, si f es continua en x = 3 entonces se tiene: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$ entonces $\lim_{x\to -3^-} Bx^2 + Cx = \lim_{x\to -3^+} Ax^2 + Bx$

9B + 3C = 9A + 3B de donde 9A - 6B – 3C = 0 ⇒ 3A – 2B – C = 0 **...(3)**

luego $\begin{cases} 2A + 4B - 2C = 5 \\ 6A - 5B - C = 0 \\ 3A - 2B - C = 0 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene: $A = \frac{5}{4} = B = C$

(8) Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - 4(x-1)^2 & si\ x \le 2 \\ x - 3 & si\ x > 2 \end{cases}$ probar que f es continua pero no derivable en x = 2

Solución

La función f es continua en x = 2 sí y solo sí $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ y además $2 \in D_f$

$\lim_{x\to 2^-} 3-4(x-1)^2 = \lim_{x\to 2^+} x-3 = -1$

Por lo tanto $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ y $2 \in D_f$

Luego f(x) es continua en x = 2, ahora probaremos que f(x) no es derivable en x = 2

En efecto: $\begin{cases} f_-^{|}(2) = -8(x-1)|_{x=2} = -8 \\ f_+^{|}(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f_-^{|}(2) \neq f_+^{|}(2)$

como $f_-^{|}(2) \neq f_+^{|}(2) \Rightarrow \nexists\ f'(2)$ por lo tanto la función f(x) no es derivable en x = 2

(9) Hallar los valores de a, b, c para que la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{|x|^3} & ,|x| \geq 2 \\ ax^2+bx+c & ,|x| < 2 \end{cases}$. Sea continua en x = 2, y derivable en x = -2

Solución

$|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2 \lor x \leq -2$ además $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

a la función f(x) lo expresaremos en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{-x^3} & , x \leq -2 \\ ax^2+bx+c & , -2 < x < 2 \\ \dfrac{8}{x^3} & , x \geq 2 \end{cases}$$

la función f(x) es continua en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$\lim_{x\to 2^+} \dfrac{8}{x^3} = \lim_{x\to 2^-} ax^2+bx+c$, de donde 1 = 4a + 2b + c **...(1)**

la función f(x) es derivable en x = -2 si $\exists\ f'(-2)$ y $\exists\ f'(-2) \Leftrightarrow f_-^1(-2) = f_+^{'}(-2)$

$\frac{24}{x^4}|_{x=-2} = 2ax + b|_{x=-2}$ de donde $-8a + 2b = 3$ ...(2)

como f(x) es derivable en x = -2 $\Rightarrow$ f(x) es continua en x = -2, si:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $-2 \in D_f$

$\lim\limits_{x\to -2^-} -\frac{8}{x^3} = \lim\limits_{x\to -2^+} ax^2 + bx + c$ entonces $1 = 4a - 2b + c$ ...(3)

luego se tiene: $\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ -8a+2b \quad =3 \\ 4a-2b+c=1 \end{cases}$ resolviendo el sistema se tiene: $a = -\frac{3}{8}$, b = 0, $c = \frac{5}{2}$

(10) Si la función f está definida por : $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 4x^2, & x < -\frac{1}{2} \\ bx - 3 & , x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

Hallar los valores de a y b para que f sea derivable en todo R

Solución

La función f(x) es derivable para $x < -\frac{1}{2}$ y para $x > -\frac{1}{2}$ ahora veremos si es derivable en $x = -\frac{1}{2}$, por lo tanto f(x) es derivable en $x = -\frac{1}{2}$ si $\exists f'(-\frac{1}{2})$

$\exists f'(\frac{-1}{2}) \Rightarrow f_-^{'}(\frac{-1}{2}) = f_+^{'}(-\frac{1}{2})$ entonces $(3ax^2 + 8x)|_{x=-\frac{1}{2}} = b$

al evaluar se tiene: $3a - 4b = 16$ ...(1)

si f(x) es derivable en $x = -\frac{1}{2}$, luego f(x) es continua en $x = -\frac{1}{2}$ si $\lim\limits_{x\to -1/2} f(x) = f(-\frac{1}{2})$

$\exists \lim\limits_{x\to -1/2} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1/2^2} f(x) = \lim\limits_{x\to -1/2^-} f(x)$

$$\lim_{x\to -1/2^-}(ax^3+4x^2)=\lim_{x\to -1/2^+}(bx-3)$$

$$-\frac{a}{8}+1-\frac{b}{2}-3 \Rightarrow \text{ - a + 8 = - 46 – 24 } \Rightarrow \boxed{a-4b=32} \qquad \ldots (2)$$

luego se tiene: $\begin{cases} 3a-4b=16 \\ a-\ 4b=32 \end{cases}$, de donde $2a = -16 \Rightarrow a = -8$

Si $a = -8 \Rightarrow b=\frac{a-32}{4}=\frac{-8-32}{4}=-10$. Por lo tanto b = -10

La respuesta es: a = -8 y b = -10

(11) Calcular A y B para que la derivadas de: $f(x)=\frac{Ax+B}{\sqrt{4-x}}$ sea $f'(x)=\frac{2x}{(4-x)^{3/2}}$

Solución

$f(x)=\frac{Ax+B}{\sqrt{4-x}}$, derivamos mediante la regla del cociente

$$f'(x)=\frac{\sqrt{4-x}D_x(Ax+B)-(Ax+B)D_x\sqrt{4-x}}{(\sqrt{4-x})^2}=\frac{A\sqrt{4-x}+\dfrac{Ax+B}{2\sqrt{4-x}}}{4-x}=\frac{2A(4-x)+Ax+B}{2(4-x)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{-Ax+8A+B}{2(4-x)^{3/2}}=\frac{2x}{(4-x)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{-Ax+8A+B}{2}=2x$$

-Ax + 8A + B = 4x, ahora por identidad se tiene: $\begin{cases} -A=4 \\ 8A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=-4 \\ B=32 \end{matrix}$

(12) Hallar $f'(0)$ si $f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x-6}{x^2-2x-3}$

Solución

Calculando la derivada de la función f(x) por medio de la regla del cociente:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+2x-6}{x^2-2x-3}=x-1+\frac{3x-9}{x^2-2x-3}$$

$$f'(x)=1+\frac{3(x^2-2x-3)-(3x-9)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$f'(x)=1+\frac{18x-3x^2-27}{(x^2-2x-3)^2} \Rightarrow f'(0)=1+\frac{0-27}{(0-3)^2}=1-3=-2$$

luego si: $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+2x-6}{(x^2-2x-3)^2} \Rightarrow f'(0)=-2$

(13) Si $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}^3 3x+\sqrt{1+2x^3}}$, Hallar $f'(0)=0$

Solución

Como se conoce que: Si $y=\sqrt{u(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{D_x U(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$f'(x)=\frac{D_x(\operatorname{tg}^3 3x+\sqrt{1+2x^3})}{2\sqrt{\operatorname{tg}^3 3x+\sqrt{1+2x^3}}}=\frac{9\operatorname{tg}^2 3x\sec^2 3x+\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+2x^3}}}{2\sqrt{\operatorname{tg}^3 3x+\sqrt{1+2x^3}}}$$

$$f'(0)=\frac{0+0}{2\sqrt{0+\sqrt{1+0}}}=\frac{0}{2}=0 \qquad \therefore f'(0)=0$$

(14) Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si $y=\dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x^3}{1+\cos^3 x^2}$

Solución

Aplicando la regla del cociente se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cos^3 x^2)D_x(1+\operatorname{sen}^2 x^3)-(1+\operatorname{sen} 2x^3)D_x(1+\cos^3 x^2)}{(1+\cos^3 x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 \operatorname{sen} x^3 \cos x^3 (1+\cos^3 x^2) + 6x \cos^2 x^2 \operatorname{sen} x^2 (1+\operatorname{sen}^2 x^3)}{(1+\cos^3 x^2)^2}$$

(15) Dada la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x+a} & , si \ x<1 \\ x^3+bx^2-5x+3 & , si \ 1 \le x \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Hallar el valor de a y b para que f sea diferenciable en $<-\infty, \frac{3}{2}]$

Solución

La función $f_1(x) = \frac{x^2+x+1}{x+a}$ y $f_2(x) = x^3+bx^2-5x+3$ son diferenciables en sus dominios respectivos como f debe ser diferenciable en x = 1 entonces: debe $\exists \ f'(1)$ entonces $f'_-(1) = f'_+(1)$, donde:

$$f'_-(1) = \frac{x^2+2ax+a-1}{(x+a)^2}\Big|_{x=1} = \frac{3a}{(1+a)^2}$$

$$f'_+(1) = (3x^2+2bx-5)\Big|_{x=1} = 2b-2$$

como $f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow \frac{3a}{(a+1)^2} = 2b-2$ **...(1)**

si f es diferenciable en x = 1 $\Rightarrow$ f es continua en x = 1, la función f es continua en x = 1 $\Leftrightarrow \ \exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$$\exists \lim_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x+a} = \lim\limits_{x\to 1^+} x^3+bx^2-5x+3$, de donde $\frac{3}{1+a} = b-1$ **...(2)**

luego $\frac{3a}{(a+1)^2} = 2b-2$ y $\frac{3}{1+a} = b-1$

de donde $\dfrac{3a}{(a+1)^2}=\dfrac{6}{1+a} \Rightarrow \dfrac{a}{a+1}=2 \Rightarrow$ a = 2a + 2 entonces a = -2 y b = -2

(16) Hallar $f'(x)$, si $f(x)=\left[\left|\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right|\right]$

Solución

$$\frac{x^2+1}{x^2+2}=1-\frac{1}{x^2+2} \text{ (dividiendo)}$$

$$\left[\left|\frac{x^2+1}{x^2+2}\right|\right]=\left[\left|1-\frac{1}{x^2+2}\right|\right]=1+\left[\left|\frac{-1}{2+x^2}\right|\right] \text{ por propiedad}$$

como $\forall$ x $\in$ R, $x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+2 \ge 2 > 0$ invirtiendo

$$0<\frac{1}{x^2+2}\le\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\le-\frac{1}{x^2+2}<0$$

sumando $1-\dfrac{1}{2}\le 1-\dfrac{1}{x^2+2}<1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\le-\dfrac{x^2+1}{x^2+2}<1$, de donde:

$$\left[\left|\frac{x^2+1}{x^2+2}\right|\right]=0 \Rightarrow \text{f(x) = 0} \Rightarrow f'(x)=0,\ \forall\, x \in R$$

(17) Calcular $f'(x)$, si $f(x)=[|x|]+[|-x|]$

Solución

$$f(x)=[|x|]+[|-x|]=\begin{cases} 0\ , & si\, x \in Z \\ -1, & si\, x \notin Z \end{cases}$$

por lo tanto f es diferenciable $\forall$ x $\notin$ Z entonces f(x) = -1 de donde $f'(x)$ = 0, $\forall$ x$\notin$Z

(18) Calcular $f'(x)$, si $f(x)=[|x+[|x|]|]$

Solución

Por la propiedad $[| x+n |] = [| x |] + n \Leftrightarrow n \in z$ como $[| x |] \in Z$

$\Rightarrow [| x + [| x |] |] = [| x |] + [| x |] = 2[| x |]$ luego $\forall\ x \in z,\ f(x) = 2[| x |]$

$\Rightarrow\ f'(x) = 0$

(19) Si $f(x) = \text{tg}(\frac{x \operatorname{sen} x}{2}) + \operatorname{sen}^2(x \cos 2x)$. Hallar $f'(\frac{\pi}{2})$

Solución

Calculando la derivada de acuerdo a las reglas establecidas:

$$f'(x) = \sec^2(\frac{x \operatorname{sen} x}{2}) D_x (\frac{x \operatorname{sen} x}{2}) + 2 \operatorname{sen}(x \cos 2x) D_x \operatorname{sen}(x \cos 2x)$$

$$= \sec^2(\frac{x \operatorname{sen} x}{2})(\frac{x \cos x + \operatorname{sen} x}{2}) + 2 \operatorname{sen}(x \cos 2x) .\cos(x\cos 2x)(\cos 2x - 2x \operatorname{sen} 2x)$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \sec^2 \frac{\pi}{4} (\frac{1}{2}) + \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} (\cos \pi - \pi \operatorname{sen} \pi) = 1 + 0 = 1 \qquad \therefore f'(\frac{\pi}{2}) = 1$$

(20) Si $x^3 + y^3 = 8xy$ Hallar $D_x y$

Solución

Derivando implícitamente se tiene: $3x^2 + 3y^2 D_x y = 8y + 8x D_x y$

donde despejamos $\quad D_x y = \frac{3x^2 - 8y}{8x - 3y^2}$

aplicando el otro criterio de: $\frac{dy}{dx} = -\frac{E_x(x,y)}{E_y(x,y)}$ se tiene:

sea $E(x,y) = x^3 + y^3 - 8xy \Rightarrow E_x(x,y) = 3x^2 - 8y$ y $E_y(x,y) = 3y^2 - 8x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{E_x(x,y)}{E_y(x,y)} = -\frac{3x^2 - 8y}{3y^2 - 8x} = \frac{3x^2 - 8y}{8x - 3y^2} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8y}{8x - 3y^2}$$

(21) Si $\operatorname{sen}(y-x^2)-Ln(y-x^2)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$. Hallar $\frac{dy}{dx}$

Solución

Sea $E(x,y)=\operatorname{sen}(y-x^2)-Ln(y-x^2)+2\sqrt{y-x^2}-3$, derivando

$$E_x(x,y)=\cos(y-x^2)(-2x)-\frac{-2x}{y-x^2}-\frac{2x}{\sqrt{y-x^2}}=-2x\cos(y-x^2)+\frac{2x}{y-x^2}-\frac{2x}{\sqrt{y-x^2}}$$

$$E_x(x,y)=\frac{-2x(y-x)^2\cos(y-x^2)+2x-2x\sqrt{y-x^2}}{y-x^2}$$

$$E_y(x,y)=\cos(y-x^2)-\frac{1}{y-x^2}+\frac{1}{\sqrt{y-x^2}}=\frac{(y-x^2)\cos(y-x^2)-1+\sqrt{y-x^2}}{y-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{E_x(x,y)}{E_y(x,y)}=-\left(\frac{\dfrac{-2x(y-x2)\cos(y-x^2)+2x-2x\sqrt{y-x^2}}{y-x^2}}{\dfrac{(y-x^2)\cos(y-x^2)-1+\sqrt{y-x^2}}{y-x^2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x[(y-x^2)\cos(y-x^2)-1+\sqrt{y-x^2}]}{(y-x^2)\cos(y-x^2)-1+\sqrt{y-x^2}}=2x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=2x$$

(22) Si $x^2\operatorname{sen}y+y^3\cos x-2x-3y+1=0$. Hallar $\frac{dy}{dx}$

Solución

Sea $E(x,y)=x^2\operatorname{sen}y+y^3\cos x-2x-3y+1$, derivando:

$E_x(x,y)=2x\operatorname{sen}y-y^3\operatorname{sen}x-2$ y $E_y(x,y)=x^2\cos y+3y^2\cos x-3$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{E_x(x,y)}{E_y(x,y)}=-\frac{2x\operatorname{sen}y-y^3\operatorname{sen}x-2}{x^2\cos y+3y^2\cos x-3}$$

(23) Hallar $y'=\frac{dy}{dx}$ si $tg(x^2+y^2)+e^{x^2}+e^{y^2}=0$ por dos métodos que se han establecido.

Solución

Aplicando el primer criterio se tiene: derivamos la ecuación $tg(x^2+y^2)+e^{x^2}+e^{y^2}=0$

$$\sec^2(x^2+y^2)D_x(x^2+y^2)+e^{x^2}D_x x^2+e^{y^2}D_x y^2=0$$

$$\sec^2(x^2+y^2)(2x+2y.y')+2xe^{x^2}+2y.y'e^{y^2}=0$$

$$2y\sec^2(x^2+y^2)y'+2ye^{y^2}y'=-(2x\sec^2(x^2+y^2)+2xe^{x^2})$$

$$2y(\sec^2(x^2+y^2e^{y^2})y'=-2x(\sec^2(x^2+y^2)+e^{x^2})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}(\frac{\sec^2(x^2+y^2)+e^{x^2}}{\sec^2(x^2+y^2)+e^{x^2}})$$

Ahora aplicando el segundo criterio se tiene:

Sea $E(x,y)=tg(x^2+y^2)+e^{x^2}+e^{y^2}$, derivando

$E_x(x,y)=2x\sec^2(x^2+y^2)+2xe^{x^2}$ y $E_y(x,y)=2x\sec^2(x^2+y^2)+2ye^{y^2}$

como $\frac{dy}{dx}=-\frac{E_x(x,y)}{E_y(x,y)}=-\frac{2x(\sec^2(x^2+y^2)+e^{x^2})}{2y(\sec^2(x^2+y^2)+e^{y^2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}(\frac{\sec^2(x^2+y^2)+e^{x^2}}{\sec^2(x^2+y^2)+e^{y^2}})$$

(24) Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y=(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$

Solución

Tomando logaritmo a ambos miembros: $\ln y=\ln(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}=\operatorname{sen} x\ln(x^2+1)$

ahora derivando implícitamente se tiene

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{sen} x.D_x Ln(x^2+1) + Ln(x^2+1)D_x \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad y' = y[\operatorname{sen} x.\frac{2x}{x^2+1} + \cos x.Ln(x^2+1)]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}(\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2+1} + \cos x.Ln(x^2+1))$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x - 1} 2x \operatorname{sen} x + (x^2+1))^{\operatorname{sen} x} \cos x Ln(x^2+1)$$

(25) Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y = x^{\cos x}$

Solución

Tomando logaritmo en la ecuación $y = x^{\cos x}$

$\ln y = \ln x^{\cos x} = \cos x \ln x$ derivando implícitamente

$\frac{y'}{y} = \cos x.D_x Lnx + Lnx.D_x \cos x$ de donde

$$y' = y[\frac{\cos x}{x} - \ln x.\operatorname{sen} x] = x^{\cos x}[\frac{\cos x}{x} - \ln x \operatorname{sen} x] \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = x^{\cos x}[\frac{\cos x}{x} - \ln x.\operatorname{sen} x]$$

(26) Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y = x^{Lnx}$

Solución

Tomando logaritmo en la ecuación $y = x^{Lnx}$

$\ln y = \ln(x^{\ln x}) = \ln x.\ln x$ derivando implícitamente:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2\ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = 2y\frac{\ln x}{x} = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 2x^{\ln x - 1}.\ln x$$

(27) Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $x^y = y^x$

Solución

Tomando logaritmo a ambos miembros $\ln x^{y} = \ln y^{x}$

aplicando propiedad de logaritmo y Ln x = x Ln y derivando implícitamente

$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y}y' \quad \text{de donde} \quad (\ln x - \frac{x}{y})y' = \ln y - \frac{y}{x}$$

$$\frac{y\ln x - x}{y}.y' = \frac{x\ln y - y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}(\frac{x\ln y - y}{y\ln x - x}) \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(\frac{x\ln y - y}{y\ln x - x})$$

(28) Hallar $\frac{dy}{dx}$ sí $y = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$

Solución

Tomando logaritmo y aplicando sus propiedades:

$$\ln y = \ln(\frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}) = \ln x^2\sqrt{x+1} - \ln\left((x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}\right)$$

$$\ln y = \ln x^2 + \ln\sqrt{x+1} - \ln(x-1)^3 - \ln\sqrt[5]{5x-1}$$

$$\ln y = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - 3\ln(x-1) - \frac{1}{5}\ln(5x-1)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1} \quad \text{de donde} \quad y' = y[\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}[\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{5x-1}]$$

(29) Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

Solución

Tomando logaritmo y aplicando propiedades:

$$\ln y=\ln(\frac{x^2\ \text{arctg}\,x}{1+x^2})=\ln x^2+\ln.\text{arctg}\,x-\ln(1+x^2)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{(1+x^2)\,\text{arctg}\,x}-\frac{2x}{1+x^2}\ \text{de donde}\ \ y'=y[\frac{2}{x}+\frac{1}{(1+x^2)arc.\text{tg}\,x}-\frac{2x}{1+x^2}]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2 arc.\text{tg}\,x}{1+x^2}[\frac{2}{x}+\frac{1}{(1+x^2)arc.\text{tg}\,x}-\frac{2x}{1+x^2}]$$

(30) Hallar $\frac{dy}{dx}$ sí $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

Solución

Tomando logaritmo y aplicando propiedades:

$$Lny=Ln\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}=3Ln(x+1)+\frac{3}{4}Ln(x-2)-\frac{2}{5}Ln(x-3)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x+1}+\frac{3}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}\quad\text{de donde}\quad y'=y[\frac{3}{x+1}+\frac{3}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}[\frac{3}{x+1}+\frac{3}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}]$$

(31) Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y=\frac{(x+1)(2x-3)^{1/2}}{\sqrt[3]{3x-2}}$

Solución

Tomando logaritmo y aplicando propiedad:

$$\ln y=\ln\frac{(x+2)(2x-3)^{1/2}}{\sqrt[3]{3x-2}}=\ln(x+2)(2x-3)^{1/2}-\ln\sqrt[3]{3x-2}$$

$$\ln y=\ln(x+2)+\ln(2x-3)^{1/2}-\ln(3x-2)^{1/3}$$

$$\ln y = \ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(2x-3) - \frac{1}{3}Ln(3x-2)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{3x-2} \quad \text{de donde} \quad y' = y[\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{3x-2}]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)(2x-3)^{1/2}}{\sqrt[3]{3x-2}}[\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{3x-2}]$$

4.18 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Calcular las siguientes derivadas, usando la definición

① $f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$ **Rpta.** $f'(x) = -\frac{-13}{(3x-2)^2}$

② $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ **Rpta.** $f'(x) = \frac{-1}{2(x+2)^{3/2}}$

③ $f(x) = x\sqrt{x+1}$ **Rpta.** $f'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

④ $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ **Rpta.** $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

⑤ $f(x) = \sqrt[3]{2x+3}$ **Rpta.** $f'(x) = \frac{2}{3(2x+3)^{2/3}}$

⑥ $f(x) = \sqrt{3-2x}$ **Rpta.** $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$

⑦ $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **Rpta.** $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

⑧ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ **Rpta.** $f'(x) = -\frac{1}{2(x+1)^{3/2}}$

(9) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x}}$ **Rpta.** $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{3x}}$

(10) $f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D}$ **Rpta.** $f'(x)=\frac{AD-BC}{(Cx+D)^2}$

(11) $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$ **Rpta.** $f'(x)=\frac{2x^3-1}{x^2}$

(12) $f(x)=\sqrt{ax}+\frac{a}{\sqrt{ax}}$ **Rpta.** $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax}}-\frac{a}{2x\sqrt{ax}}$

(13) $f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$ **Rpta.** $f'(x)=\frac{-a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$

(14) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ **Rpta.** $f'(x)=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

(15) $f(x)=\frac{x}{2x-1}$ **Rpta.** $f'(x)=-\frac{1}{(2x-1)^2}$

(16) $f(x)=3^x$ **Rpta.** $f'(x)=3^x Ln3$

(17) f(x) = cos x **Rpta.** $f'(x)=-\text{sen}\,x$

(18) $f(x)=\frac{3+2x}{3-2x}$ **Rpta.** $f'(x)=\frac{12}{(3-2x)^2}$

II. Calcular la derivada en el punto indicado usando la definición

(1) $f(x)=\sqrt{1+9x}$, a = 7 **Rpta.** $f'(a)=\frac{9}{16}$

(2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$, a = 3 **Rpta.** $f'(a)=-\frac{1}{27}$

(3) $f(x)=\frac{1}{x}+x+x^2$, a = -3 **Rpta.** $f'(a)=-\frac{46}{9}$

(4) $f(x)=(x^2+x)^2$, a = 2 **Rpta.** $f'(a)=60$

(5) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, a = 5 **Rpta.** $f'(a)=\frac{5}{\sqrt{21}}$

(6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-3x}}$, a = -8 **Rpta.** $f'(a)=\frac{3}{250}$

(7) $f(x)=\frac{1}{11\sqrt{5+11x}}$, a = 1 **Rpta.** $f'(a)=-\frac{1}{128}$

(8) $f(x)=|x-1|^3$, a = 1 **Rpta.** $f'(a)=0$

(9) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$, a = 4 **Rpta.** $f'(a)=-\frac{1}{8}$

(10) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$, a = 5 **Rpta.** $f'(a)=\frac{5}{4}$

(11) $f(x)=\frac{x+3}{2x-5}$, a = 2 **Rpta.** $f'(a)=-11$

(12) $f(x)=3-\sqrt{5+x}$, a = -4 **Rpta.** $f'(a)=-\frac{1}{2}$

III. Determinar, cuales de las funciones siguientes son derivables en los números dados por x_0

(1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & , x\le 4\\ 2(x-8) & , x>4\end{cases}$, $x_0=4$

(2) $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x_0=0$

(3) $f(x)=|x^2-4|$, $x_0=2 \wedge x_0=-2$

(4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & , x<1\\ (1-x)^2 & , x\ge 1\end{cases}$, $x_0=1$

⑤ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|} & ,x<1 \\ x^2 & ,x\geq 1\end{cases}$, $x_0=1$

⑥ $f(x)=\sqrt{|x|-[\![|x|]\!]}$, $x_0=1$, $\frac{3}{2},\frac{5}{2}$

⑦ $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & ,x<2 \\ \sqrt{x-2} & ,x\geq 2\end{cases}$, $x_0=2$

⑧ $f(x)=\begin{cases}|x+2| & ,x<0 \\ 2-2x^2 & ,0\leq x<2 \\ x^2-4x+2 & ,x\geq 2\end{cases}$, $x_0=0,2$

⑨ $f(x)=|x-3|^3(x-3)+x^3\left[\!\!\left[\left|x-\frac{3}{2}\right|\right]\!\!\right]$, $x_0=3$

⑩ $f(x)=\begin{cases}x^2 & si\quad x<-1 \\ -1-2x & si\quad x\geq -1\end{cases}$, $x_0=-1$

IV. Problemas de diferenciabilidad.

① Calcular los valores de a , b y c para que la función:

$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{|x|} & si\ |x|\geq 2 \\ ax^2+bx+c & si\ |x|<2\end{cases}$ sea continua en x = -2 y diferenciable en x = 2

Rpta. $a=-\frac{1}{4}$, b = 0, c = 3

② Calcular los valores de a y b de la función f para que sea derivable en x = 2

$f(x)=\begin{cases}-3x^2 & , si\ x\leq 2 \\ ax+b & , si\ x>2\end{cases}$

Rpta. a = -12, b = 12

③ Halle los valores de a y b tales que f sea diferenciable en 2 sí:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b\ ,\ si\ x<2 \\ 2x^2-1\ , si\ x\geq 2 \end{cases}$$

Rpta. a = 8, b = -9

④ Sí $f(x)=|x-8|(x-8)$. Hallar los puntos donde f es diferenciable.

⑤ Si $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x<1 \\ ax+b & si\ x\geq 1 \end{cases}$. Encontrar los valores de a y b tal que $f'(1)$ existe.

Rpta. a = 2, b = -1

⑥ Hallar los valores de a y b de manera que exista $f'(2)$ sí: $f(x)=\begin{cases} ax+b, & si\ \ x\leq 2 \\ x^2-3, & si\ \ x>2 \end{cases}$

Rpta. a = 4, b = -7

⑦ Hallar los valores de a y b de manera que la función: $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ ax+b, & x\geq 1 \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio.

Rpta. a = 2, b = 1

⑧ Hallar los valores de a y b, de manera que la función: $f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & si\ \ x\leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|}, & si\ \ x>1 \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio.

Rpta. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$

⑨ Hallar las constantes m y n de tal manera que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+mx+3, & x\leq -1 \\ -4mx+n, & x>-1 \end{cases}$, sea derivable en x = -1. Rpta. m = 2, n = 10

⑩ Sea f la función definida como: $f(x)=\begin{cases} 3-x, & x<1 \\ ax^2+bx, & x\geq 1 \end{cases}$, donde a y b son constantes.

i) Si la función es continua para todo x ¿Cuál es la relación entre a y b?

ii) Determinar los únicos valores de a y b que hacen a f continua y diferenciable.

(11) Si $f(x)=|x-3|^3\ (x-3)+x^3[|x-\frac{3}{2}|]$ ¿Sea f derivable en x = 3?

(12) Dado $f(x)=(x-1)[|x|]$, trace la gráfica de f para x $\in$ [0,2], halle si existen $f_-'(1)$, $f_+'(1)$, $f'(1)$.

(13) Dado $f(x)=(5-x)[|x|]$, trace la gráfica de f para x en [4,6], obtenga si existen $f_-'(5)$, $f_+'(5)$, $f'(5)$

(14) Dada $f(x)=(x-a)[|x|]$, demuestre que: $f_-'(a)+1=f_+'(a)$

(15) Determine $f'(-3)$ sí $f(x)=(|x|-x)\sqrt[3]{9x}$ **Rpta.** 8

V. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ sí

(1) $y=\frac{1}{(x+a)^m}\cdot\frac{1}{(x+b)^n}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{n(x+a)+m(x+b)}{(x+a)^{m+1}(x+b)^{n+1}}$

(2) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

(3) $y=\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{2\sqrt{x}\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}$

(4) $y=\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$

(5) $y=\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(x^3+3x^2)^{2/3}}$

(6) $y=(3x^2+4x+8)\sqrt{x-1}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{15x^2}{2(x-1)^{1/2}}$

⑦ $y=\frac{x^n}{(1+x)^n}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{nx^{n-1}}{(x+1)^{n+1}}$

⑧ $y=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}[1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]$

⑨ $y=(x+a)^m(x+b)^n$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=(x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}[m(x+b)+n(x+a)]$

⑩ $y=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^4-1}}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})^2$

⑪ $y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)\sqrt{x-x^2}}$

⑫ $y=\frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+4}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{7}{(x^2+3x+4)^{3/2}}$

⑬ $y=(\frac{x^3-1}{2x^3+1})^4$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

⑭ $y=\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{bx^2}[1-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}]$

⑮ $y=(\frac{x^2+3x+5}{2x-1})^5$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{5(2x^2-2x-13)}{(2x-1)^2}(\frac{x^2+3x+5}{2x-1})^4$

⑯ $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=[\frac{(n-m)-(n-m)x}{m+n}](1-x)^{\frac{-n}{m+n}}.(1+x)^{\frac{-m}{m+n}}$

⑰ $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2}{(1-x^3)^2}(\frac{1-x^3}{1+x^3})^{2/3}$

⑱ $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(19) $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{27}(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^{-2/3}(1+\sqrt[3]{x})^{-2/3}x^{-2/3}$

(20) $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$

(21) $y=\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$

(22) $y=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-6\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 4x}$

(23) $y=\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-arc.\operatorname{tg}\frac{\cos x+2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x-2\cos x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh 2x}+1$

(24) $y=arc.\cos(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$

(25) $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}arc.\operatorname{tg}(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}$

(26) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2 arc.\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}Lnx+1}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=(2x-\frac{1}{1+x^2})\frac{e^{x^2 arc.\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}Lnx+1}}{\sqrt{x}}$

(27) $y=arc.\operatorname{sen}(\frac{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}x}{1-\cos\alpha.\operatorname{sen}x})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha.\cos x}$

(28) $y=arc.\cos(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$

(29) $y=\cos^2(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{sen}[2(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})]}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

(30) $y=\operatorname{sen}^2(\frac{1-Lnx}{x})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{Lnx-2}{x^2}\operatorname{sen}[2(\frac{1-Lnx}{x})]$

(31) $y = \operatorname{tg}(\frac{1-e^x}{1+e^x})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{-2e^x}{(1+e^x)}\sec^2(\frac{1-e^x}{1+e^x})$

(32) $y = \frac{2}{3} arc.\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^4}{1+x^6}$

(33) $y = Ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) - c\operatorname{tg} x.Ln(1+\operatorname{sen} x) - x$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{Ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$

(34) $y = \frac{1}{4}\ln(\frac{1+x}{1-x}) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-x^4}$

(35) $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(36) $y = \sqrt{x}\, arc.\operatorname{sen}\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} arc.\operatorname{sen}\sqrt{x}$

(37) $y = Ln(\sqrt{2\operatorname{sen} x + 1} + \sqrt{2\operatorname{sen} x - 1})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sqrt{4\operatorname{sen}^2 x - 1}}$

(38) $y = Ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}$

(39) $y = Ln(3x^2 + \sqrt{9x^4+1})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$

(40) $y = Ln\frac{\sqrt{4\operatorname{tg} x + 1} - 2\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{4\operatorname{tg} x + 1} + 2\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x(4\operatorname{tg} x + 1)}}$

(41) $y = \ln(\frac{2\ln^2(\operatorname{sen} x) + 3}{2\ln^2(\operatorname{sen} x) - 3})$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{24\ln(\operatorname{sen} x) c\operatorname{tg} x}{4\ln^4(\operatorname{sen} x) - 9}$

(42) $y = \frac{1}{2}\sqrt[4]{arc.\operatorname{sen}\sqrt{x^2+2x}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx} \frac{x+1}{8\sqrt{x^2+2x}\sqrt{1-x^2-2x}(arc.\operatorname{sen}\sqrt{x^2+2x})^{3/4}}$

(43) y = arc.tg (Ln(ax+b)) **Rpta.** $\frac{a}{(ax+b)(1+Ln^2(ax+b))}$

(44) $y=\sqrt[3]{\ln(\operatorname{sen}\frac{x+3}{4})}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{12}\frac{c\,tg((x+3)/4)}{Ln^{2/3}(\operatorname{sen}(x+3)/4))}$

(45) $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2Ln^2x-1}{xLnx}$

(46) $y=(2-x^2)\cos x^2+2x\operatorname{sen} x^3$

Rpta. $\frac{dy}{dx}=-2x\cos x^2+(x^2-2)2x\operatorname{sen} x^2+2\operatorname{sen} x^3+6x^3\cos x^3$

(47) $y=\operatorname{sen}(\cos^2 x)\cos(\operatorname{sen}^2 x)$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen} 2x\cos(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)$

(48) y = sen(sen(senx)) **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\cos(\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x))\cos(\operatorname{sen} x)\cos x$

(49) $y=\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))$

Rpta. $\frac{dy}{dx}=3\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))\cos(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)).\operatorname{sen}(2\operatorname{sen} x)\cos x$

(50) $y=\operatorname{sen}((\operatorname{sen}^7 x^7+1)^7)$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=343x^6x^7.\cos x^7.(\operatorname{sen}^7 x^7+1)^6.\cos(\operatorname{sen}^7 x^7+1)^7$

(51) $y=\operatorname{sen}(x^2+\operatorname{sen}(x^2+\operatorname{sen} x^2))$

Rpta. $\frac{dy}{dx}=\cos(x^2+\operatorname{sen}(x^2+\operatorname{sen} x^2)).[2x+\cos(x^2+\operatorname{sen} x^2)(1+\cos x^2)2x]$

(52) $y=(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}})^n$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=n(\frac{1+\sqrt{1-x^2}-2x^2}{(1+\sqrt{1-x^2})^2})(\frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})})^{n-1}$

(53) $y=(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^4$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^3(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}})$

(54) $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2(x^2-x+1)}{(x^2+1)^{5/2}}$

(55) $y=(x+\sqrt{-x})^n$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=n(x+\sqrt{x})^{n-1}(1-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}})$

(56) Sí $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $y=f(\dfrac{x}{x+1})$. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$

(57) $y=\ln(\dfrac{(x-1)^3(x-2)}{x-3})$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}$

(58) $y=2^{\text{arcsen}\,3x}+(1-\arccos 3x)^2$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\ln 2.2^{\text{arcsen}\,3x}}{\sqrt{1-9x^2}}+\dfrac{6(1-\arccos 3x)}{\sqrt{1-9x^2}}$

(59) $y=\ln(\text{arcsen}(5x))+\text{arcsen}(\ln x)$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}\,arc.\text{sen}\,5x}+\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln x^2}}$

VI. Derivación Implícita. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ sí:

(1) $e^y=x+y$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{e^y-1}$

(2) $\ln y+\dfrac{x}{y}=k$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x-y}$

(3) $\text{arctg}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$

(4) $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{2-3y^2(x+y)^2}$

(5) $xy=arc.\text{tg}\dfrac{x}{y}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}.\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$

(6) x sen y – cos y + cos 2y = 0 **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{\text{sen}\,y}{2\,\text{sen}\,2y-\text{sen}\,y-x\cos y}$

(7) y sen x – cos (x – y) = 0 **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x+\text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x-y)-\text{sen}\,x}$

(8) sen xy + cos xy = tg (x + y) **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos xy-\text{sen}\,xy)-1}{x\cos^2(x+y)(\cos xy-\text{sen}\,xy)-1}$

(9) $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$

(10) $x^4+y^4=x^2y^2$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.\frac{y^2-2x^2}{2y^2-x^2}$

(11) x – y = arc.senx – arc.seny **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}\,(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}\,(1-\sqrt{1-y^2})}$

(12) $x^2-a\sqrt{xy}+y^2=a$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{4x\sqrt{xy}+y}{4y\sqrt{xy+ax}}$

(13) $2x^4y^2-4x^2y^4+x^2y^2=6$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}(\frac{4x^2-4y^2+1}{2x^2-8y^2+1})$

(14) $y^5-2x^2y^3+3x^4y-x^5=5$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{5x^4-4xy^3-12x^3y}{5y4-6x^2y^2+3x^4}$

(15) $\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[4]{y^3}=x$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}}$

(16) $\sqrt{xy}+2x=\sqrt{y}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{4\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-x}$

(17) x – y = arc.senx – arc.seny **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$

(18) y = x + arc.tgy **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{y^2}$

(19) $x^3+2x^2y-xy^2+2y^3=2$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4xy-y^2}{2xy-2x^2-6y^2}$

(20) $x^3-3axy+y^3=a^3$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ay}$

(21) $\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^2}{x^3}=\frac{7}{3}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}$

(22) $x^3+xy^2=x^2y$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy-3x^2-y^2}{2xy-x^2}$

(23) $(x+y)^3+(x-y)^3=x^4+y^4$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3-3x^2-3y^2}{6xy-2y^3}$

(24) $(x+y)^2+(x-y)^2=x^3+y^3$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4y}{4x-3y^2}$

(25) $(x+y)y^3=x-y$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$

VII. Derivadas de las funciones $y=(f(x))^{g(x)}$

(1) $y=(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}(\cos x.Ln(x^2+1)+\frac{2x\operatorname{sen} x}{x^2+1})$

(2) $y=e^{x^{x^x}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=e^{x^{x^x}}.x^{x^x}x^x(\frac{1}{x}+(Lnx+1))$

③ $y=(1+x^2)^{arc.\,tg\,x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=(1+x^2)^{\operatorname{arctg} x}[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x\operatorname{arctg} x}{1+x^2}]$

④ $y=2x^{\sqrt{x}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=x^{\sqrt{x}}(\frac{2+Lnx}{\sqrt{x}})$

⑤ $y=x^{\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=x^{\operatorname{sen} x}(\frac{\operatorname{sen} x}{x}+\cos xLnx)$

⑥ $y=x^{Lnx}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=2x^{Lnx-1}Lnx$

⑦ $y=(Lnx)^x$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=(Lnx)(Ln(Lnx)+\frac{x}{Lnx})$

⑧ $y=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=(\operatorname{sen})^{\cos x}(c\operatorname{tg} x\cos x-\operatorname{sen} xLn\operatorname{sen} x)$

⑨ $y=(\cos x)^x$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=(\cos x)^x(Ln\cos x-x\operatorname{tg} x)$

⑩ $x^y=y^x$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{xLny-y}{yLnx-x}\cdot\frac{y}{x}$

⑪ $y=x^{x^2}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=x^{x^2+1}(1+2Lnx)$

⑫ $y=x^{1/x}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-Lnx}{x^2}$

⑬ $e^{\sqrt{\frac{x+\sqrt{y}}{x-\sqrt{y}}}}+Ln\frac{x-\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}=8$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$

⑭ $y=\frac{(x-2)^9}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-2)^9}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}(\frac{9}{x-2}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)})$

(15) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}\left(\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{5}{2(x-1)}-\dfrac{11}{2(x-3)}\right)$

(16) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

(17) $y=\dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

(18) $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}\cdot\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

VIII. Derivadas en un punto

(1) Si $y=\operatorname{tg}^3\dfrac{\pi x}{6}$, Hallar $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=2}$ **Rpta.** 6π

(2) Sí $f(x)=\operatorname{tg}x$ y $g(x)=\operatorname{Ln}(1-x)$; Hallar $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$ **Rpta.** -1

(3) Si $f(x)=1-x$ y $g(x)=1-\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}$; Hallar $\dfrac{g'(1)}{f'(1)}$ **Rpta.** 0

(4) Calcular $f'(0)$ sí $f(x)=e^{-x}\cos 3x$ **Rpta.** -1

(5) Hallar $f'(1)$ sí $f(x)=\ln(1+x)+\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{2}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(6) Sí $f(x)=\ln(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2})-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$. Hallar $f'(\dfrac{\pi}{4})$ **Rpta.** $4\sqrt{2}$

(7) Sí $f(x)=\sqrt[3]{Lnx}$. Hallar $f'(e)$ **Rpta.** $\dfrac{1}{3e}$

(8) Si $f(x)=e^{\pi x}\operatorname{sen}\pi x$. Hallar $f'(\dfrac{1}{2})$ **Rpta.** $\pi e^{\frac{\pi}{2}}$

(9) Si $f(x)=\ln(\frac{1+tgx}{tgx})$ Hallar $f'(\frac{\pi}{4})$ **Rpta.** -1

(10) Hallar y' sí $y=\text{arctg}(\frac{1-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,x})+\text{arcsen}(\frac{\text{tg}\,x}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}})$

(11) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2(\text{sen}(1/x)+x, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$; Demostrar que $f'(0)=1$

(12) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+\text{sen}\,x & , x=0 \\ [\![x+0.21]\!]+x^2\cos\frac{1}{x} & , x\neq 0 \end{cases}$

Hallar $f'(0)$ si existe, usando la definición de derivada.

(13) Si $y^3=\sqrt[3]{5x^3+3x^{2/3}y^{2/3}}$ Calcular $\frac{dy}{dx}$ para x = 1, y = 1

(14) Dada la función $f(x)=\frac{\sqrt{5-8x}}{\sqrt[3]{2x-7}}$, determinar los valores de m, sí: $(m^2+4)f(-\frac{1}{2})=13m.f'(-\frac{1}{2})$

(15) Si $f(x)=\cos^3(x+\pi)$, hallar $f'(\frac{\pi}{4})$

(16) Si $f(x)=\sqrt{x+1}.e^{\ln\sqrt{x+1}}$, hallar $f'(0)$

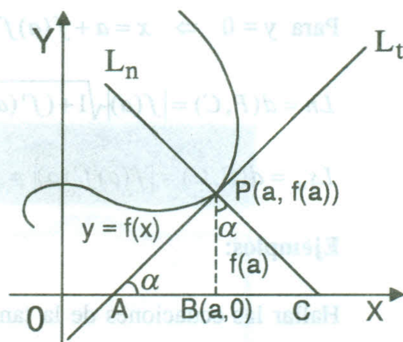
4.19 ECUACIONES DE LA TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA.-

Sí f: I→ R es una función derivable en el punto x = a, (a ∈ I), entonces la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(a, f(a)) es dado por:

$$L_t : y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

Si $f'(a) \neq 0$, entonces la ecuación de la recta normal que pasa por el punto P(a, f(a)), es dado por:

$$L_n : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$



Para el caso en que $f'(a) = 0$, la ecuación de la recta normal es: x = a.

Llamaremos longitud de la tangente, al segmento de la tangente comprendida entre el eje X y el punto de tangencia y denotaremos como: $L_t = d(A, P)$.

Llamaremos longitud de la subtangente al segmento $\overline{AB}$ que es la proyección ortogonal del segmento $\overline{AP}$ sobre el eje X, al cual denotaremos como: $Ls_t = d(AB)$.

Llamaremos longitud de la subnormal al segmento $\overline{BC}$ que es la proyección ortogonal del segmento $\overline{PC}$ sobre el eje $\overline{OX}$.

De la ecuación de la recta tangente $L_t : y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Calculamos el punto de la intersección A con el eje X, para y = 0, entonces:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \Rightarrow A(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0)$$

como el punto de tangencia es P(a,f(a))

$$L_t = d(A, P) = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|\sqrt{1 + (f'(a))^2}$$ = Longitud de la tangente.

$$Ls_t = d(A, B) = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|$$ = longitud de la subtangente.

De la ecuación de la normal $L_n : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$, calculamos el punto C de la intersección con el eje X.

Para y = 0 $\Rightarrow$ $x = a + f(a)f'(a)$ $\Rightarrow$ $C(a + f(a)f'(a),0)$.

$Ln = d(P,C) = |f(a)|\sqrt{1+(f'(a))^2}$ = longitud de la normal.

$Ls_n = d(B,C) = |f(a)f'(a)|$ = longitud de la subnormal.

Ejemplos:

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3 - 3x$ en el punto (2,2)

Solución

Calculando la pendiente = $mL_t = \frac{dy}{dx}|_{p(2,2)}$, pero como $y = x^3 - 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$.

Entonces $mL_t = \frac{dy}{dx}|_{p(2,2)} = 12 - 3 = 9$

Luego $L_t : y - y_0 = mL_t(x - x_0)$, de donde $L_t : y - 2 = 9(x-2)$ $\Rightarrow$ $L_t : 9x - y - 16 = 0$

como $L_n \perp L_t$ $\Rightarrow$ $mL_n = -\frac{1}{9}$, entonces $L_n : y - 2 = -\frac{1}{9}(x-2)$

$$L_n : x + 9y - 20 = 0$$

2. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en el punto P(1,1)

Solución

Para calcular la pendiente de la recta tangente, en primer lugar calculamos su derivada, es decir: $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ $\Rightarrow$ $5x^4 + 5y^4 y' - 2y - 2xy' = 0$

$(5y^4 - 2x)y' = 2y - 5x^4$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}$

como $mL_t = \frac{dy}{dx}|_{P(1,1)} = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}|_{P(1,1)} = \frac{2-5}{5-2} = -1$

entonces $L_t : y - y_0 = mL_t(x - x_0) \Rightarrow L_t : y - 1 = -(x - 1)$, de donde $L_t : x + y - 2 = 0$

como $L_n \perp L_t \Rightarrow mL_n = 1$, entonces tenemos que:

$$L_n : y - 1 = x - 1 \Rightarrow L_n : x - y = 0$$

4.20 ECUACIONES PARAMETRICAS.-

a) Representación de curvas en forma paramétricas

Las coordenadas (x,y) de un punto P de una curva pueden ser funciones de una variable t llamado parámetro, es decir:

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \ldots(\alpha)$$

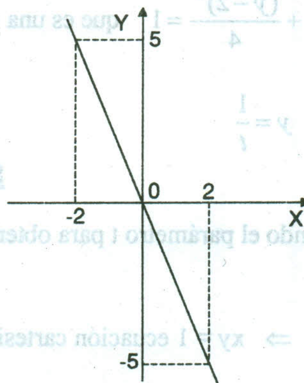
A la ecuación (α) se denomina ecuación paramétrica en donde cada valor de t le corresponde un punto P(f(t),g(t)) del plano XY. El lugar geométrico que describe los puntos f(t) y g(t) se denomina curva parametrizada de la ecuación paramétrica, para obtener la ecuación cartesiana se elimina el parámetro t y de esa manera se obtiene una ecuación de la forma cartesiana y = f(x) ó E(x, y) = 0

Ejemplos: Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas.

① x = 2t, y = -5t

Solución

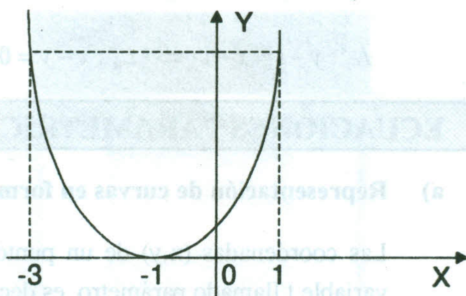
t	x	y
0	0	0
1	2	-5
2	4	-10
-1	-2	5
-2	-4	10



② $x = t - 1 \qquad y = t^2$

Solución

t	x	y
0	-1	0
1	0	1
-1	-2	1
2	1	4
-2	-3	4

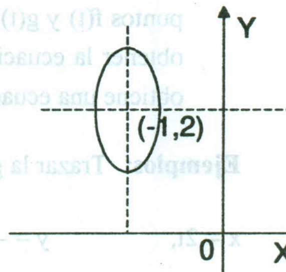


Ejemplos.- Trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas pasando a coordenadas cartesianas

① $x = -1 + \cos\theta$, $y = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$

Solución

$$\begin{cases} x = -1 + \cos\theta \\ y = 2 + 2\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \cos\theta \\ \dfrac{y-2}{2} = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = \cos^2\theta \\ \dfrac{(y-2)^2}{4} = \operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$$



sumando ambas ecuaciones se tiene:

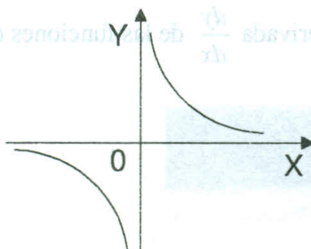
$$(x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$ que es una elipse

② $x = t \qquad y = \dfrac{1}{t}$

Solución

Eliminando el parámetro t para obtener la ecuación cartesiana

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow$$ xy = 1 ecuación cartesiana cuya gráfica es una hipérbola.



b) Derivadas de las Ecuaciones Paramétricas

Consideremos dos funciones f y g derivables en un intervalo [a, b], tal que:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \ldots(\alpha), \quad \text{son las ecuaciones paramétricas}$$

La $\frac{dy}{dx}$ donde x e y están dados en forma paramétrica, se obtiene aplicando la regla de la cadena, es decir:

$$\text{Si} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(t) \\ \frac{dy}{dt} = g'(t) \end{cases}, \text{ entonces: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}; \quad f'(t) \neq 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}; \quad f'(t) \neq 0$$

Para obtener la segunda derivada, se aplica nuevamente la regla de la cadena, es decir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{f'(t)} = \frac{\frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^2}}{f'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}$$

Ejemplo.- Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas en forma paramétrica.

① $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = (\dfrac{t}{t+1})^2 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = (\dfrac{t}{t+1})^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_t' = -\dfrac{1}{(1+t)^2} \\ y_t' = \dfrac{2t}{(1+t)^3} \end{matrix} \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\dfrac{2t}{(1+t)^3}}{-\dfrac{1}{(1+t)^2}} = -\frac{2t(1+t)^2}{(1+t)^3} = -\frac{2t}{1+t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2t}{1+t}$$

② $\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \quad \text{para } t = \dfrac{\pi}{2}$

Solución

$$\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\, t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_t' = a(1 - \cos t) \\ y_t' = a\, \text{sen}\, t \end{matrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{a\, \text{sen}\, t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\text{sen}\, t}{1 - \cos t}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\pi/2} = \frac{1}{1-0} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\pi/2} = 1$$

Ejemplo:

Encontrar las ecuaciones de la tangente y normal de la curva $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + 2t$ en el punto donde $t = -2$

Solución

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 & x'_t = 2t \\ & \Rightarrow \\ y = t^3 + 2t & y'_t = 3t^2 + 2 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 + 2}{2t} \Rightarrow mL_t = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=-2} = -\frac{7}{2}$$

el punto para t = -2 es P(5,-12) por lo tanto $L_t : y + 12 = -\frac{7}{2}(x - 5)$

$mL_n = \frac{-1}{mL_t} = \frac{2}{7}$ por lo tanto $L_n : y + 12 = \frac{2}{7}(x - 5)$

4.21 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.-

Sí f: R →R es una función derivable en x entonces:

$$\exists f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que es otra función la cual puede derivarse es decir:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

a esta función le llamaremos la segunda derivada de f y si la función $f''(x)$ se vuelve a derivar, se obtiene otra función:

$$f'''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$$

y lo llamaremos la tercera derivada de f y así sucesivamente se tiene, que la derivada de la función $f^{(n-1)}(x)$ es:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

y se denomina la n-ésima derivada de f con respecto a x.

NOTACIÓN: $f^{(0)}(x) = D^0 f(x) = f(x)$

a) Propiedades de las Derivadas de Orden Superior

Si $D_x^n f(x)$, $D_x^n g(x)$ existen en un intervalo entonces

① $D^n(f(x) \pm g(x)) = D_x^n f(x) \pm D_x^n g(x)$

② $D_x^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_x^{n-k} f(x) D_x^k g(x)$ (Regla de Leibniz)

③ $$D_x^n x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & si\ 0 \le n < m \\ m! & si\ n = m \\ 0 & si\ n > m \end{cases}$$

Ejemplos:

① Hallar $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Solución

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{1.2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-1.2.3}{(x+1)^4}$$

.
.
.

$$f^n(x) = \frac{(-1)^n(1.2.3...n)}{(x+1)^{n+1}} \qquad \therefore f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

(2) Hallar $f^{(n)}(x)$ si f(x) = Ln(x + a)

Solución

$$f(x) = Ln(x+a) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+a)}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1.2}{(x+a)^3}$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{1.2.3}{(x+a)^4}$$

$$f^{V}(x) = \frac{1.2.3.4}{(x+a)^5}$$

.
.
.

$$f^{n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}1.2....(n-1)}{(x+a)^n} \qquad \therefore f^{n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+a)^n}$$

(3) Demostrar que la función $y = Ax^n + Bx^{1-n}$, satisface la ecuación diferencial: $n(n-1)y - x^2y'' = 0$

Solución

$$y = Ax^n + Bx^{1-n} \Rightarrow y' = nAx^{n-1} + (1-n)Bx^{-n}$$

$$n(n-1)y = n(n-1)x^n + n(n-1)Bx^{1-n} \qquad \textbf{... (1)}$$

$$y'' = n(n-1)Ax^{n-2} - n(1-n)Bx^{-n-1}$$

$$x^2y'' = n(n-1)Ax^n + n(n-1)x^{1-n} \qquad \textbf{... (2)}$$

Luego restando (1) y (2) se tiene: $n(n-1)y - x^2y'' = 0$

4 Demostrar que la función $y = A\dfrac{\operatorname{senh} x}{x} + B\dfrac{\cosh x}{x}$, satisface a la ecuación diferencial: $x^2 y'' + 2xy' - x^2 y = 0$

Solución

$$y' = A\left(\frac{x\cosh x - \operatorname{senh} x}{x^2}\right) + B\left(\frac{x\operatorname{senh} x - \cosh x}{x^2}\right) = A\frac{\cosh x}{x} + B\frac{\operatorname{senh} x}{x} - \frac{1}{x}\underbrace{\left(A\frac{\operatorname{senh} x}{x} + B\frac{\cosh x}{x}\right)}_{y}$$

$$= A\frac{\cosh x}{x} - B\frac{\operatorname{senh} x}{x} - \frac{y}{x}, \text{ derivando nuevamente}$$

$$y'' = A\left(\frac{x\operatorname{senh} x - \cosh x}{x^2}\right) + B\left(\frac{x\cosh x - \operatorname{senh} x}{x^2}\right) - \frac{xy' - y}{x^2}$$

$$= A\frac{\operatorname{senh} x}{x} + B\frac{\cosh x}{x} - \frac{1}{x}\left(A\frac{\cosh x}{x} + B\frac{\operatorname{senh} x}{x}\right) - \frac{xy' - y}{x^2} = y - \frac{1}{x}\left(y' + \frac{y}{x}\right) - \frac{xy' - y}{x^2}$$

$$y'' = \frac{x^2 y - xy' - y - xy' + y}{x^2} = \frac{x^2 y - xy' - xy'}{x^2} \quad \text{de donde} \quad x^2 y'' + 2xy' - x^2 y = 0$$

5 Muestre que $(e^{ax}\cos bx)^{(n)} = r^n e^{ax}\cos(bx + n\varphi)$ determinando r y φ en función de a y b

Solución

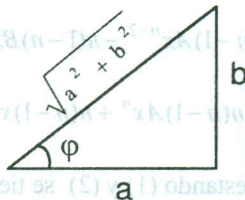
$$(e^{ax}\cos bx)^{(1)} = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\operatorname{sen} bx = e^{ax}(a\cos bx - b\operatorname{sen} bx)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{ax}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos bx - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\operatorname{sen} bx\right]$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{ax}(\cos\varphi\cos bx - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen} bx) = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{ax}\cos(\varphi + bx)$$

pues en el siguiente gráfico se tiene:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ ; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$(e^{ax}\cos bx)^{(2)}=\sqrt{a^2+b^2}\,[ae^{ax}\cos(bx+\varphi)-be^{ax}\operatorname{sen}(bx+\varphi)]$$

$$=(\sqrt{a^2+b^2})^2[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}\cos(bx+\varphi)-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}\operatorname{sen}(bx+\varphi)]$$

$$=(a^2+b^2)e^{ax}[\cos\varphi\cos(bx+\varphi)-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(bx+\varphi)]=(a^2+b^2)e^{ax}\cos(bx+2\varphi)$$

En forma similar obtenemos: $(e^{ax}\cos bx)^{(3)}=(\sqrt{a^2+b^2})^3\cos(bx+3\varphi)e^{ax}$

Luego por inducción, para un $n\in Z^+$, tenemos:

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=(\sqrt{a^2+b^2})^n\cos(bx+n\varphi)e^{ax}$$

y se pide demostrar: $(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi)$

entonces $r=\sqrt{a^2+b^2}$ y $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

(6) Si f(x) = a sen 3x + b cos 3x, Hallar los valores de a y b tal que se cumple la igualdad: $f''(x)+4f'(x)+3f(x)=10\cos 3x$

Solución

f(x) = a sen 3x + b cos 3x $\Rightarrow \begin{cases} f'(x)=3a\cos 3x-3b\operatorname{sen}3x \\ f''(x)=-9a\operatorname{sen}3x-9b\cos 3x \end{cases}$, entonces:

-9a sen 3x – 9b cos 3x + 12a cos 3x – 12b sen 3x + 3a sen 3x + b cos 3x = 10 cos 3x

(-6a – 12b) sen 3x + (-6b + 12a) cos 3x = 10 cos 3x

igualando coeficientes se tiene:

$\begin{cases} -6a-12b=0 \\ -6b+12a=0 \end{cases}$, resolviendo el sistema $\begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$

4.22 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\frac{8}{x^2+4}$ en el punto (2,1)

Solución

Se conoce que $mL_t=\frac{dy}{dx}|_{x=2}$, de donde $\frac{dy}{dx}=-\frac{16x}{(x^2+4)^2}$

Luego $mL_t=-\frac{16x}{(x^2+4)^2}|_{x=2}=-\frac{32}{8^2}=-\frac{32}{64}=-\frac{1}{2}$

$L_t: y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$, de donde $L_t: x+2y=4$

(2) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^5+y^5-2xy=0$ en el punto (1,1).

Solución

Primeramente calculamos la derivada, es decir:

$$x^5+y^5-2xy=0 \Rightarrow 5x^4+5y^4\frac{dy}{dx}-2y-2x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(5y^4-2x)\frac{dy}{dx}=2y-5x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2y-5x^4}{5y^4-2x}$$

pero como $mL_t=\frac{dy}{dx}|_{P(1,1)}=\frac{2y-5x^4}{5y^4-2x}|_{P(1,1)}=\frac{2-5}{5-2}=-1$

además $L_t: y-y_0=mL_t(x-x_0)$, de donde $L_t: x+y-2=0$

(3) Encontrar una ecuación de cada una de las rectas normales a la curva $y=x^3-4x$ que sean paralelas la recta L: x + 8y − 8 = 0

Solución

Como $L_t \perp L_n$ y $L_n \parallel L: x+8y-8=0$. entonces:

$$L_t \perp L_n \Rightarrow mL_t = -\frac{1}{mL} \text{ donde } mL = -\frac{1}{8}$$

por lo tanto: $mL_t = -\dfrac{1}{-\frac{1}{8}} = 8$ ...(1)

Además sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto de la curva $y = x^3 - 4x$, entonces $y_0 = x_0^3 - 4x_0$

$mL_t = \dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0} = 3x^2 - 4|_{x=x_0} = 3x_0^2 - 4$ ...(2)

igualando (1) y (2) se tiene: $3x_0^2 - 4 = 8 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2$

para $x_0 = -2$, $y_0 = 0 \Rightarrow P_1(-2,0)$ y $x_0 = 2$, $y_0 = 0 \Rightarrow P_2(2,0)$

como $L_n : y - y_0 = mL_n(x - x_0)$, entonces se tiene:

$$L_n : y - 0 = -\frac{1}{8}(x+2), \quad L_n : y - 0 = -\frac{1}{8}(x-2)$$

④ Demuestre que para la hipérbola cuya ecuación es $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, una ecuación en la línea tangente en (x_0, y_0) es $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$

Solución

Calculando la derivada se tiene: $2b^2x - 2a^2y\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b^2x}{a^2y}$

sí (x_0, y_0) es punto de tangencia de la hipérbola entonces: $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$

además $mL_t = \dfrac{dy}{dx}|_{P_0(x_0,y_0)} = \dfrac{b^2x}{a^2y}|_{P_0(x_0,y_0)} = \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

como $L_t : y - y_0 = mL_t(x - x_0)$ entonces $L_t : y - y_0 = \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$

$$L_t : a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = b^2 x_0 x - b^2 x_0^2$$

$$L_t : b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

$$L_t : b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = a^2 b^2$$

(5) Demuestre que la elipse cuya ecuación es: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, una ecuación de la línea tangente en (x_0, y_0) es $b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$

Solución

Calculando su derivada se tiene: $2b^2x + 2a^2 y \frac{dy}{dx} = 0$

de donde: $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, como $mL_t = \frac{dy}{dx}|_{p_0(x_0, y_0)}$

entonces : $mL_t = -\frac{b^2 x}{a^2 y} | P_0(x_0, y_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, además

$L_t : y - y_0 = mL_t(x - x_0)$, entonces: $L_t : y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$

$L_t : b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$

(6) Encontrar la ecuación para cada una de las rectas que pasan por (-16,-3), y que sean tangentes a la curva $y = \frac{x-1}{x+3}$

Solución

El punto (-16,-3) no está en la curva, entonces para calcular la pendiente tomamos un punto de la curva P(a,b) que es por donde pasa la tangente.

Calculando la pendiente $mL_t = \frac{b+3}{a+16}$ **...(1)**

además $mL_t = \frac{dy}{dx}|_{p(a,b)}$ donde $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(x+3)^2}$, entonces $mL_t = \frac{4}{(a+3)^2}$ **...(2)**

igualando (1) y (2) se tiene: $\frac{b+3}{a+16} = \frac{4}{(a+3)^2} \Rightarrow -3 + \frac{4(a+16)}{(a+3)^2} = b$ **...(3)**

como el punto P(a, b) pertenece a la curva, entonces satisface a la ecuación

$$b = \frac{a-1}{a+3} \quad \text{...(4)}$$

ahora reemplazando (4) en (3) se tiene: $\frac{a-1}{a+3} = -3 + \frac{4(a+16)}{(a+3)^2}$ simplificando se tiene:

$a^2 + 4a - 10 = 0 \Rightarrow a = -2 + \sqrt{14}$, $a = -2 - \sqrt{14}$

para $a = -2 + \sqrt{14}.$, $b = \frac{\sqrt{14}-3}{\sqrt{14}+1}. \Rightarrow mL_t = \frac{4}{(1+\sqrt{14})^2}$

$$L_t : y + 3 = \frac{4}{(1+\sqrt{14})^2}(x+16)$$

para $a = -2 - \sqrt{14}$, $b = \frac{\sqrt{14}+3}{\sqrt{14}-1} \Rightarrow mL_t = \frac{4}{(1-\sqrt{14})^2}$

$$L_t : y + 3 = \frac{4}{(1-\sqrt{14})^2}(x+16)$$

(7) Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x^2 y = x + 1$ cuya inclinación es de 45°

Solución

Como 45° es el ángulo de inclinación de L_t, entonces:

$mL_t = \operatorname{tg} 45° = 1 \Rightarrow mL_t = 1$ **...(1)**

además: $x^2 y = x + 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, derivando

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3} \Rightarrow mL_t=\frac{dy}{dx}|_{x=a}=-\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}$ **...(2)**

igualando (2) y (1) se tiene: $-\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}=1$ de donde $a^3+a+2=0 \Rightarrow$ a = - 1

como p(a, b) pertenece a la curva $\Rightarrow b=\frac{a+1}{a^2}$ para a = -1, b = 0 $\Rightarrow$ P(-1,0),

$L_t: y-0=1(x+1)$, de donde $L_t: x-y+1=0$

(8) Si una recta tangente a la curva $x^4-2x^2-x+y=0$ en el punto (-1, 0) es también tangente a la misma curva en el punto P(a, b), hallar las coordenadas de P.

Solución

Como $mL_t=\frac{dy}{dx}|_{p(-1,0)}=(1+4x-4x^3)|_{p(-1,0)}=1$ **...(1)**

$mL_t=\frac{dy}{dx}|_{p(a,b)}=1+4a-4a^3$ **...(2)**

igualando (1) y (2) se tiene: $1+4a-4a^3=1 \Rightarrow (1-a^2)=0 \Rightarrow$ a = ± 1 $\Rightarrow$ a = 1

como P(a,b) es punto de la curva entonces: $a^4-2a^2-a+b=0$ para a = 1 $\Rightarrow$ b = 2

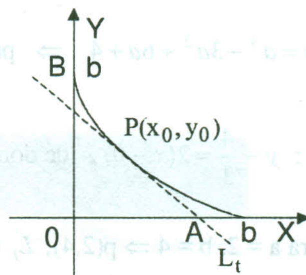
$\therefore$ El punto es P(1, 2)

(9) Probar que la suma de las intersecciones con los ejes coordenadas de cualquier recta tangente a la curva $x^{1/2}+y^{1/2}=b^{1/2}$ es constante e igual a "b". (b > 0)

Solución

Calculando la recta tangente $x^{1/2}+y^{1/2}=b^{1/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$

$$mL_t = \frac{dy}{dx}|_{P_0} = -\sqrt{\frac{y_0}{x_0}}$$



$$L_t = y - y_0 = -\sqrt{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0)$$

$$\sqrt{x_0}\,y + \sqrt{y_0}\,x - y_0\sqrt{x_0} - x_0\sqrt{y_0} = 0$$

$$\sqrt{x_0}\,y + \sqrt{y_0}\,x - \sqrt{x_0 y_0}\,(x_0^{1/2} + y_0^{1/2}) = 0$$

$L_t : \sqrt{x_0}\,y + \sqrt{y_0}\,x = \sqrt{x_0 y_0}\,b^{1/2}$. Ahora calcularemos las intersecciones

$A \in L_t \wedge eje\,x \Rightarrow$ y = 0, $x = \sqrt{x_0}\,b^{1/2}$ y $B \in L_t \wedge eje\,y \Rightarrow$ x = 0, $y = \sqrt{y_0}\,b^{1/2}$

por demostrar que x + y = b (constante).

Luego $x + y = \sqrt{x_0}\,b^{1/2} + \sqrt{y_0}\,b^{1/2} = (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0})b^{1/2} = b^{1/2}.b^{1/2} = b$

$$\therefore\ x + y = b$$

(10) Encontrar una ecuación para cada una de las rectas tangentes a la curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ que sean paralelas a la recta 2x – y + 3 = 0

Solución

Se sabe que L_t // L: 2x – y + 3 + 0 $\Rightarrow mL_t = mL = 2$ **...(1)**

Además $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 2$

como $mL_t = \frac{dy}{dx}|_{p(a,b)} = a^2 - 2a + 2$ **...(2)**

Ahora igualando (1) y (2) se tiene: $a^2 - 2a + 2 = 2 \Rightarrow$ a (a – 2) = 0 $\Rightarrow$ a = 0, a = 2

además el punto p (a, b) pertenece a la curva entonces:

$3b = a^3 - 3a^2 + 6a + 4 \Rightarrow$ para a = 0 $\Rightarrow b = \frac{4}{3} \Rightarrow p(0,\frac{4}{3})$

$L_t : y - \frac{4}{3} = 2(x - 0)$, de donde $L_t : 2x - y + \frac{4}{3} = 0$

para a = 2, b = 4 $\Rightarrow$ p(2,4), $L_t' = y - 4 = 2(x-2)$, de donde $L_t' : 2x - y = 0$

(11) Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$, en el punto cuya coordenada es y = 3.

Solución

Calculando el punto de tangencia para y = 3

$x^3 + 2x + 3 = 0$, Ahora resolveremos la ecuación

1	0	2	3	-1
	-1	1	-3	
1	-1	3	0	

Es la única solución real

Luego el punto de tangencia es: p(-1, 3)

Ahora calculamos la pendiente de la recta tangente:

Para esto derivamos $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ de donde:

$3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} + 2 = 0$ de donde $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+2}{2y}$

evaluando en el punto p(-1,3) se tiene: $mL_t = \frac{dy}{dx}|_{p(-1,3)} = -\frac{3x^2+2}{2y}|_{p(-1,3)} = -\frac{5}{6}$

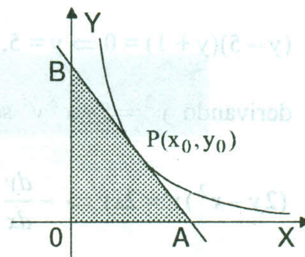
la ecuación de la tangente es: $L_t : y - y_0 = mL_t(x - x_0)$, de donde: $L_t : 5x + 6y - 13 = 0$

también: $L_n : y - 3 = \frac{6}{5}(x+1)$ de donde: $L_n : 6x + 5y + 21 = 0$

(12) Demostrar que el área del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta tangente, en cualquier punto a la curva de ecuación xy = 5 es siempre constante.

Solución

Primeramente encontraremos la recta tangente, como: xy = 5 $\Rightarrow$ $y=\frac{5}{x}$ entonces su pendiente



es: $mL_t=\frac{dy}{dx}|_{P_0(x_0,y_0)}$

$$mL_t=-\frac{5}{x^2}|_{P_0(x_0,y_0)}=-\frac{5}{x_0^2}$$

$$L_t: y-y_0=-\frac{5}{x_0^2}(x-x_0) \Rightarrow L_t: 5x+x_0^2y=y_0x_0^2+5x_0$$

encontrando las intersecciones con los ejes coordenados:

$$A\in L_t \wedge \text{ eje x } \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=\frac{(y_0x_0+5)x_0}{5}$$

$$B\in L_t \wedge \text{ eje y } \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{y_0x_0+5}{x_0}$$

$$\text{área del triángulo}=\frac{xy}{2}=\text{constante}$$

$$\text{Area }=\frac{(y_0x_0+5)x_0(y_0x_0+5)}{5x_0}=\frac{(y_0x_0+5)^2}{5}=\frac{(5+5)^2}{5}=20$$

(13) Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva:

$y=\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^{2\cdots}}}}$, en el punto de abscisa 2.

Solución

$y=\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^{2\cdots}}}}$ elevado al cuadrado

$y^2=5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{\ldots\ldots}}}$ de donde $y^2=5+x^2y$

ahora calculando el punto para $x=2 \Rightarrow y^2 = 5+4y \Rightarrow y^2-4y-5=0$

$(y-5)(y+1)=0 \Rightarrow y=5,\ y=-1$ como $y>0 \Rightarrow p(2,5)$

derivando $y^2 = 5+x^2y$ se tiene: $2yy' = 2xy + x^2y'$

$$(2y-x^2)y' = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2y-x^2}$$

$$mL_t = \frac{dy}{dx}|_{p(2,5)} = \frac{20}{10-4} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

como $L_t : y-y_0 = mL_t(x-x_0)$, de donde $L_t : 10x-3y-5=0$

como $L_n \perp L_t \Rightarrow mL_n = -\frac{1}{mL_t} = -\frac{3}{10}$

$L_n : y-5 = -\frac{3}{10}(x-2)$ por lo tanto $L_n : 3x+10y-56=0$

(14) Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $x=t^2-t$, $y=t^3+1$

Solución

$$\begin{cases} y=t^3+1 \\ x=t^2-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt}=3t^2 & \frac{d^2y}{dt^2}=6t \\ \frac{dx}{dt}=2t-1 & \frac{d^2x}{dt^2}=2 \end{cases}$$, entonces: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t-1}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{dy}{dx}) = \frac{\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}}{(\frac{dx}{dt})^3} = \frac{(2t-1)6t-3t^2(2)}{(2t-1)^3} \qquad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6t+6t^2}{(2t-1)^3}$$

(15) Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $x=\cos^3 t$, $y=a\,\text{sen}^3 t$

Solución

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ \\ y = a\,\text{sen}^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t \\ \\ \frac{dy}{dt} = 3a\,\text{sen}^2 t\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 6a\cos t\,\text{sen}^2 t - 3a\cos^3 t \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 6a\,\text{sen}\,t\cos^2 t - 3a\,\text{sen}^3 t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\,\text{sen}^2 t.\cos t}{-3a\cos^2 t.\text{sen}\,t} = -\frac{\text{sen}\,t}{\cos t} = -\text{tg}\,t \text{, entonces: } \frac{dy}{dx} = -\text{tg}\,t \text{,}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}{(\frac{dx}{dt})^3} = \frac{-3a\cos^2 t.\text{sen}\,t(6a\,\text{sen}\,t.\cos^2 t - 3a\,\text{sen}^3 t)}{(-3a\cos t^2.\text{sen})^3}$$

$$-\frac{(6a\cos t sen^2 t - 3a\cos t)(3a sen^2 t\cos t)}{(-3a\cos t^2 .sen)^3}$$

$$= \frac{-18a^2\cos^4 t\,\text{sen}^2 t + 9a^2\cos^2 t\,\text{sen}^4 t}{(-3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t)^3} - \frac{18a^2\cos^2 t\,\text{sen}^4 t - 9a^2\cos^4 t\,\text{sen}^2 t}{(-3a\cos t^2.\text{sen}\,t)^3}$$

$$= \frac{9a^2\cos^2 t\,\text{sen}^2 t(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}{-27a^3\cos^6 t\,\text{sen}^3 t} = \frac{1}{(\cos^4 t\,\text{sen}\,t)3a} \quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^4 t.\csc t}{3a}$$

(16) Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $t = 0$ sí $\begin{cases} x = Ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} x = Ln(1+t^2) \\ \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \\ \frac{dy}{dt} = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}.\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}.\frac{dy}{dx}}{(\frac{dx}{dt})^3}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}.2-\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}2t}{(\frac{2t}{1+t^2})^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4t(1+t^2)-4t+4t^3}{8t^3}(1+t^2)=\frac{8t^3(1+t^2)}{8t^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=(1+t^2)\text{, de donde: } \frac{d^2y}{dt^2}|_{t=0}=(1+t^2)|_{t=0}=1$$

(17) Hallar las ecuaciones de la tangente y normal a la curva en el punto correspondiente al valor del parámetro que se indica

a) $x=t^2+1,\ y=t^3+2t,\ t=-2$

Solución

$$\begin{cases} y=t^3+2t \\ x=t^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt}=3t^2+2 \\ \frac{dx}{dt}=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt}|_{t=-2}=14 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=-2}=-4 \end{cases}$$

$$mL_t=\frac{dy}{dx}|_{P_0}=\frac{\frac{dy}{dt}|_{t=-2}}{\frac{dx}{dt}|_{t=-2}}=\frac{14}{-4}=-\frac{7}{2}$$

como $L_t: y-y_0=mL_t(x-x_0)$ donde para t = -2, x = 5, y = -12 $\Rightarrow$ p(5,-12)

$$L_t: y+12=-\frac{7}{2}(x-5)\text{, de donde: } L_t: 7x+2y=11$$

además $L_n \perp L_t \Rightarrow mL_n=-\frac{1}{mL_t}=\frac{2}{7}$

$$L_n: y-y_0=mL_t(x-x_0)\text{, de donde: } L_n: 2x-7y=94$$

b) $x = 3\text{sent} - 4, \quad y = 5 + 2\text{cost}, \quad t = \frac{5\pi}{4}$

Solución

$$\begin{cases} y = 5 + 2\cos t \\ x = 3\operatorname{sen} t - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -2\operatorname{sen} t, \\ \frac{dx}{dt} = 3\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt}\big|_{t=5\pi/4} = \sqrt{2} \\ \frac{dx}{dt}\big|_{t=5\pi/4} = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

para $t = \frac{5\pi}{4}$, $x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 4$, $y_0 = 5 - \sqrt{2} \Rightarrow p(-\frac{3\sqrt{2}}{2} - 4, 5 - \sqrt{2})$

$$mL_t = \frac{dy}{dx}\big|_{P_0} = \frac{\frac{dy}{dt}\big|_{t=5\pi/4}}{\frac{dx}{dt}\big|_{t=5\pi/4}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{-3\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{3}$$

como $L_t : y - y_0 = mL_t(x - x_0)$, de donde: $L_t : 2x + 3y - 7 + 6\sqrt{2} = 0$

además $L_n \perp L_t \Rightarrow mL_n = -\frac{1}{mL_t} = -\frac{3}{2}$

$$L_n : y - y_0 = mL_n(x - x_0)$$

$L_n : y - 5 + \sqrt{2} = \frac{3}{2}(x + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 4)$, de donde: $L_n : 3x - 2y + 22 + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$

(18) Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Hallar $f^{(n)}(x)$

Solución

Si $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$f''(x) = \frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{1.2.3}{(1-x)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1.2.3...n}{(1-x)^{n+1}}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad \therefore \quad f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(19) Si $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Hallar $f^{(n)}(x)$

Solución

$$f(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{1.1}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{1.2.3.}{(1-x)^4}$$

$$f^{iv}(x)=\frac{1.2.3.4}{(1-x)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 1.2.3...n}{(1-x)^{n+1}}=\frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad \therefore f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(20) Si $f(x)=\frac{5x-2}{x^2-4}$; Hallar $f^{(n)}(x)$

Solución

$$\frac{5x-2}{x^2-4}=\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

5x – 2 = (A+B)x + -2A + 2B, por igualdad se tiene: $\begin{cases} A+B=5 \\ -2A+2B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}$

$$f(x)=\frac{5x-2}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2},$$ derivando se tiene:

$$f'(x)=\frac{-3.1}{(x+2)^2}-\frac{2.1}{(x-2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{3.1.2.}{(x+2)3}+\frac{2.1.2.}{(x-2)^3}$$

$$f'''(x)=-\frac{3.1.2.3}{(x+2)^4}-\frac{2.1.2.3.}{(x-2)^4}$$

$$f^{iv}(x)=\frac{3.1.2.3.4}{(x+2)^5}+\frac{2.1.2.3.4}{(x-2)^5}$$

.

.

.

$$f^{(n)}(x)=\frac{3.(-1)^n 1.2.3...n}{(x+2)^{n+1}}+\frac{2.(-1)^n 1.2.3...n}{(x-2)^{n-1}} \quad \therefore \; f^{(n)}(x)=\frac{3(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}+\frac{2.(-1)^n n!}{(x-2)^{n-1}}$$

(21) Determinar la derivada n-ésima de la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^3-7x+6}$

Solución

Para calcular la derivada n-ésima de la función f(x) primeramente descomponemos en fracciones parciales.

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-7x+6}=\frac{x^2+x+1}{(x-2)(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}$$

$$=\frac{A(x-1)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x+3)}$$

$$x^2+x+1=A(x^2+2x-3)+B(x^2+x-6)+C(x^2-3x+2)$$

$$x^2+x+1=(A+B+C)x^2+(2A+B-3C)x-3A-6B+2C$$

por identidad de polinomios se tiene: $\begin{cases} A+B+C=1 \\ 2A+B-3C=1 \\ -3A-6B+2C=1 \end{cases}$, la solución es: $\begin{cases} A=\frac{7}{5} \\ B=-\frac{3}{4} \\ C=\frac{7}{20} \end{cases}$

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-7x+6}=\frac{7}{5}(\frac{1}{x-2})-\frac{3}{4}(\frac{1}{x-1})+\frac{7}{20}(\frac{1}{x+3})$$

$$f'(x)=\frac{7}{5}(\frac{1}{(x-2)^2})-\frac{3}{4}(\frac{-1}{(x-1)^2})+\frac{7}{20}(\frac{-1}{(x+3)^2})$$

$$f''(x)=\frac{7}{5}(\frac{1.2}{(x-2)^3})-\frac{3}{4}(\frac{1.2}{(x-1)^3})+\frac{7}{20}(\frac{1.2}{(x+2)^3})$$

$$f'''(x)=\frac{7}{5}(\frac{-1.2.3}{(x-2)^4})-\frac{3}{4}(\frac{-1.2.3}{(x-1)^4})+\frac{7}{20}(\frac{-1.2.3}{(x+3)^4})$$

$$f^{iv}(x)=\frac{7}{5}(\frac{1.2.3.4}{(x-2)^5})-\frac{3}{4}(\frac{1.2.3.4}{(x-1)^5})+\frac{7}{20}(\frac{1.2.3.4}{(x+3)^5})$$

.
.
.

$$f^{(n)}(x)=\frac{7}{5}\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{3}{4}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{7}{20}\frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}$$

(22) Hallar la n-ésima derivada de la función $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$

Solución

Descomponemos de la función f(x) en sumas parciales

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$1=A(x-1)^2+B(x^2-3x+2)+C(x-2)$$

$1=(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+A+2B-2C$, por igualdad de polinomios se tiene:

$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-3B+C=0 \\ A+2B-2C=1 \end{cases}$, resolviendo se tiene: $\begin{cases} A=-1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{-1.2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{1.2}{(x-2)^3}-(\frac{1.2}{(x-1)^3})-(\frac{1.2.3}{(x-1)^4})$$

$$f'''(x)=\frac{-1.2.3}{(x-2)^4}-(\frac{-1.2.3}{(x-1)^4})-(\frac{-1.2.3.4}{(x-1)^5})$$

$$f^{iv}(x)=\frac{1.2.3.4}{(x-2)^5}-\frac{1.2.3.4}{(x-1)^5}-\frac{1.2.3.4.5}{(x-1)^6}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n1.2..n}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n1.2.3..n}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n1.2...n(n+1)}{(x-1)^{n+2}}$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\,n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n\,n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n\,(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

(23) Calcular $f^{(n)}(0)$ si $f(x) = Ln(\frac{1}{1-x})$

Solución

$$f(x) = Ln(\frac{1}{1-x}) = -Ln(1-x)\text{ , derivando}$$

$$f'(x) = -\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$f^{IV}(x) = \frac{1.2.3}{(1-x)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.2.3...(n-1)}{(1-x)^n} = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \quad \text{si} \quad f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (n-1)!$$

(24) Si $f(x) = Ln(\frac{mx+b}{mx-b})$; Hallar $f^{(n)}(1)$

Solución

$$f(x) = Ln(\frac{mx+b}{mx-b}) = Ln(mx+b) - Ln(mx-b)$$

$$f'(x) = \frac{m}{nx+b} - \frac{m}{mx-b}$$

$$f''(x) = (\frac{-m^2}{(mx+b)^2}) - (\frac{-m^2}{(mx-b)^2})$$

$$f'''(x)=(\frac{m^3.1.2}{(mx+b)^3})-(\frac{m^3.1.2}{(mx-b)^3})$$

$$f^{iv}(x)=(\frac{-m^4.1.2.3}{(mx+b)^4})-(\frac{-m^4 1.2.3}{(mx-b)^4})$$

$$f^{v}(x)=(\frac{m^5 1.2.3.4}{(mx+b)^5})-(\frac{m^5.1.2.3.4}{(mx-b)^5})$$

.
.
.

$$f^{(n)}(x)=\frac{m^n(-1)^{n+1}1.2.3...(n-1)}{(mx+b)^n}-\frac{m^n(-1)^{n+1}1.2.3...(n-1)}{(mx-b)^n}$$, entonces:

$$f^{(n)}(x)=\frac{m^n(-1)^{n+1)}(n-1)!}{(mx+b)^n}-\frac{m^n(-1)^{n+1}(n-1)!}{(mx-b)^n}$$

$$f^{(n)}(1)=\frac{(m^n(-1)^{n+1}(n-1)!)[(m-b)^n-(m+b)^n]}{(m^2-b^2)^n}$$

4.23 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1. Formar las ecuaciones de las tangentes a la línea $y=x-\frac{1}{x}$ en los puntos de su intersección con el eje de abscisas. **Rpta.** y = 2x - 2, y = 2x + 2

2. Trazar la tangente a la hipérbola $y=\frac{x+9}{x+5}$ de modo que atraviese el origen de coordenadas. **Rpta.** x + 25y = 0 , x + y = 0

3. Formar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ que sean perpendiculares a la recta: 2x + 4y – 3 = 0 **Rpta.** 2x-y+1=0 2x – y – 1 = 0

(4) Formar la ecuación de la tangente a la línea $y = x^3 + 3x^2 - 5$, perpendicular a la recta $2x - 6y + 1 = 0$ **Rpta.** $3x + y + 6 = 0$

(5) Formar la ecuación de la normal a la línea $y = -\sqrt{x} + 2$ en el punto de su intersección con la bisectriz del primer ángulo coordenado. **Rpta.** $2x - y - 1 = 0$, $4x - y - 12 = 0$

(6) Formar la ecuación de la normal a la parábola: $y = x^2 - 6x + 2$ perpendicular a la recta que une el origen de coordenadas con el vértice de la parábola. **Rpta.** $4x - 4y - 21 = 0$

(7) Trazar la normal a la línea y = xLnx que sea paralela a la recta 2x - 2y + 3 = 0

Rpta. $x - y - 3e^{-2} = 0$

(8) Hallar la ecuación de la recta tangente a la línea $x^2(x + y) = a^2(x - y)$ en el origen de coordenadas. **Rpta.** y = x

(9) Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 6x$, y perpendicular a la recta $x - 2y + 6 = 0$ **Rpta.** $2x + y + 3 = 0$

(10) Determine una ecuación de cada una de las rectas normales a la curva $y = x^3 - 4x$ y paralela a la recta $x + 8y - 8 = 0$ **Rpta.** $x + 8y + 2 = 0$, $x + 8y - 2 = 0$

(11) Determine una ecuación de cada una de las rectas normales a la curva $y = x^3 - 4x$ y paralela a las rectas que pasan por el punto (4, 13) y que son tangente a: $y = 2x^2 - 1$

Rpta. $4x - y - 3 = 0$, $28x - y - 99 = 0$

(12) Obtener una ecuación de la recta tangente a la curva $y = (7x - 6)^{-1/3}$ que es perpendicular a la recta: $12x - 7y + 2 = 0$ **Rpta.** $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7}{12}(x - \frac{2\sqrt{2} + 6}{7})$

(13) ¿En que punto de la curva $x + \sqrt{xy} + y = 1$, la recta tangente es paralela al eje X ?

Rpta. p(1,0)

(14) Hay dos rectas que pasan por el punto (-1,3) que son tangentes a la curva $x^2+4y^2-4x-8y+3=0$, obtenga una ecuación de cada una de estas rectas.

Rpta. $4y+11x-1=0,\ 4y+x-13=0$

(15) Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $\sqrt[3]{xy}=14x+y$, en el punto (2,-32)

Rpta. $352x+23y+32=0$

(16) Obtener las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a la curva $2x^3+2y^3-9xy=0$ en el punto (2,1) **Rpta.** $5x-4y-6=0,\ 4x+5y-13=0$

(17) Hallar las ecuaciones de las dos tangentes a la elipse $4x^2+y^2=72$ que pasan por el punto (4,4) **Rpta.** $2x+y=12,\ 14x+y=60$

(18) Hallar las ecuaciones de la tangente a la estrofoide $y=-x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ en el punto $(-\frac{3a}{5},\frac{6a}{5})$ **Rpta.** $31x+8y+9a=0,\ 8x-31y+42a=0$

(19) Demostrar que la ecuación de la tangente a la curva $y=ax^2+bx+c$ en el punto (x_1,y_1) es: $y=2(ax_1+b)x-ax_1^2+c$.

(20) Demostrar que la ecuación de la tangente a la curva $y=x^3+ax+b$ en el punto (x_1,y_1) es: $y=(3x_1^2+a)x-2x_1^3+b$

(21) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2) y es normal a la curva $x^2=4y$ **Rpta.** $y=-x+3$

(22) Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y^2+4x=0$ y que pasa por el punto (2,1) **Rpta.** $x+2y-4=0,\ x-y-1=0$

(23) Hallar las rectas normales a la curva xy – 2x + 4 = 0 en donde su abscisa es igual a su ordenada. **Rpta.** $y=-\frac{x}{3}+\frac{8}{3}$, $y=-\frac{x}{3}-\frac{8}{3}$, x + 2y – 4 = 0

(24) Demostrar que la hipérbola $x^2-y^2=5$ y la elipse $4x^2+9y^2=72$ se cortan en ángulos rectos.

(25) Demostrar que los círculos $x^2+y^2=8ax$ y la cisoide $(2a-x)y^2=x^3$ son perpendiculares en el origen.

(26) Hallar las ecuaciones de las normales a la hipérbola $4x^2-y^2=36$ paralelas a la recta 2x + 5y = 4 **Rpta.** 2x + 5y – 50 = 0, 2x + 5y + 50 = 0

(27) Hallar una ecuación de la recta normal a la curva $x-y=\sqrt{x+y}$ en el punto (3, 1)

Rpta. 5x + 3y = 18

(28) Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y=8\operatorname{sen}^3 2x$ en el punto $(\frac{\pi}{12},1)$ **Rpta.** $y=6\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}+1$, $y=\frac{\pi}{72\sqrt{3}}+1-\frac{x}{6\sqrt{3}}$

(29) Demuestre que las tangentes al folio de descartes $x^3+y^3=3axy$ en los puntos de intersección con la parábola $y^2=ax$ son paralelas al eje de las Y.

(30) Halle la ecuación de la parábola $y=x^2+bx+c$ que es tangente a la recta y = x en el punto (1, 1) **Rpta.** $y=x^2-x+1$

(31) Hallar una ecuación de la recta tangente y una ecuación de al recta normal a la curva dada en el punto indicado.

a) $x^3-3xy^2+y^3=1$, p(2,-1) **b)** $x^2-2xy+y^2+2x+y-6=0$, p(2,2)

c) $x^3+y^2+2x-6=0$ en y = 3 **d)** $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$ en x = 1

e) $x\sqrt{xy}+2y^2-3=0$, p(1,1) **f)** $\sqrt{3+x^2y^2}-\frac{2x^2}{y^2}=0$, p(1,1)

(32) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal en el punto p(-1,2) a la curva $ye^{x+1}+2xy^2-y+2x^2+6=0$

(33) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a la gráfica de $f(x)=(2-3x+x^3)\sqrt{1+x^2}$ en el punto x = 0.

(34) Determinar la ecuación de la recta que pasa por (0,2) y es tangente a la gráfica de $f(x)=2x^3-5x+6$.

(35) Determinar los valores de a, b y c de modo que: $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=x^2+cx$, tienen la misma recta tangente en el punto (2,2).

(36) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto p(-1,2) y es tangente la curva xy + 3y = x − 1.

(37) Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x^2y=x+1$ cuya inclinación es 45°.

(38) Encontrar una ecuación de la recta normal a la curva $y=x\sqrt{16+x^2}$ en el origen.

(39) Hallar $\frac{dy}{dx}$ de las funciones siguientes dadas en forma paramétricas:

a) $\begin{cases} x=\dfrac{2at}{1+t^2} \\ y=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{2t}{1-t^2}$

b) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\,\text{sen}\,t) \\ y=a(\text{sen}\,t-t\cos t) \end{cases}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\text{tg}\,t$

c) $\begin{cases} x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y=\dfrac{\text{sen}^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$ **Rpta.** $\frac{dy}{dx}=\text{tg}\,t.\frac{3-4\,\text{sen}^2 t}{1-4\,\text{sen}^2 t}$

d) $\begin{cases} x = arc.\cos(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}) \\ y = arc.\text{sen}(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}) \end{cases}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx} = -1$

e) $\begin{cases} x = a(Ln\,\text{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t - \text{sen}\,t) \\ y = a(\text{sen}\,t + \cos t) \end{cases}$ **Rpta.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a(\cos t - \text{sen}\,t)}{a(\dfrac{1}{2}\text{tg}\dfrac{t}{2} - \text{sen}\,t - \cos t)}$

(40) Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ de las siguientes funciones dadas en forma paramétrica.

a) $\begin{cases} x = Lnt \\ y = t^3 \end{cases}$ **Rpta.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 9t^3$

b) $\begin{cases} x = arc.\text{tg}\,t \\ y = Ln(1+t^2) \end{cases}$ **Rpta.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$

c) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\text{sen}^3 t \end{cases}$ **Rpta.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t.\text{sen}\,t}$

d) $\begin{cases} x = arc.\text{tg}\,t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$ **Rpta.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = +(1+t^2)(3t^2+1)$

e) $\begin{cases} x = arc.\cos\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t-t^2} \end{cases}$ **Rpta.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\sqrt{t-t^2}$

(41) Hallar la ecuación cartesiana en cada una de los siguientes casos:

a) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta \\ y = 2\,\text{sen}\,\theta - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2\cos\theta + 1 \\ y = 3\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ **Rpta.** $(\dfrac{x-1}{2})^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $\begin{cases} x = \dfrac{at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{at^2}{1+t^3} \end{cases}$ **Rpta.** $x^3 + y^3 - axy = 0$

e) $\begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases}$ **Rpta.** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

f) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ **Rpta.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

(42) Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = 2t + 3t^2$, $y = t^2 + 2t^3$ satisface la relación $y = y'^2 + 2y'^3$

(43) Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \dfrac{1+t}{t^3}$, $y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}$ satisface la relación $xy'^3 = 1 + y'$

(44) Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - Ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$, $y = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, satisface la relación $y\sqrt{1+y'^2} = y'$

(45) Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}$, $y = \dfrac{3+2Lnt}{t}$ satisface la relación $yy' = 2xy'^2 + 1$

(46) Demostrar que y, determinada como función de x por las ecuaciones x = sent e $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$ satisface la ecuación diferencial $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 2y$, cualquiera que sean a y b

47 Hallar $\dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{[1+(\dfrac{dy}{dx})^2]^{3/2}}$ para $t=\dfrac{\pi}{2}$ donde: $\begin{cases} x=a(t-\cos t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ para a > 0, t ∈[0,2π]

Rpta. $\dfrac{1}{2\sqrt{2a}}$

48 Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva en el punto correspondiente al valor del parámetro que se indica.

a) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{t^2+1} \\ y=\dfrac{3t^2}{t^3+1} \end{cases}$, t = 0

b) $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=2\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$, $t=\dfrac{\pi}{3}$

c) $\begin{cases} x=3\operatorname{sen} t-4 \\ y=5+2\cos t \end{cases}$, $t=\dfrac{5\pi}{4}$

d) $\begin{cases} x=ae^t\cos t \\ y=ae^t\operatorname{sen} t \end{cases}$, t = 0

e) $\begin{cases} x=2Ln(c\operatorname{tg} t)+1 \\ y=\operatorname{tg} t+c\operatorname{tg} t \end{cases}$, $t=\dfrac{\pi}{4}$

f) $\begin{cases} x=t(t\cos t-2\operatorname{sen} t) \\ y=t(t\operatorname{sen} t+2\cos t) \end{cases}$, $t=\dfrac{\pi}{4}$

49 Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=-\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}$ en el punto (2,2) **Rpta.** 7x – 10 y + 6 = 0, 10x + 7y – 35 = 0

50 Escribir la ecuación de la tangente a la curva x = t cost , y = t sent en el origen de coordenadas y en el punto $t=\dfrac{\pi}{4}$ **Rpta.** $y-\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{4+\pi}{4-\pi}(x-\dfrac{\pi}{8})$

51 Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la cicloide $x=\sqrt{2}\cos^3 t$, $y=\sqrt{2}\operatorname{sen}^3 t$ en el punto $t=\dfrac{\pi}{4}$ **Rpta.** x + y = 1, x – y = 0

(52) Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la cicloide x = t – sent, y = 1 – cost en el punto para que el $t = \frac{\pi}{2}$

(53) Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la parábola semicúbica $x = t^2$, $y = t^3$ en el punto para que t = 2 **Rpta.** 3x – y – 4 = 0 , x + 3y – 28 = 0

(54) Hallar $f^{(n)}(x)$ en cada una de las funciones sgtes:

a) f(x) = senx **Rpta.** $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{n\pi}{2})$

b) f(x) = cos2x **Rpta.** $f^{(n)}(x) = 2^n \cos(2x + \frac{n\pi}{2})$

c) $f(x) = (ax+b)^n$ **Rpta.** $f^{(n)}(x) = n!\,a^n$

d) f(x) = cosx **Rpta.** $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

e) $f(x) = e^{kx}$ **Rpta.** $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$

(55) Hallar $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = x^n \sqrt{x}$ **Rpta.** $f^{(n)}(x) = \frac{3.5.7...(2n+1)\sqrt{x}}{2^n}$

(56) Hallar $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ **Rpta.** $f^{(n)}(x) = \frac{n!\,(ad-bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$

(57) Hallar $f^{(n)}(x)$, si $f(x) = \operatorname{sen} ax + \cos bx$

Rpta. $f^{(n)}(x) = a^n \operatorname{sen}(ax + \frac{n\pi}{2}) + b^n \cos(bx + \frac{n\pi}{2})$

(58) Hallar $f^{(n)}(x)$ si:

a) $f(x) = xe^x$ **Rpta.** $f^{(n)}(x) = e^x (x+n)$

b) $f(x) = xLnx$ **Rpta.** $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$, $n \geq 2$

c) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ **Rpta.** $f^{(n)}(x)=2^{n-1}\operatorname{sen}[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}]$

d) $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ **Rpta.** $f^{(n)}(x)=(-1)^n n![\frac{1}{(x-2)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}]$

e) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ **Rpta.** $f^{(n)}(x)=(-1)n\frac{n!}{2}[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}]$

f) $f(x)=e^x\operatorname{sen}x$ **Rpta.** $f^{(n)}(x)=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\operatorname{sen}(x+k\frac{\pi}{2})$

(59) Hallar $f^{(n)}(x)$ si:

a) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$

b) $f(x)=\frac{x+1}{x-x^2}$

c) $f(x)=\frac{8x-5}{2x^2+x-6}$

d) $f(x)=\frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2-x-2}$

e) $f(x)=\frac{4x+1}{2x^2+x-3}$

f) $f(x)=\frac{2x^3-19x+43}{x^2-9x+20}$

g) $f(x)=\frac{3x^2+5x-1}{x^3-x^2-4x+4}$

h) $f(x)=\frac{2x+1}{6x^2-x-1}$

i) $f(x)=\frac{5x-1}{x^2+x-12}$

j) $f(x)=\frac{x^6+x^2-1}{x^2+x-2}$

CAPITULO V

5. APLICACIONES DE LA DERIVADA.

Ya se ha tratado una aplicación de la derivada, al hacer el estudio de las rectas tangentes y normales a la gráfica de una función.

Una de las aplicaciones más importantes y útiles de la derivada está en el estudio de los valores máximos y mínimos de una función. Existen muchos problemas prácticos en los cuales se trata de encontrar una "mejor" manera de formularse problemas relacionados en la determinación de los valores máximos y mínimos de una función; ahora nos dedicaremos gran parte de este trabajo al estudio de los máximos y mínimos.

Cuando se piensa que una derivada como en la razón instantánea de una función, se presenta muchas aplicaciones físicas de la derivada, las aplicaciones más obvias de la derivada en problemas de este tipo, es la determinación de la velocidad y aceleración de un objeto móvil los cuales también estudiaremos.

5.1 VALORES MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION.-

a) DEFINICION.- La función $f: D \subset R \to R$, tiene un valor máximo absoluto en f(c) donde:

$$c \in D \text{ si } f(c) \geq f(x),\ \forall x \in D$$

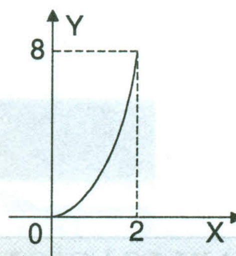
b) DEFINICION.- La función $f: D \subset R \to R$, tiene un valor mínimo absoluto en f(c) donde:

$$c \in D \text{ si } f(c) \leq f(x),\ \forall x \in D$$

OBSERVACIÓN.- Algunas funciones tienen máximos ó mínimos absoluto sobre un intervalo y otras no.

Ejemplo.

La función $f(x)=x^3$, tiene a 8, como valor máximo absoluto y a "0", como valor mínimo absoluto en el intervalo cerrado [0, 2] pero en él, intervalo abierto <0, 2> no tiene máximo ni mínimo absoluto.

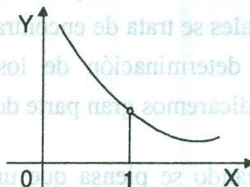


5.2 TEOREMA.-

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f tiene un valor mínimo absoluto y un valor máximo absoluto en el intervalo cerrado [a, b].

OBSERVACIÓN.- Si el intervalo no es cerrado, el teorema no necesariamente se cumple. Por ejemplo:

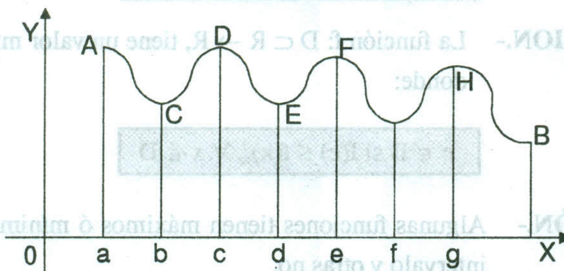
La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es continua en <0,1> pero no tiene máximo absoluto.



5.3 EXTREMOS DE UNA FUNCION.-

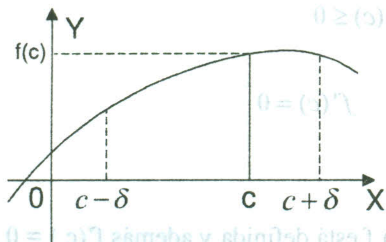
Consideremos una función f continua en el intervalo cerrado [a, b].

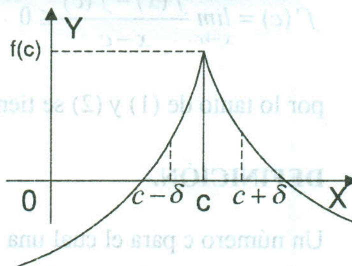
Observando la figura se tiene que los puntos A y D son los más saltantes de la curva desde x = a hasta x = b, y el punto B es el más bajo; luego a las ordenadas de A y D que son f(a), f(c) le llamaremos valores máximos absolutos, pero los puntos F y H se denomina máximos relativos y los puntos C, E y G se denomina mínimos relativos. Por lo tanto, llamaremos extremos de una función a un valor máximo relativo ó a un valor mínimo relativo de una función.



a) DEFINICIÓN.-

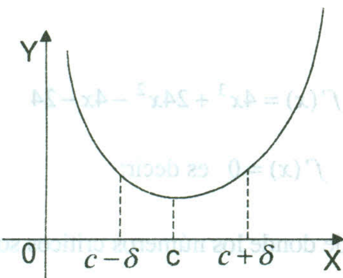
Diremos que f(c) es una valor máximo relativo de una función f si existe un intervalo abierto <c – δ, c + δ> con δ > 0 tal que f(x) está definida y f(x) ≤ f(c), ∀ x ∈ <c – δ, c + δ>

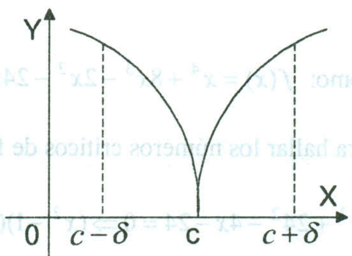




b) DEFINICIÓN.-

Diremos que f(c) es un valor mínimo relativo de una función f si existe un intervalo abierto <c – δ, c + δ>, tal que: f (c) está definida y f(x) ≥ f(c) ∀ x ∈ <c– δ, c+ δ>.





c) TEOREMA

Consideremos una función f continua en el intervalo abierto <a, b> y sea c ∈ <a, b>, si f(c) es un extremo relativo de f, entonces $f'(c)=0$ ó $f'(c)$ no existe.

Demostración

Consideremos que f(c) sea un valor máximo relativo, suponiendo que $f'(c)$ existe $\Rightarrow \exists$ <c – δ, c + δ>, con δ > 0, tal que ∀ x ≠ c, f(x) ≤ f(c) ⇒ f(x) – f(c) ≤ 0, cuando x ∈ <c-δ,c> ⇒ x < c ⇒ x – c < 0. Luego ∀ x ∈ <c – δ, c>,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \text{, de donde } f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad f'(c)\geq 0 \quad \textbf{...(1)}$$

cuando x ∈ <c, c+δ> ⇒ x > c ⇒ x − c > 0

luego ∀ x ∈ <c, c+δ>, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$, de donde

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) \le 0 \qquad \text{...(2)}$$

por lo tanto de (1) y (2) se tiene que: $f'(c) = 0$

d) DEFINICIÓN.-

Un número c para el cual una función f está definida y además f'(c) = 0 ó no existe, le llamaremos número crítico o valor critico de f.

Ejemplo.- Encontrar los puntos críticos de:

① $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 24x + 1$

Solución

Como: $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 24x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 + 24x^2 - 4x - 24$

para hallar los números críticos de f, hacemos $f'(x) = 0$ es decir:

$4x^3 + 24^2 - 4x - 24 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x+6) = 0$ de donde los números críticos son {-6,-1,1}

② $f(x) = (x-1)^{2/3} + 1$

Solución

Como $f(x) = (x-1)^{2/3} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$

Luego para hallar los números críticos se tiene que no existe $f'(x)$ por lo tanto $\sqrt[3]{x-1} = 0 \Rightarrow$ x = 1 es un número crítico.

③ $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$

Solución

Como $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}=x^3+\dfrac{3}{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$

Los puntos críticos se encuentran cuando $f'(x)=0$ ó no existe $f'(x)$

Si $f'(x)=0 \Rightarrow x^4-1=0 \Rightarrow$ x = ± 1 valores críticos

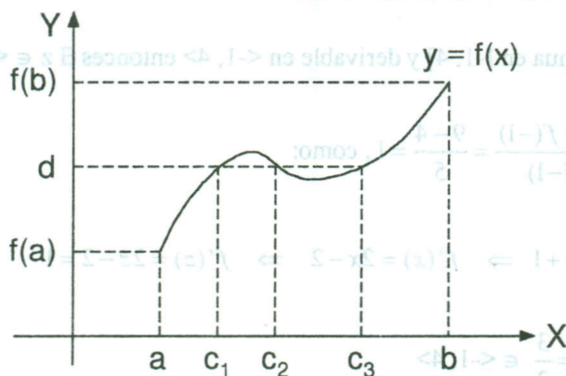
Si no existe $f'(x) \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow$ x = 0

Sin embargo no es un valor crítico, porque la función f(x) no está definida en x = 0.

Luego x = 0 es punto de discontinuidad.

5.4. TEOREMA (DE LOS VALORES INTERMEDIOS).-

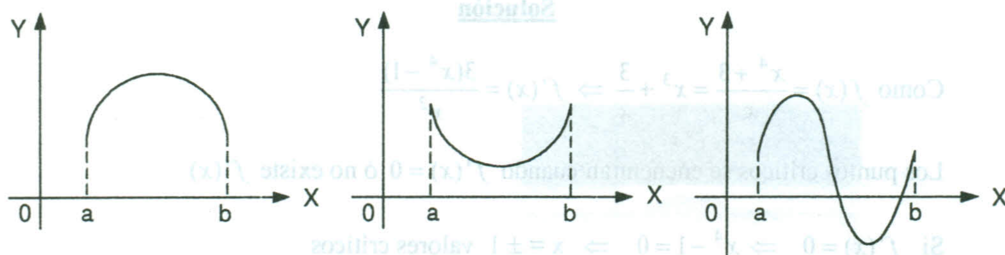
Si f es una función continua en [a,b], m y M son los mínimo y el máximo de f en [a,b] y d es tal que: m < d < M. Entonces existe: c ∈ <a,b> tal que: f(c) = d



En algunos casos es muy difícil determinar los números críticos de una función, de hecho no siempre hay números críticos.

El siguiente teorema que se atribuye al gran matemático francés: MICHEL ROLLE, da condiciones suficientes para la existencia de un numero critico.

El teorema se anuncia para funciones continuas en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en <a,b> tal que f(a) = f(b).



Observando la gráfica deducimos que es razonable esperar que existe un numero c entre a y b tal que la recta tangente en el punto (c, f(c)) sea horizontal o equivalente: $f'(c)=0$, que viene a ser precisamente la conclusión del siguiente teorema:

Ejemplo.- Halle el posible valor de z que satisface el teorema del valor medio para la función $f(x)=x^2-2x+1$, x ∈ [-1, 4]

Solución

Según el teorema del valor medio se tiene:

Si f(x) es continua en [-1, 4] y derivable en <-1, 4> entonces ∃ z ∈ <-1,4>, tal que:

$$f'(z)=\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{9-4}{5}=1, \text{ como:}$$

$$f(x)=x^2-2x+1 \Rightarrow f'(x)=2x-2 \Rightarrow f'(z)=2z-2=1$$

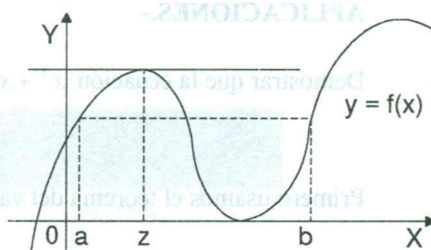
$$2z=3 \Rightarrow z=\frac{3}{2} \in \langle -1,4\rangle \qquad \therefore \quad z=\frac{3}{2}$$

5.5 TEOREMA DE ROLLE.-

Sea f una función continua en [a, b] y derivable en el intervalo abierto <a,b>; si f(a) = f(b), entonces existe un número z ∈ <a, b>, tal que: $f'(z)=0$.

Demostración

Primeramente daremos una interpretación geométrica del teorema.



Geométricamente quiere decir, si f es una función continua y derivable en <a,b> y f(a) f(b) ⇒ ∃ z ∈ <a, b>, donde la recta tangente es horizontal.

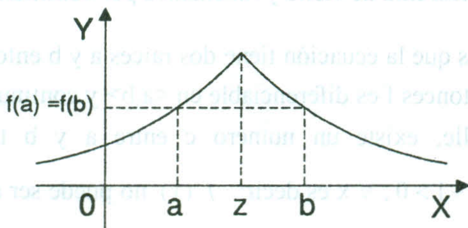
Ahora daremos la demostración del teorema:

Si f(x) = f(a), ∀ x ∈ [a, b] ⇒ es una función constante y por lo tanto $f'(z) = 0$, ∀ z ∈ <a,b> si f(x) > f(a) para algún x ∈ <a, b> ⇒ el valor máximo absoluto de la función continua f en [a, b] no es f(a) ni f(b), es decir que ∃ z ∈ <a, b> tal que f(z) es el valor máximo absoluto de f en [a, b]. Como el valor máximo absoluto, también es un valor máximo relativo, además $f'(z)$ existe entonces $f'(z) = 0$, porque f(z) es un extremo relativo.

Si f(x) < f(a) para algún x ∈ <a, b> ⇒ el valor mínimo absoluto de la función continua f en [a, b] no es f(a) ni f(b) es decir que ∃ z ∈ <a, b>, como el valor mínimo absoluto, también es un mínimo relativo, además f'(z) existe por hipótesis ⇒ $f'(z) = 0$, puesto que f(z) es un extremo relativo.

OBSERVACION.-

Si la derivada de la función no existe en algún punto de <a, b>, puede ser que no haya tangente horizontal, aunque la función sea continua y f(a) = f(b).



APLICACIONES.-

(1) Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ m tiene exactamente una raíz real.

Solución

Primero usamos el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz.

Esto es: $f(x) = x^3 + x - 1$, entonces f(0) = -1 < 0 y f(1) = 1 > 0 puesto que f es un polinomio, es una función continua de esta manera el teorema del valor intermedio dice que existe un número c entre 0 y 1, tal que f(c) = 0, por consiguiente la ecuación dada tiene una raíz. Para demostrar que esta raíz es única aplicamos el teorema de ROLLE y razonamos por contradicción.

Esto es: Supongamos que la ecuación tiene dos raíces a y b: entones f(a) = f(b) y como f es un polinomio; entonces es diferenciable f(a) = f(b) y como f es un polinomio; entonces es diferenciable en <a,b> y continua en [a,b], por lo tanto, por el teorema de ROLLE, existe un numero c entre a y b tal que $f'(c) = 0$; pero $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, ∀ x.

Es decir: $f'(x)$ no puede ser cero, lo que da lugar a una contradicción, por lo tanto, la ecuación no puede tener dos raíces.

(2) Demostrar que la ecuación: $x^7 + 5x^3 + x - 6 = 0$, tiene: exactamente una raíz real.

Solución

Sea $f(x) = x^7 + 5x^3 + x - 6$, y f(0) = -6 < 0 y f(1) = 1 > 0

Puesto que f(x) es un polinomio, es una función continua y diferenciable en todo x; entonces es continua en [0,1] y diferenciable en <0,1>; Entonces, existe c ∈ <0,1> tal que f(c) = 0, es decir la ecuación tiene una raíz real para demostrar que esta raíz es única, aplicamos el teorema de Rolle y razonamos por contradicción.

Esto es; supongamos que la ecuación tiene dos raíces a y b entonces f(a) = f(b) y como f es un polinomio, entonces f es diferenciable en <a,b> y continua en [a,b], por lo tanto por el teorema de Rolle, existe un numero c entre a y b tal que $f'(c) = 0$ pero $f'(x) = 7x^6 + 15x^2 + 1 > 0$, ∀ x es decir: $f'(x)$ no puede ser cero, lo que da lugar a una contradicción.

Por lo tanto, la ecuación no puede tener dos raíces: La principal aplicación del teorema de ROLLE radica en la demostración del siguiente teorema.

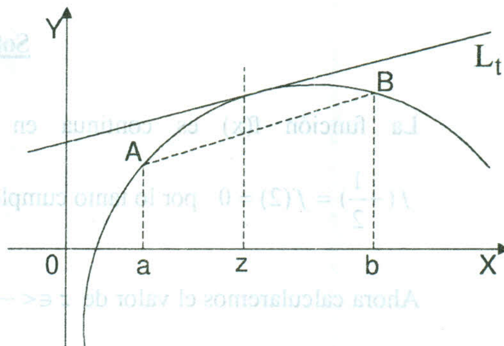
5.6 TEOREMA DEL VALOR MEDIO.-

Si f es una función continua en el intervalo [a, b], derivable en <a, b> $\Rightarrow \exists$ z $\in$ <a, b>, tal que: $f'(z)=\dfrac{f(b)-f(b)}{b-a}$

Demostración

Primeramente daremos una interpretación geométrica del teorema.

Geométricamente quiere decir, que la función continua tiene una tangente en todo punto entre A y B $\Rightarrow$ por lo menos un punto en la curva entre A y B en la cual la tangente es paralela a la cuerda AB, puesto que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, es la pendiente de la cuerda que une los puntos A y B por otra parte $f'(z)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto (z, f(z)), por lo tanto:



$f'(z)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cuando f(a)=f(b) este teorema se transforma en el teorema de Rolle.

Ahora daremos la demostración del teorema.

Consideremos una función g definida por: g(x) = f(x)(b – a) – x(f(b) – f(a)), g(x) es continua porque f(x) (b – a) y x(f(b) – f(a)) es continua en [a, b]

Además $g'(x)=f'(x)(b-a)-f'(x)(b-a)-(f(b)-f(a))$, como $g'(x)$ existe en <a, b>; entonces g(x)es derivable en <a, b> g(a) = f(a)(b – a) – a(f(b) – f(a)) = bf(a) – af(b)

g(b) = f(b)(b – a) – b(f(b)-f(a)) = bf(a) – af(b)

Luego g(a) = g(b), por lo tanto cumple las condiciones del Teorema de Rolle

$\Rightarrow \exists$ z $\in$ <a, b> tal que g' (z) = 0

como $g'(x) = f'(x)(b-a) - (f(b) - f(a)) \Rightarrow g'(z) = f'(z)(b-a) - (f(b) - f(a)) = 0$

$f'(z)(b-a) = f(b) - f(a)$ de donde $f'(z) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Ejemplo.- Verificar si se cumple el teorema de Rolle de la función $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ en $x \in [-\frac{1}{2}, 2]$ en caso afirmativo halle el valor posible de z.

Solución

La función f(x) es continua en $[-\frac{1}{2}, 2]$ y derivable en $<-\frac{1}{2}, 2>$ además $f(-\frac{1}{2}) = f(2) = 0$ por lo tanto cumple con las condiciones del teorema de Rolle.

Ahora calcularemos el valor de $z \in <-\frac{1}{2}, 2>$ como

$f(x) = 2x^2 - 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x - 3$, para $z \in <-\frac{1}{2}, 2>$

$f'(z) = 4z - 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4} \in <-\frac{1}{2}, 2>$

5.7. TEOREMA (DE LA FUNCION CONSTANTE).-

Si $f'(x) = 0$, $\forall$ x en algún intervalo <a,b>, entonces: f es constante en <a,b>.

Demostración

Sean x_1, x_2 puntos cualquiera en <a,b> con $x_1 < x_2$ puesto que f es diferenciable en <a,b>, entonces será diferenciable en $< x_1, x_2 >$ y continua en $[x_1, x_2]$.

Ahora aplicaremos el teorema del Valor Medio a la función f en el intervalo $[x_1, x_2]$ y tenemos un numero c tal que $x_1 < c < x_2$ y $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ pero se tiene que: $f'(x) = 0 \quad \forall$ x $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$. Luego $f(x_2) - f(x_1) = 0$

$\therefore$ $f(x_1) = f(x_2)$. Es decir la función f es contante en <a,b>

5.8. TEOREMA (DE LA DIFERENCIA CONSTANTE).-

Sean f(x) y g(x) dos funciones continuas en el intervalo cerrado [a,b]. Entonces: $f'(x) = g'(x)$ en a < x < b, si y solo si f(x) = g(x) + c, donde c es una constante.

Demostración

1° Sí $f'(x) = g'(x)$, en a < x < b, entonces: $(f(x) - g(x))' = 0$ en a < x < b

ahora por le teorema de la función constante se tiene: f(x) – g(x) = c = constante.

2° Si f(x) = g(x) + c, con c constante, entonces derivando se tiene: $f'(x) = g'(x)$

APLICACIONES.-

① Resolver: $\begin{cases} y' = 3\operatorname{sen} x + 5x^3 + 2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$

Solución

Tenemos $y' = 3\operatorname{sen} x + 5x^3 + 2 = (-3\cos x + \frac{5}{4}x^4 + 2x)'$

Luego por el teorema de la diferencia constante, se tiene: $y = -3\cos x + \frac{5}{4}x^4 + 2x + c$

donde c es una constante. Para hallar c evaluamos la ecuación en x = 0

y(0) = c $\Rightarrow$ c = 4 $\qquad \therefore \quad y = -3\cos x + \frac{5}{4}x^4 + 2x + 4$

② Resolver: $\begin{cases} \mu'(t) = 2t^2 - \operatorname{sen} t + 3 \\ \mu(0) = 1 \end{cases}$

Solución

Tenemos: $\mu'(t)=2t^2-\text{sen}\,t+3=(\frac{2}{3}t^3+\cos t+3t)'$ entonces: $\mu(t)=\frac{2}{3}t^3+\cos t+3t+c$

Evaluando la ecuación t = 0, μ(0) = 1 + c = 1 ⇒ c = 0 $\therefore\ \mu(t)=\frac{2}{3}t^3+\cos t+3t$

Ejemplo.- Usar el teorema del valor medio para probar la siguiente desigualdad $|\text{sen}\,x-\text{sen}\,y|\le|x-y|,\ \forall\ x,y\in R$

Solución

Sea f(t) = sen t, esta función satisface las condiciones del teorema del valor medio, en todo intervalo $[x,y]\subseteq R$ con $x\le y$, entonces $\exists\ c\in\ <x,y>$ tal que $f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

y; f(x) = sen x, $f'(x)=\cos x$, f(y) = sen y. Luego $\frac{\text{sen}\,y-\text{sen}\,x}{y-x}=\cos c$, $c\in\ <x,y>$

Con $|\cos c|\le 1,\ \forall\ c\in R$, entonces

$$\left|\frac{\text{sen}\,y-\text{sen}\,x}{y-x}\right|=|\cos c|\le 1\ \Rightarrow\ |\text{sen}\,y-\text{sen}\,x|\le|x-y|,\ \forall\ x,y\in R$$

Ejemplo.- Usar el teorema del valor medio para probar la siguiente desigualdad:

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}\le \text{tg}\,b-\text{tg}\,a\le\frac{b-a}{\cos^2 b},\quad 0<a\le b<\frac{\pi}{2}$$

Solución

Sea f(x) = tg x. Esta función es continua en $[a,b]\subset\ <0,\frac{\pi}{2}>$ y diferenciable en <a,b>; entonces $\exists c\in<a,b>$ tal que $f'(c)=\frac{\text{tg}\,b-\text{tg}\,a}{b-a}$ y $f'(x)=\sec^2 x$ entonces $f'(c)=\sec^2 c$

Ahora para a < c < b se tiene $\sec^2 a\le\sec^2 c\le\sec^2 b$

$$\sec^2 a\le f'(c)\le\sec^2 b\ \Rightarrow\ \sec^2 a\le\frac{\text{tg}\,b-\text{tg}\,a}{b-a}\le\sec^2 b$$

es decir: $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} \le \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \le \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$, pues $0 < a \le b < \dfrac{\pi}{2}$

Ejemplo.- Usar el teorema del valor medio para probar la desigualdad: $\ln(1+x) < x,\ \forall\ x \ne -1$

Solución

Sea $f(t) = \ln(1+t)$. Esta función es continua y diferenciable en todo su dominio.

Luego es continua en $[0,x]$ y diferenciable en $<0,x>$ entonces por el teorema del valor medio $\exists\ c \in <0,x>$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Pero $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow f'(c) = \dfrac{1}{1+c} < 1,\ c \ne -1$

De donde $\dfrac{\ln(1+x)}{x} < 1$ por lo tanto $\ln(1+x) < x,\ \forall\ x \ne -1$

Ejemplo.- Usar el teorema del valor medio para probar la siguiente desigualdad:

$$1-\frac{x}{2} < \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} < 1-\frac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\ ;\ -1 < x < 0;\ x > 0$$

Solución

a) Sea $f(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$

Esta función es continua y diferenciable en $<x,0>$, con $-1 < x < 0$ entonces $\exists\ c \in <x,0>$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(0)-f(x)}{a-x}$

Es decir: $f'(c) = \dfrac{-\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}}{-x} = \dfrac{2(1+x)^{\frac{1}{2}} - x(1+x)^{\frac{1}{2}} - 2}{-2x(1+x)^{\frac{1}{2}}}$

y como $f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+t)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f'(c)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+c)^{\frac{3}{2}}}$

Luego $\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+c)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{x}(1-\frac{x}{2}-\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}})$ ... **(1)**

Ahora si $c \in \langle x,0\rangle \subset \langle -1,0\rangle \Rightarrow -1 < c < 0$

Entonces: $0 < 1+c < 1 \Rightarrow 0 < (1+c)^{\frac{3}{2}} < 1$

$\Rightarrow 1 < \frac{1}{(1+c)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow -\frac{1}{2}(\frac{1}{(1+c)^{\frac{3}{2}}}) < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{(1+c)^{\frac{3}{2}}}) < 0$

además; como $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} > 0$

entonces de (1) se tiene: $1-\frac{x}{2}-\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} < 0$

de donde tenemos: $1-\frac{x}{2} < \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$ ... **(α)**

b) Sea $f(t)=\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}+\frac{t}{2(1+t)^{\frac{3}{2}}}$; $x > 0$

Esta función es continua y diferenciable en $\langle 0,x\rangle$: entonces $\exists\, c \in \langle 0,x\rangle$ tal que

$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ es decir: $f'(c)=\frac{\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}-1}{x}$, pero $f'(t)=\frac{-3t}{2(1+t)^{\frac{5}{2}}}$

Ahora como $t > 0 \Rightarrow -t < 0 \Rightarrow f'(t) < 0$

Entonces $f'(c) < 0$: pero $x > 0$, por lo tanto:

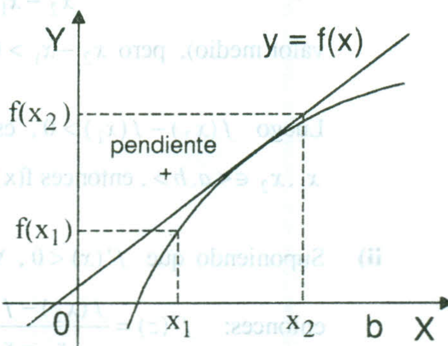
$$-1 + \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} < 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} < 1 - \frac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \qquad \textbf{... }(\beta)$$

Luego de (α) y (β) se tiene: $1 - \frac{x}{2} < \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} < 1 - \frac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

5.9 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES.-

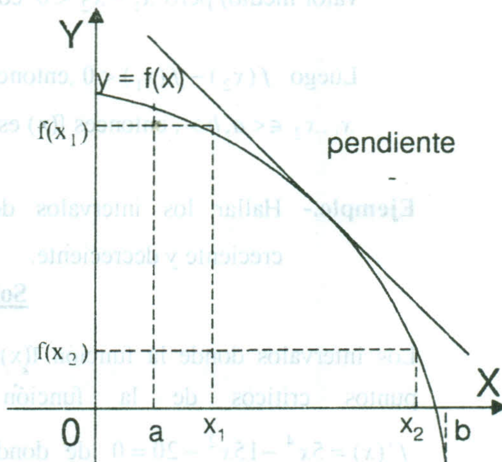
a) DEFINICION.-

Consideremos una función f definida en un intervalo I, entonces f(x) es creciente en el intervalo; si para todo par x_1, x_2 del intervalo, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$



b) DEFINICION

Consideremos una función f definida en un intervalo I, entonces f(x) es decreciente en el intervalo, si para todo par x_1, x_2 del intervalo, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$



5.10 TEOREMA.-

Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en <a, b>, entonces:

i) Si $f'(x)>0$, $\forall$ x $\in$ <a, b> $\Rightarrow$ f(x) es creciente en <a, b>

ii) Si $f'(x)<0$, $\forall$ x $\in$ <a, b> $\Rightarrow$ f(x) es decreciente en <a, b>

Demostración

i) Suponiendo que $f'(x)>0$, $\forall$ x $\in$ <a, b>, sea $x_1, x_2 \in$ <a, b>, tal que $x_1 < x_2$ entonces: $f'(z)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, donde z está entre x_1 y x_2 (por el teorema del valor medio), pero $x_2-x_1>0$ y además $f'(z)$ existe por hipótesis.

Luego $f(x_2)-f(x_1)>0$, es decir $f(x_2)>f(x_1)$, ó sea, $f(x_1)<f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in <a,b>$, entonces f(x) es creciente en el intervalo <a,b>

ii) Suponiendo que $f'(x)<0$, $\forall$ x $\in$<a,b>, sea $x_1, x_2 \in <a,b>$, tal que: $x_1 < x_2$ entonces: $f'(z)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, donde z está entre x_1 y x_2 (por el teorema del valor medio) pero $x_1-x_2<0$ como $f'(z)<0$ por hipótesis.

Luego $f(x_2)-f(x_1)<0$,entonces $f(x_2)<f(x_1)$, ó sea, que $f(x_1)>f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in <a,b>$, entonces f(x) es decreciente en <a, b>

Ejemplo.- Hallar los intervalos donde la función: $f(x)=x^5-5x^3-20x-2$ es creciente y decreciente.

Solución

Los intervalos donde la función f(x) es creciente o decreciente se encuentra con los puntos críticos de la función es decir haciendo $f'(x)=0$ entonces: $f'(x)=5x^4-15x^2-20=0$ de donde $(x^2-4)(x^2+1)=0 \Rightarrow$ {-2,2}son los puntos críticos, ahora los puntos críticos los dibujamos en la recta real



y se obtienen los intervalos $<-\infty,-2>$, $<-2,2>$ y $<2,+\infty>$

Luego determinaremos en que intervalo es creciente o decreciente.

Si $x \in <-\infty,-2>$, $f'(x) = (x+1)(x-2)(x^2+1) > 0 \Rightarrow$ la función f(x) es creciente sobre $<-\infty,-2>$

Si $x \in <-2,2>$, $f'(x) = (x+1)(x-2)(x^2+1) < 0 \Rightarrow$ la función f(x) es decreciente sobre $<2,+\infty>$

Si $x \in <2,+\infty>$, $f'(x) = (x+1)(x-2)(x^2+1) > 0 \Rightarrow$ la función f(x) es creciente sobre $<2,+\infty>$

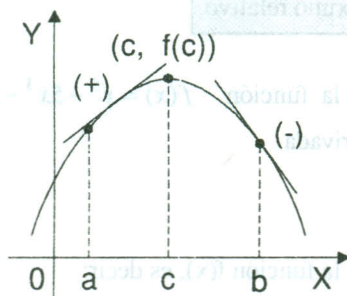
5.11 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS.-

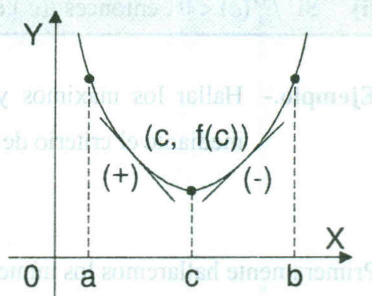
Consideremos una función f continua en [a, b] y sea $c \in <a, b>$ un número crítico y $f'(x)$ está definida para todos los puntos de $<a, b>$ excepto posiblemente en c, entonces:

i) Si $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \forall x \in <a,c> \\ f'(x) < 0, \forall x \in <c,b> \end{array}\right\} \Rightarrow$ f(c) es un valor máximo relativo de f

ii) Si $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0, \forall x \in <a,c> \\ f'(x) > 0, \forall x \in <c,b> \end{array}\right\} \Rightarrow$ f(c) es un valor mínimo relativo de f

iii) Si $f'(x)$ no cambia de signo, cuando x pasa por c entonces f(c) no es un valor máximo ni mínimo relativo.





Ejemplo.- Hallar los valores máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=x^5-5x^3-20x-2$

Solución

Para calcular los máximos y mínimos relativos, primeramente se debe de calcular los números crítico, es decir: $f'(x)=0$ para obtener los números críticos como;

$$f(x)=x^5-5x^3-20x-2 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2-20=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$$

de donde x = ±2 números crítico.

$f'(x)=5(x+2)(x-2)(x^2+1)$



Para x = - 2 Sí $\left.\begin{matrix} x<-2, f'(x)>0^+ \\ -2<x<2, f'(x)<0^- \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ máximo relativo en f(-2) = 46

Para x = 2 Sí $\left.\begin{matrix} -2<x<2, f'(x)<0^- \\ x>2, f'(x)>0^+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ mínimo relativo en f(2) = -50

5.12 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS.-

Supóngase que existe f'' en algún intervalo abierto que contiene a c y que $f'(c)=0$ entonces:

i) Si $f''(c)>0$, entonces f(c) es un valor mínimo relativo.

ii) Si $f''(c)<0$, entonces f(c) es un valor máximo relativo.

Ejemplo.- Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x)=x^5-5x^3-20x-2$, mediante el criterio de la segunda derivada

Solución

Primeramente hallaremos los números críticos de la función f(x), es decir:

$f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow$ x= ± 2

números críticos ahora calculamos la segunda derivada, es decir:

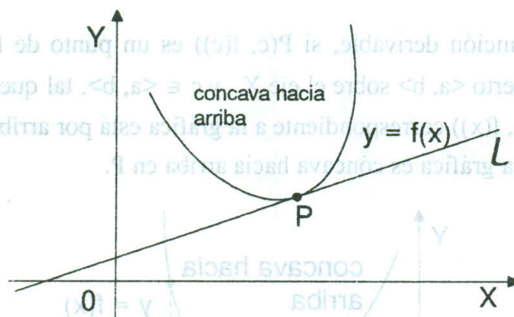
$f''(x) = 20x^3 - 30x$, ahora evaluamos en los números críticos.

$f''(-2) = -100 < 0 \Rightarrow \exists$ máx.relativo en f(-2) = 46

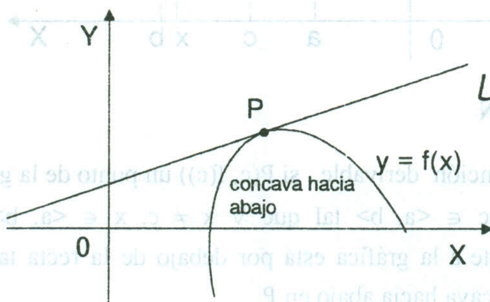
$f''(2) = 100 > 0 \Rightarrow \exists$ min.relativo en f(2) = -50

5.13 CONCAVIDAD Y PUNTO DE INFLEXION.-

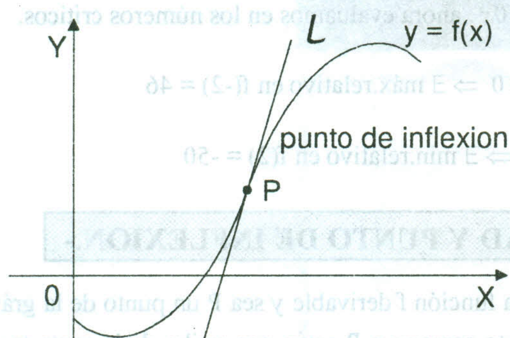
Consideremos una función f derivable y sea P un punto de la gráfica f, si todos los puntos de f arbitrariamente cercano a P están por arriba de la recta tangente a f en el punto P, entonces la gráfica es cóncava hacia arriba en P.



Si todos los puntos de f arbitrariamente cercano a P están por debajo de la recta tangente en P, entonces la gráfica es cóncava hacia abajo en P.

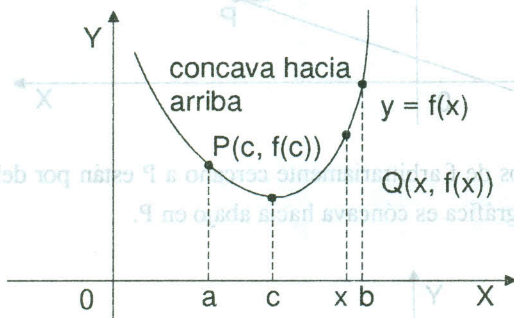


Cuando f tiene una sola tangente en P y f es cóncava hacia arriba en todos los puntos cercanos arbitrariamente a P situados a un solo lado y es cóncava hacia abajo en todos los puntos cercanos arbitrariamente a P situados al otro lado de P, entonces P recibe el nombre de punto de inflexión.



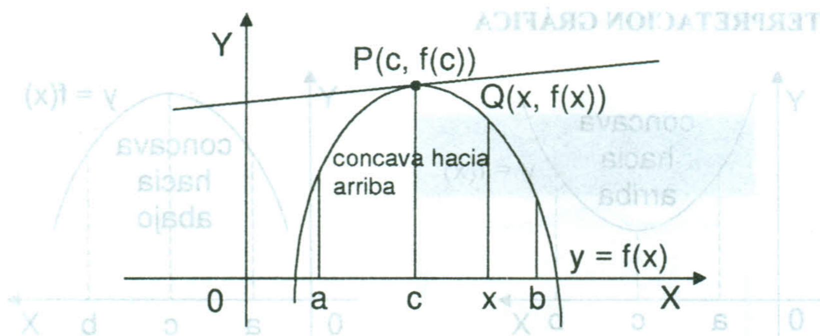
a) DEFINICION.-

Sea f una función derivable, si P(c, f(c)) es un punto de la gráfica y si existe un intervalo abierto <a, b> sobre el eje X y $c \in \langle a, b\rangle$, tal que: $\forall\, x \neq c,\ x \in \langle a, b\rangle$. Si el punto Q(x, f(x)) correspondiente a la gráfica está por arriba de la recta tangente en P, entonces la gráfica es cóncava hacia arriba en P.

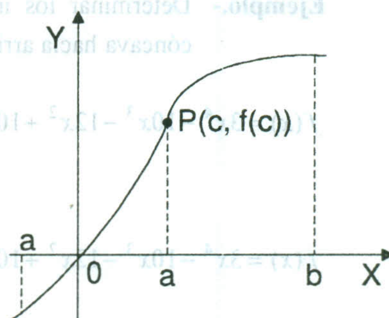


b) DEFINICION

Sea f una función derivable, si P(c, f(c)) un punto de la gráfica y si $\exists$ <a, b> sobre el eje X y $c \in \langle a, b\rangle$ tal que $\forall\, x \neq c,\ x \in \langle a, b\rangle$, si el punto Q(x,f(x)) correspondiente a la gráfica está por debajo de la recta tangente en P entonces la gráfica es cóncava hacia abajo en P.



c) DEFINICION.-



Un punto P(c, f (c)) es un punto de inflexión de f si existe un intervalo abierto <a,b> y c ∈ <a,b> tal que la gráfica de f sea cóncava hacia arriba sobre <a,c> y cóncava hacia abajo sobre <c, b> ó recíprocamente

d) DEFINICION.-

Si P(c, f(c)) es un punto de inflexión de f y si existe $f''(c)$ entonces $f''(c) = 0$.

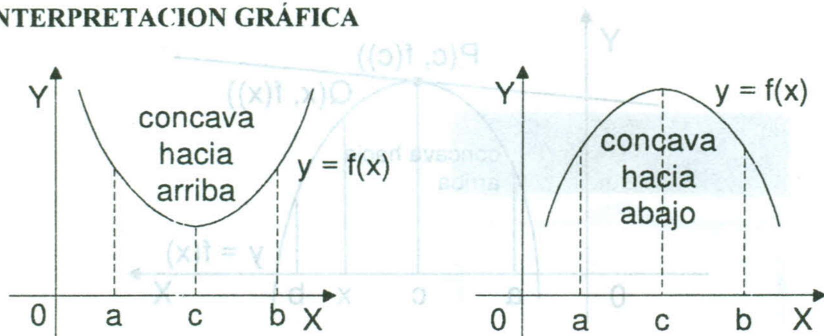
e) TEOREMA.-

Suponiendo que f: R → R es derivable en <a, b>.

a) Si f es una función tal que $f''(x) > 0$, ∀ x ∈ <a, b>, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre <a, b>.

b) Si f es una función tal que $f''(x) < 0$, ∀ x ∈ <a, b>, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre <a, b>

INTERPRETACION GRÁFICA



Ejemplo.- Determinar los intervalos en donde la función es cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba.

(1) $f(x)=3x^4-10x^3-12x^2+10x+9$

Solución

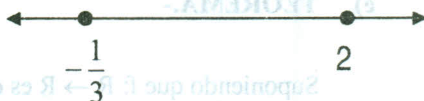
$f(x)=3x^4-10x^3-12x^2+10x+9$

$\Rightarrow\quad f'(x)=12x^3-30x^2-24x+10$

$\Rightarrow\quad f''(x)=36x^2-60x-24$, ahora hacemos:

$f''(x)=0$ para determinar los puntos de inflexión.

$36x^2-60x-24=0 \;\Rightarrow\; 3x^2-5x-2=0$



de donde $x=-\frac{1}{3}$, x = 2

para $x<-\frac{1}{3}$, $f''(x)>0 \;\Rightarrow$ f(x) es cóncava hacia arriba en $<-\infty,-\frac{1}{3}>$.

Para $-\frac{1}{3}<x<2$, $f''(x)<0 \;\Rightarrow$ f(x) es cóncava hacia abajo en $<-\frac{1}{3},2>$

5.14 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

I.- Construir la gráfica determinando los puntos críticos, puntos de discontinuidad, los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de inflexión y la dirección de su concavidad de la gráfica.

① $y = x^3 - 3x^2$

Solución

Calculando, los valores críticos $\frac{dy}{dx} = 0$, es decir:

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$ valores críticos

0 2

para el valor critico $x = 0$

$x < 0$, $\frac{dy}{dx} > 0^+$

$0 < x < 2$, $\frac{dy}{dx} < 0^-$

entonces $\exists$ máximo relativo en x = 0 donde se tiene el punto máximo (0,0)

para el punto critico $x = 2$

$0 < x < 2$, $\frac{dy}{dx} < 0^-$

$2 < x < +\infty$, $\frac{dy}{dx} > 0^+$

entonces $\exists$ mínimo relativo en x = 2 donde se tiene el punto mínimo (2,-4)

La curva $y = x^3 - 3x^2$ es creciente sobre los intervalos $<-\infty,0>$ y $<2,+\infty>$ y es creciente en el intervalo $<0,2>$

Ahora calculamos los puntos de inflexión, es decir:

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2$

Luego (1,-2) es el punto de inflexión

Como $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(x-1)$

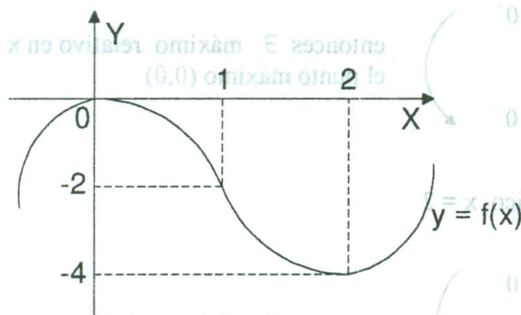
$$\underset{1}{-\quad\vee\quad+}$$

Para x < 1, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <-∞,1>.

Para x>1, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <1,+∞>

x	$f'(x)$	Conclusiones
<-∞,0>	+	Creciente
<0,2>	-	Decreciente
<2,∞>	+	Creciente

x	$f''(x)$	Conclusiones
<-∞,1>	-	Cóncava abajo
<1,∞>	+	Cóncava arriba



② $f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{9}$

Solución

Primeramente hallaremos los puntos críticos

$$f'(x) = \frac{12x - 4x^3}{9} = 0 \Rightarrow 4x(3 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$$

Luego $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ son los valores críticos

$$\underset{-\sqrt{3}}{\bullet}\qquad\underset{0}{\bullet}\qquad\underset{\sqrt{3}}{\bullet}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$$

ahora veremos en que puntos críticos se tienen máximos o mínimos.

Para el punto crítico $x = -\sqrt{3}$

$x < -\sqrt{3}$, $\frac{dy}{dx} > 0^+$

$\Rightarrow$ $\exists$ máx. relativo en $x = -\sqrt{3}$, $(-\sqrt{3},1)$

$-\sqrt{3} < x < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$

para el punto crítico $x = 0$

$-\sqrt{3} < x < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0^-$

$\Rightarrow$ $\exists$ mín. relativo en x = 0, (0,0)

$0 < x < \sqrt{3}$, $\frac{dy}{dx} > 0^+$

para el punto crítico $x = \sqrt{3}$

$0 < x < \sqrt{3}$, $\frac{dy}{dx} > 0^+$

$\Rightarrow$ $\exists$ máx. relativo en $x = \sqrt{3}$, $(\sqrt{3},1)$

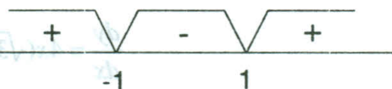
$\sqrt{3} < x < +\infty$, $\frac{dy}{dx} < 0^-$

La función f(x) es creciente sobre los intervalos $< -\infty,-\sqrt{3} >$, $< 0,\sqrt{3} >$ y es decreciente sobre $< -\sqrt{3},0 >$, $< \sqrt{3},+\infty >$ ahora calcularemos los puntos de inflexión, es decir:

$$f''(x) = \frac{12-12x^2}{9} = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1 \;\Rightarrow\; (1,\frac{5}{9}) \,,\, (-1,\frac{5}{9})$$

son los puntos de inflexión. Ahora calculamos los intervalos de concavidad

$f''(x)=\frac{12}{9}(1-x)(1+x)$



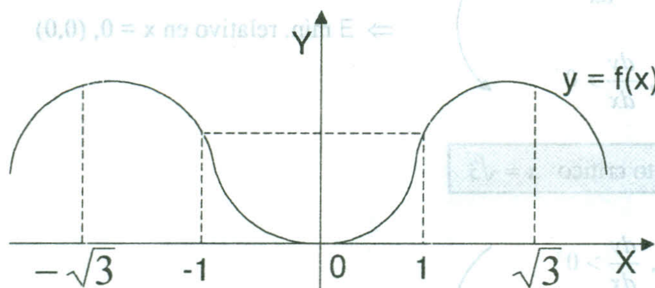
para x < -1, $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ f(x) es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <-∞, -1>

para $-1 < x < 1$, $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ f(x) es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <-1, 1>

para x > 1, $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ f(x) es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <1, +∞>

x	$f'(x)$	Conclusiones
$<-\infty,-\sqrt{3}>$	+	Creciente
$<-\sqrt{3},0>$	-	Decreciente
$<0,\sqrt{3}>$	+	Creciente
$<\sqrt{3},+\infty>$	-	Decreciente

x	$f''(x)$	Conclusión
<-∞,-1>	-	Cóncava abajo
<-1,1>	+	Cóncava arriba
<1,∞>	-	Cóncava abajo



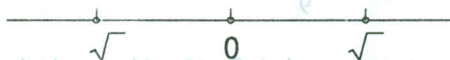
(3) $f(x)=\frac{(x^2-5)^3}{125}$

Solución

Hallaremos los puntos críticos es decir:

$f'(x)=\frac{6x(x^2-5)^2}{125}=0 \Rightarrow$ x = 0, $x=\pm\sqrt{5}$ son los valores críticos

$f'(x)=\frac{6x(x^2-5)^2}{125}$



ahora veremos en que puntos críticos se tiene máximos y mínimos.

Para el punto crítico $x=-\sqrt{5}$

Para $x<-\sqrt{5}$, $f'(x)<0^-$

$\Rightarrow\ \nexists$ máximo ni mínimo en $x=-\sqrt{5}$

$-\sqrt{5}<x<0$, $f'(x)<0^-$

para el punto crítico x = 0

$-\sqrt{5}<x<0$, $f'(x)<0^-$

$\Rightarrow\ \exists$ mínimos relativo en x = 0, (0, - 1)

$0<x<\sqrt{5}$, $f'(x)>0^+$

para el punto crítico $x=\sqrt{5}$

$0<x<\sqrt{5}$, $f'(x)>0^+$

$\Rightarrow\ \nexists$ máximo ni mínimo en $x=\sqrt{5}$

$\sqrt{5}<x<+\infty$, $f'(x)>0^+$

además la función f(x) es creciente sobre los intervalos $<0,\sqrt{5}>$, $<\sqrt{5},+\infty>$ y es decreciente sobre los intervalos $<-\infty,-\sqrt{5}>$ y $<-\sqrt{5},0>$.

Ahora calcularemos los puntos de inflexión , es decir:

$$f''(x)=\frac{6}{25}(x^2-5)(x^2-1)=0 \text{ de donde } x=\pm 1,\ x=\pm\sqrt{5}$$

Luego $(-1,-\frac{64}{125})$, $(1,-\frac{64}{125})$, $(-\sqrt{5},0)$, $(\sqrt{5},0)$

Son los puntos de inflexión, ahora calculando los intervalos de concavidad



Para $x<-\sqrt{5}$, $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<-\infty,-\sqrt{5}>$

Para $-\sqrt{5} < x < -1$, $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $< -\sqrt{5}, -1 >$

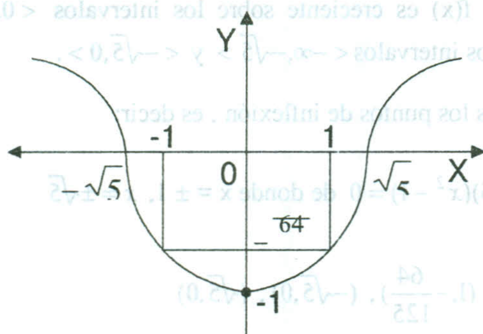
Para $-1 < x < 1$, $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <-1,1>

Para $1 < x < \sqrt{5}$, $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $< 1, \sqrt{5} >$

Para $\sqrt{5} < x < +\infty$, $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $< \sqrt{5}, +\infty >$

x	f'	Conclusión
$< -\infty, -\sqrt{5} >$	-	Decreciente
$< -\sqrt{5}, 0 >$	-	Decreciente
$< 0, \sqrt{5} >$	+	Creciente
$< \sqrt{5}, +\infty >$	+	Creciente

x	$f''(x)$	Conclusión
$< -\infty, -\sqrt{5} >$	+	Cóncava arriba
$< -\sqrt{5}, -1 >$	-	Cóncava abajo
<-1,1>	+	Cóncava arriba
$< 1, \sqrt{5} >$	-	Cóncava abajo
$< \sqrt{5}, +\infty >$	+	Cóncava arriba



④ $f(x) = (x+1)Ln^2(x+1)$

Solución

La función f(x) es definida para x $\in$ <-1, +∞>

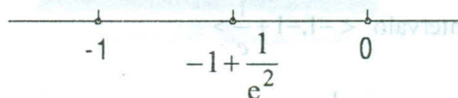
Luego calcularemos los puntos críticos, es decir:

$f'(x) = [\ln(x+1) + 2]\ln(x+1) = 0$, de donde:

$\text{Ln}(x+1) = 0 \lor \text{Ln}(x+1) + 2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -1 + \dfrac{1}{e^2}$

o sea que $\{0, -1 + \dfrac{1}{e^2}\}$ son los puntos críticos

$f'(x) = Ln(x+1)[Ln(x+1)+2]$



ahora calculamos los máximos y los mínimos

para el punto crítico $x = -1 + \dfrac{1}{e}$

$-1 < x < -1 + \dfrac{1}{e},\ f'(x) > 0^+$

$-1 + \dfrac{1}{e} < x < 0,\ f'(x) < 0^-$

$\exists$ máx. relativo en $x = -1 + \dfrac{1}{e^2},\ (-1 + \dfrac{1}{e^2}, \dfrac{4}{e^2})$

para el punto crítico $x = 0$

$-1 + \dfrac{1}{e} < x < 0,\ f'(x) < 0^-$

$0 < 0 < +\infty,\ f'(x) > 0^+$

$\Rightarrow\ \exists$ mínimo relativo en x = 0, (0,0)

La gráfica es creciente sobre los intervalos $< -1, -1 + \dfrac{1}{e} >$, $<0, +\infty>$ y decreciente sobre el intervalo $< -1 + \dfrac{1}{e}, 0 >$. Ahora calcularemos los puntos de inflexión, es decir:

$$f''(x) = \frac{2[Ln(x+1)+1]}{x+1} = 0 \Rightarrow x = -1 + \frac{1}{e}$$

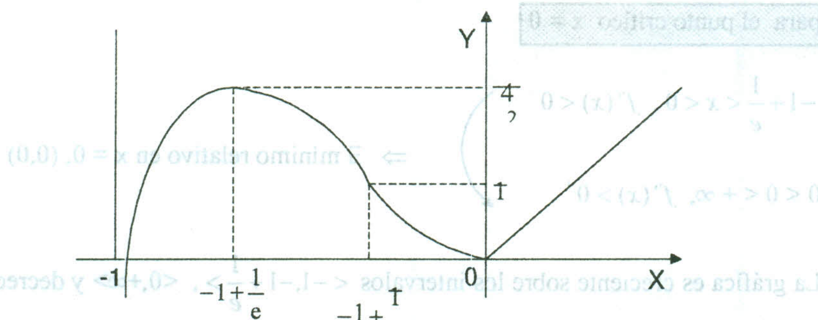
de donde $(-1 + \dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e})$ es un punto de inflexión.

$f''(x)=\frac{2[Ln(x+1)+1]}{x+1}$ -1 $-1+\frac{1}{e}$

para $-1<x<-1+\frac{1}{e}$, $f''(x)<0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $<-1,-1+\frac{1}{e}>$

para $-1+\frac{1}{e}<x<\infty$, $f''(x)>0$, la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<-1+\frac{1}{e},+\infty>$

x	$f'(x)$	Conclusiones	$f''(x)$	Conclusiones
$<-1,-1+\frac{1}{e}>$	+	Creciente	-	Cóncava abajo
$<-1+\frac{1}{e},0>$	-	Decreciente	+	Cóncava arriba
<0,+∞>	+	Creciente		



⑤ $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

Solución

La función f(x) está definida en todo R-{-1,1} ahora calcularemos los puntos críticos, es decir: $f'(x)=\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ valores críticos.

$-\sqrt{3}$ -1 1 $\sqrt{3}$

$f'(x)=\dfrac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$, ahora calculamos los máximos ó mínimos;

para el punto crítico $x=-\sqrt{3}$

$x<-\sqrt{3}$, $f'(x)>0^+$

$\Rightarrow \exists$ máx. relativo en $x=\sqrt{3}, (-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$

$-\sqrt{3}<x<-1$, $f'(x)<0^-$

para el punto crítico $x=\sqrt{3}$

$1<x<\sqrt{3}$; $f'(x)<0^-$

$\Rightarrow \exists$ mín. relativo en $x=\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/\sqrt[3]{2})$

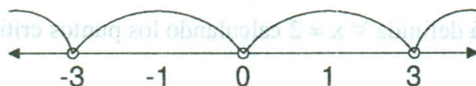
$\sqrt{3}<x<\infty$, $f'(x)>0^+$

además la función f(x) es creciente sobre los intervalos $<-\infty,-\sqrt{3}>$ y $<\sqrt{3},+\infty>$, decreciente en los intervalos $<-\sqrt{3},-1>$, <-1, 1> y $<1,\sqrt{3}>$.

Ahora calcularemos los puntos de inflexión, es decir:

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2-9)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}=0 \;\Rightarrow\; x=0,\; x=\pm 3,$$

de donde: $(0, 0), (3,\frac{3}{2})$, $(-3,-\frac{3}{2})$ son los puntos de inflexión, además como asíntotas verticales tiene a $x=\pm 1$ ahora calcularemos los intervalos donde f(x) es cóncava



para $x<-3$, $f''(x)>0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <-∞,- 3>

para $-3 < x < -1$, $f''(x) < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <-3,-1>

para $-1 < x < 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <-1, 0>

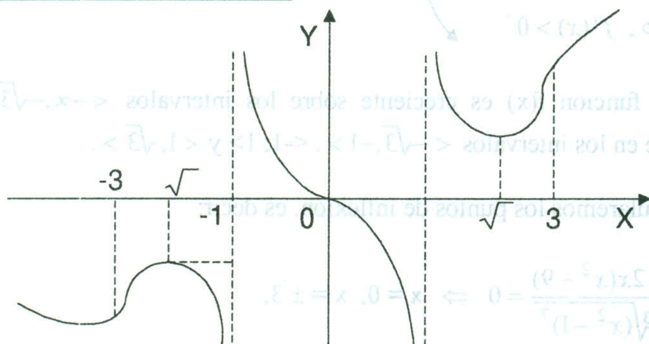
para $0 < x < 1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <0, 1>

para $1 < x < 3$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <1.3>

para $3 < x < \infty$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <3, ∞>

x	$f'(x)$	Conclusión
$<-\infty,-\sqrt{3}>$	+	Creciente
$<-\sqrt{3},-1>$	-	Decreciente
<-1, 1>	-	Decreciente
$<1,\sqrt{3}>$	-	Decreciente
$<\sqrt{3},\infty>$	+	Creciente

x	$f''(x)$	Conclusión
<-∞, -3>	+	Cóncava arriba
<-3, -1>	-	Cóncava abajo
<-1,0>	+	Cóncava arriba
<0, 1>	-	Cóncava abajo
<1, 3>	+	Cóncava arriba
<3, +∞>	-	Cóncava abajo

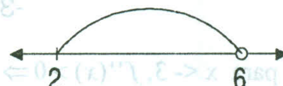


6 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

Solución

La función f(x) está definida $\forall\ x \neq 2$ calculando los puntos críticos, es decir:

$f'(x) = \dfrac{x-6}{3\sqrt[3]{(x-2)^5}} = 0 \Rightarrow x = 6$ valor crítico



ahora calcularemos el máximo o el mínimo. Para x = 6

$2 < x < 6,\ f'(x) < 0^-$

$\Rightarrow\ \exists$ mínimo en x = 6 , el punto critico $(6, \frac{3}{\sqrt[3]{2}})$

$6 < x < +\infty,\ f'(x) > 0^+$

además la función f(x) es creciente sobre los intervalos <-∞, 2>, <6, +∞> y es decreciente sobre el intervalo <2, 6> ahora calcularemos los puntos de inflexión, es decir:

$f''(x) = \frac{-2(x-12)}{9\sqrt[3]{(x-2)^8}} = 0 \quad \Rightarrow$ x = 12 de donde $(12, \frac{12}{\sqrt[3]{100}})$ es el punto de inflexión

calculamos los intervalos de concavidad.

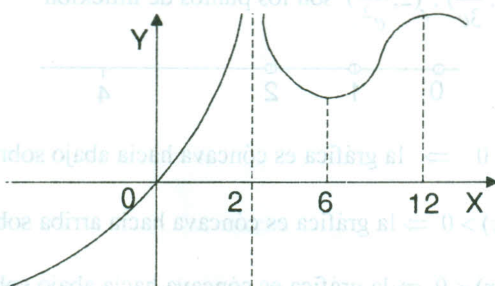
$$f''(x) = \frac{-2(x-12)}{9\sqrt[3]{(x-2)^8}}$$



para x < 2, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <-∞, 2>

para 2 < x < 12, $f''(x) > 0 \Rightarrow$la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <2,12>

para x > 12, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <12,+∞>



(7) $f(x) = (\frac{x}{4-x})e^{x}$

Solución

Calculamos los puntos críticos, es decir: $f'(x)=\dfrac{(x-2)^2e^{-x}}{(4-x)^2}=0 \Rightarrow x=2$

además x = 4 es punto de discontinuidad.

Luego determinaremos si tiene máximo o mínimo en x = 2

$$f'(x)=\frac{(x-2)^2e^{-x}}{(4-x)^2}$$

2 4

para el valor critico x = 2

para x < 2, $f'(x)>0^+$

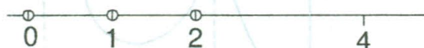
para $2<x<4$, $f'(x)>0^+$

$\Rightarrow$ No existe max. ni mín. relativo

además $f'(x)>0$, $\forall$ x $\in$ <4,+∞> $\Rightarrow$ f(x) es creciente sobre los intervalos <-∞,2>, <2,4>, <4,+∞>, ahora calcularemos los puntos de inflexión es decir:

$$f''(x)=\frac{(x-2)(x-1)xe^{-x}}{(4-x)^3}=0 \quad\Rightarrow\quad x=0,\ x=1,\ x=2$$

de donde (0.0), $(1,\frac{1}{3e})$, $(2,\frac{1}{e^2})$ son los puntos de inflexión



Si x < 0, $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <-∞,0>

Si 0 <x < 1, $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <0, 1>

Si 1 < x < 2, $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <1,2>.

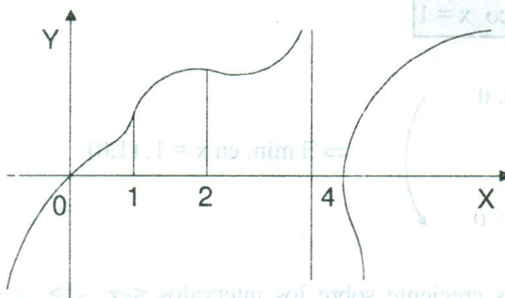
Si 2 < x < 4, $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <2,4>.

Si x > 4, $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo <4, +∞>.

CONCLUSIÓN

x	f'	Conclusión
<-∞,2>	> 0	Creciente
<2,4>	> 0	Creciente
<4,∞>	> 0	Creciente

x	$f''(x)$	Conclusión de f
<-∞,0>	< 0	Cóncava hacia abajo
<0, 1>	> 0	Cóncava hacia arriba
<1,2>	< 0	Cóncava hacia abajo
<2,4>	> 0	Cóncava hacia arriba
<4,∞>	< 0	Cóncava hacia abajo



(8) $f(x) = (x+1)^3(x-1)^2$

Solución

Calculando los puntos críticos, es decir:

$f'(x) = (x+1)^2(x-1)(5x-1) = 0$, de donde x=-1, $x = \dfrac{1}{5}$, x=1 son los puntos críticos.

Ahora analizaremos en que puntos críticos se tiene los máximos ó mínimos.

$f'(x) = (x+1)^2(x-1)(5x-1)$



para el punto crítico x = -1

para x < -1, $f'(x) > 0^+$

para $-1 < x < \dfrac{1}{5}$, $f'(x) > 0^+$

$\Rightarrow$ No existe máx. ni mín en x = -1

para el punto crítico $x = \frac{1}{5}$

para $-1 < x < \frac{1}{5}$, $f'(x) > 0^+$

$\Rightarrow \exists$ máx. en $x = \frac{1}{5}$, $(\frac{1}{5}, \frac{3456}{3125})$

para $\frac{1}{5} < x < 1$, $f'(x) < 0^-$

para el punto crítico $x = 1$

$\frac{1}{5} < x < 1$, $f'(x) < 0^-$

$\Rightarrow \exists$ mín. en x = 1, (1,0)

$1 < x < \infty$, $f'(x) > 0^+$

La función f(x) es creciente sobre los intervalos $<-\infty, -1>$, $<-1, \frac{1}{5}>$ y $<1, +\infty>$ y es decreciente $<\frac{1}{5}, 1>$ ahora hallaremos los puntos de inflexión, es decir:

$f''(x) = 4(x+1)(5x^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, x = \frac{1-\sqrt{6}}{5}, x = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$ de donde (-1,0) y $(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{12}{625}(29 - 6\sqrt{6}))$, $(\frac{1-\sqrt{6}}{5}, \frac{12}{625}(29 + 6\sqrt{6}))$ son los puntos de inflexión.

Ahora determinaremos los intervalos de concavidad.

$f''(x) = 4(x+1)(x - \frac{1-\sqrt{6}}{5})(x - \frac{1+\sqrt{6}}{5})$

-1 $1-\sqrt{6}$ $1+\sqrt{6}$

para x<-1, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $<-\infty,-1>$

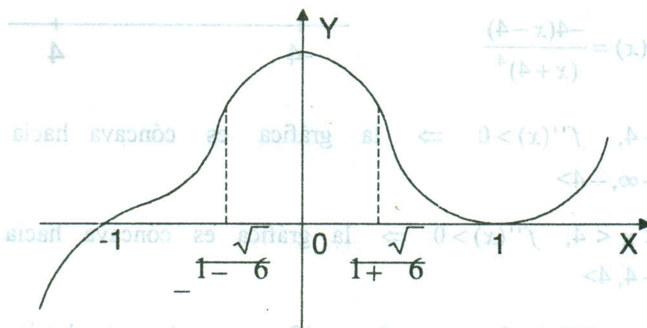
para $-1 < x < \frac{1-\sqrt{6}}{5}$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $<-1, \frac{1-\sqrt{6}}{5}>$

para $\frac{1-\sqrt{6}}{5} < x < \frac{1+\sqrt{6}}{5}$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $< \frac{1-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5} >$

para $x > \frac{1+\sqrt{6}}{5}$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $< \frac{1+\sqrt{6}}{5}, +\infty >$

x	$f'(x)$	Conclusión
<-∞, -1>	+	Creciente
$< -1, \frac{1}{5} >$	+	Creciente
$< \frac{1}{5}, 1 >$	-	Decreciente
<1, ∞>	+	Creciente

x	$f''(x)$	Conclusión
<-∞, -1>	-	Cóncava abajo
$< -1, \frac{1-\sqrt{6}}{5} >$	+	Cóncava arriba
$< \frac{1-\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5} >$	-	Cóncava abajo
$< \frac{1+\sqrt{6}}{5}, +\infty >$	+	Cóncava arriba



⑨ $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 8x + 16}$

Solución

Hallaremos los puntos críticos, es decir: $f'(x) = \frac{4(3x-4)}{(x+4)^3} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ punto crítico

además $x = -4$ es punto de discontinuidad ahora calcularemos el punto máximo ó mínimo.

$$f'(x)=\frac{4(3x-4)}{(x+4)^3}$$



para $-4<x<\frac{4}{3}$, $f'(x)<0^-$

para $\frac{4}{3}<x<\infty$, $f'(x)>0^+$

$\Rightarrow \exists$ mínimo en $x=\frac{4}{3}$ de donde: $(\frac{4}{3},-\frac{1}{8})$

además para x < – 4, $f'(x)>0$. Luego la función f(x) es creciente sobre los intervalos <-∞, – 4>, $<\frac{4}{3},+\infty>$ y decreciente sobre el intervalo $<-4,\frac{4}{3}>$ ahora calcularemos los puntos de inflexión, es decir:

$$f''(x)=\frac{-24(x-4)}{(x+4)^4}=0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4$$

de donde (4, 0) es punto de inflexión. Luego calcularemos los intervalos de concavidad

$$f''(x)=\frac{-4(x-4)}{(x+4)^4}$$



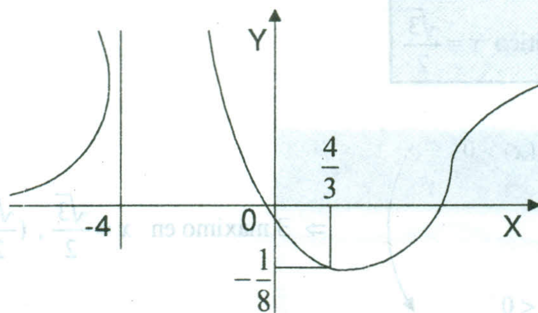
para x < – 4, $f''(x)>0$ ⇒ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <– ∞, – 4>

para – 4 < x < 4, $f''(x)>0$ ⇒ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo <– 4, 4>

para x > 4, $f''(x)<0$ ⇒ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo <4, + ∞>

x	$f'(x)$	Conclusiones
<-∞, -4>	+	Creciente
$<-4,\frac{4}{3}>$	-	Decreciente
$<\frac{4}{3},+\infty>$	+	Creciente

x	$f''(x)$	Conclusiones
<-∞, -4>	+	Cóncava arriba
<-4, 4>	+	Cóncava arriba
<4,+∞>	-	Cóncava abajo



(10) $f(x)=x^3e^{4-2x^2}$

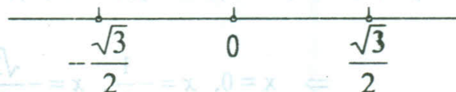
Solución

Calcularemos los puntos críticos, es decir:

$f'(x)=x^2(3-4x^2)e^{4-2x^2}=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

puntos críticos. Ahora analizaremos en que puntos hay máximos y mínimos

$f'(x)=x^2(\sqrt{3}-2x)(\sqrt{3}+2x)e^{4-2x^2}$



para el punto crítico $x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

para $x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x)<0^-$

$\Rightarrow \exists$ mín. en $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, (\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{8}e^{5/2})$

para $-\frac{\sqrt{3}}{2}<x<0$, $f'(x)>0^+$

para el punto crítico x = 0

$-\frac{\sqrt{3}}{2}<x<0$, $f'(x)>0^+$

$\Rightarrow$ no existe máx. ni mín.

$0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x)>0^+$

para el punto crítico $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} 0<x<\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'(x)>0^{+} \\ \\ x>\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'(x)<0^{-} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ máximo en } x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{8}e^{5/2})$$

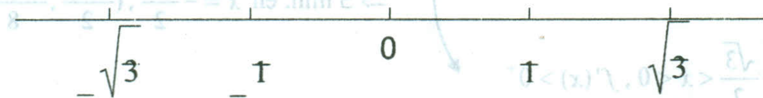
además la función f(x) es creciente sobre los intervalos $<-\frac{\sqrt{3}}{2},0>$ y $<0,\frac{\sqrt{3}}{2}>$ y decreciente sobre los intervalos $<-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}>$ y $<\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty>$, ahora calcularemos los puntos de inflexión, es decir:

$$f''(x)=2x(2x+1)(2x-1)(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})e^{4-2x^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad x=0,\ x=-\frac{1}{2},\ x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x=\frac{1}{2}$$

$(0,0),(-\frac{1}{2},-\frac{e^{7/2}}{8}),(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e),(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}e),(\frac{1}{2},\frac{e^{7/2}}{8})$ son puntos de inflexión.

Ahora calcularemos los intervalos de concavidad.



$$f''(x)=2x(2x+1)(2x-1)(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})e^{4-2x^2}$$

para $x<-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo: $<-\infty,\sqrt{\frac{3}{2}}>$

para $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < -\frac{1}{2}$, $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo: $< -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0 >$

para $-\frac{1}{2} < x < 0$, $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo: $< -\frac{1}{2}, 0 >$

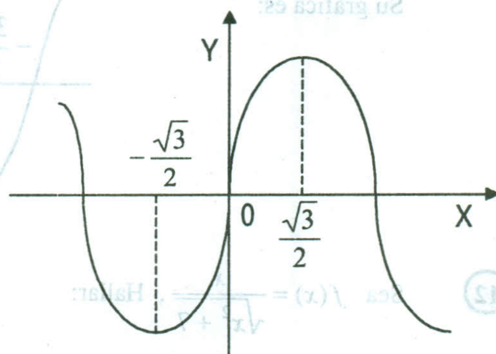
para $0 < x < \frac{1}{2}$, $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $< 0, \frac{1}{2} >$

para $\frac{1}{2} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$, $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $< \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}} >$

para $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$, $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ la gráfica es cóncava hacia arriba sobre el intervalo $< \sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty >$

RESUMIENDO:

x	$f'(x)$	Conclusiones
$< -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2} >$	-	Decreciente
$< -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 >$	+	Creciente
$< 0, \frac{\sqrt{3}}{2} >$	+	Creciente
$< \frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty >$	-	Decreciente



x	$f''(x)$	Conclusiones
$<-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}>$	-	Cóncava abajo
$<-\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{1}{2}>$	+	Cóncava arriba
$<-\frac{1}{2},0>$	-	Cóncava abajo
$<0,\frac{1}{2}>$	+	Cóncava arriba
$<\frac{1}{2},\sqrt{\frac{3}{2}}>$	-	Cóncava abajo
$<\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty>$	+	Cóncava arriba

(11) Graficar $f(x)=\cos(\frac{x-|x|}{2})+\frac{x+|x|}{2}$

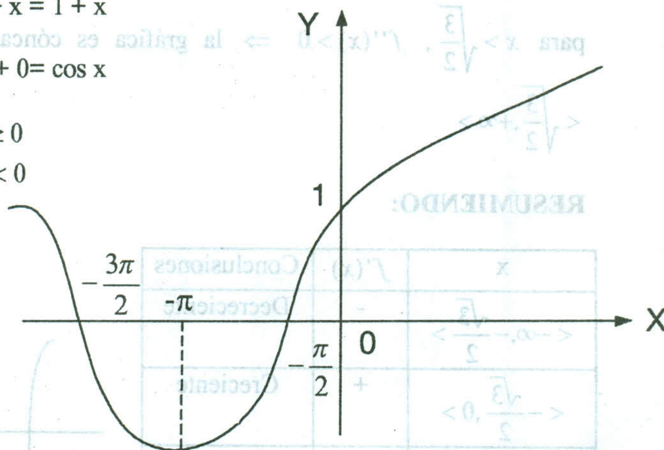
Solución

Sí $x\geq 0 \Rightarrow f(x)=\cos 0+x=1+x$

Sí $x<0 \Rightarrow f(x)=\cos x+0=\cos x$

Luego: $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\geq 0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$

Su gráfica es:



(12) Sea $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$, Hallar:

a) Los intervalos donde f es creciente y decreciente.

b) Los valores máximos y mínimos relativos.

c) Puntos de inflexión y graficar.

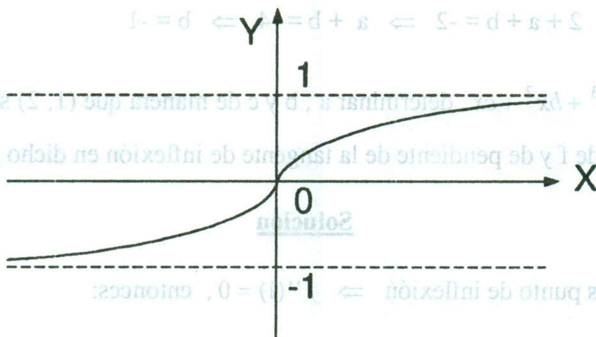
Solución

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$ entonces $f'(x)=\dfrac{7}{(x^2+7)^{\frac{3}{2}}}$

$f'(x)>0$, $\forall$ x $\in$ R, entonces f es estrictamente creciente en R.

No tiene máximos ni mínimos relativos. Además $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

f(0) = 0, su gráfica es:



II.

① Si $f(x)=ax^3+bx^2$, determinar a y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en (1,2)

Solución

Como (1,2) es punto de inflexión $\Rightarrow f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx \;\Rightarrow\; f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a+2b \;\Rightarrow\;$ 3a + b = 0

además (1,2) pertenece a la gráfica de f(x), entonces:

f(1) = 2 $\Rightarrow$ f(1) = a + b = 2 $\Rightarrow$ a + b = 2. Luego: $\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-1 \\ b=3 \end{matrix}$

② Determinar a y b, tal que: $f(x)=2x^3+ax^2+b$ presenta un extremo relativo en (1, -2)

Solución

Como (1, -2) es un extremo relativo $\Rightarrow$ $f'(1)=0$

$f'(x)=6x^2+2ax \Rightarrow f'(1)=6+2a=0 \Rightarrow$ a = -3

además (1, -2) pertenece a la gráfica de f, entonces:

f(1) = -2 $\Rightarrow$ 2 + a + b = -2 $\Rightarrow$ a + b = -4 $\Rightarrow$ b = -1

③ Si $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, determinar a , b y c de manera que (1, 2) sea punto de inflexión de la gráfica de f y de pendiente de la tangente de inflexión en dicho punto sea –2.

Solución

Como (1,2) es punto de inflexión $\Rightarrow$ $f''(1)=0$, entonces:

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$ entonces:

$f''(1)=6a+2b=0$, de donde 3a + b = 0

además se tiene la pendiente de la tangente de inflexión en (1,2) es $f'(1)=-2$ entonces : $f'(1)=3a+2b+c=-2$ entonces 3a + 2b + c = -2

también (1, 2) pertenece a la gráfica entonces f(1) = 2, es decir:

f(1) = a + b + c = 2 $\Rightarrow$ a + b + c = 2. Luego $\begin{cases} 3a+b=0 \\ 3a+2b+c=-2 \\ a+b+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=4 \\ b=-12 \\ c=10 \end{matrix}$

(4) Hallar a, b, c y d de manera que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ presente extremos relativos en $(1, 2)$ y $(2, 3)$

Solución

Como $(1, 2)$ y $(2, 3)$ son extremos relativos $\Rightarrow$ $f'(1) = 0$, $f'(2) = 0$, entonces

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ de donde } \begin{cases} f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

además los puntos (1,2) y (2,3) pertenece a la gráfica, entonces:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a + b + c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \end{array}$$

por lo tanto se tiene: $$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 9 \\ c = -12 \\ d = 7 \end{array}$$

(5) Dada la función $f(x) = mx^3 + nx^2 + rx + t$, determinar las constantes m, n, r, t para que f tenga un extremo relativo en (0, 3) y la gráfica de f con punto de inflexión en (1,-1)

Solución

Como (0, 3) es un extremo relativo $\Rightarrow f'(0) = 0$ entonces

$f'(x) = 3mx^2 + 2nx + r \Rightarrow$ f(0) = r = 0 $\Rightarrow$ r = 0 además (0, 3) pertenece a la gráfica entonces f(0) = 3 entonces 0+0+0+t=3 $\Rightarrow$ t = 3. Como (1,-1) es punto de inflexión

$\Rightarrow f''(1) = 0$, $f''(x) = 6mx + 2n \Rightarrow f''(1) = 6m + 2n = 0$ de donde:

3m + n = 0 además el punto de inflexión está en la gráfica $\Rightarrow$ f(1) = -1 entonces

m + n + r + t = -1 $\Rightarrow$ m + n = -4. Por lo tanto: $\begin{cases} 3m+n=0 \\ m+n=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m=2 \\ n=-6 \\ r=0 \\ t=3 \end{matrix}$

(6) Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ una función. Hallar los valores de a, b, c, d tal que f tenga un punto de inflexión en $p(-\frac{1}{2},\frac{49}{12})$, y sea tangente a la recta y = 3–2x en el punto Q(0,3)

Solución

Como $p(-\frac{1}{2},\frac{49}{12})$ es un punto de inflexión entonces: $f''(-\frac{1}{2})=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(-\frac{1}{2})=-3a+2b=0 \Rightarrow$ -3a+2b=0

además $p(-\frac{1}{2},\frac{49}{12})$ pertenece a la gráfica de f entonces

$f(-\frac{1}{2})=\frac{49}{12} \Rightarrow -\frac{a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{c}{2}+d=\frac{49}{12}$

sea $L_t: y=-2x+3 \Rightarrow mL_t=-2 \Rightarrow f'(0)=-2 \Rightarrow$ 0 + 0 + c = -2 $\Rightarrow$ c = -2

además el punto Q(0, 3) pertenece a la gráfica $\Rightarrow$ f(0) = 3 $\Rightarrow$ 0+0+0+d=3 $\Rightarrow$ d = 3

$\begin{cases} -3a+2b=0 \\ -\frac{a}{8}+\frac{b}{4}=\frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -3a+2b=0 \\ -\frac{a}{2}+b=\frac{1}{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \end{matrix}$. Por lo tanto $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, c = -2, d = 3

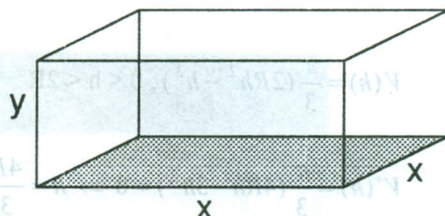
III. PROBLEMAS SOBRE MAXIMOS Y MINIMOS

(1) Una caja rectangular tiene una base cuadrada y no tiene tapa. El área combinada de los lados y el fondo es de 48 pies cuadrados. Hallar las dimensiones de la caja de máximo volumen que cumpla estos requerimientos.

Solución

Condición del problema: $A = x^2 + 4xy = 48$

de donde $y = \dfrac{48 - x^2}{4x}$ además $V = x^2 y$



$$V(x) = x^2\left(\frac{48 - x^2}{4x}\right) = \frac{48x - x^3}{4}$$

$$V'(x) = \frac{48 - 3x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = \pm 4 \text{ puntos críticos}$$

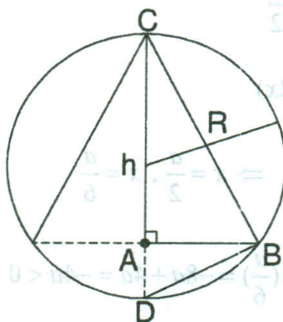
$$V''(x) = -\frac{3}{2}x \Rightarrow V''(4) = -6 < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo en } x = 4$$

como $y = \dfrac{48 - x^2}{4x} \Rightarrow y = 2$. Luego las dimensiones de la caja deben ser x = 4, y = 2.

② Encontrar la altura del cono recto de mayor volumen que pueda inscribirse en una esfera de radio R.

Solución

Se sabe que el volumen del cono es: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ ...(1)



Del gráfico se observa que: $\Delta CAB \cong \Delta BAD$ entonces;

$$\frac{h}{r} = \frac{r}{2R - h} \Rightarrow r^2 = 2Rh - h^2 \qquad \text{...(2)}$$

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene: $V = V(h) = \frac{\pi h}{3}(2Rh - h^2) = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3)$

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3)\ ,\ 0 < h < 2R$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(4Rh - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{4R}{3}$$

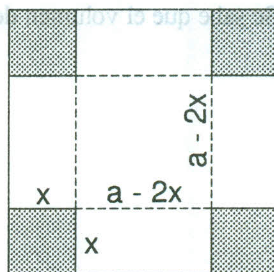
$$V''(h) = \frac{\pi}{3}(4R - 6h) \Rightarrow V''(\frac{4R}{3}) = \frac{\pi}{3}(4R - 8R) = -\frac{4\pi}{3}R < 0$$

$\Rightarrow\ \exists$ máximo en $h = \frac{4R}{3}$ por lo tanto para $h = \frac{4R}{3}$ se tiene el volumen máximo.

(3) Dada una hoja cuadrada de lado a, se desea construir con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determinar el lado de los cuadrados que deben ser cortados de modo que el volumen de la caja sea el mayor posible.

Solución

El lado del cuadrado cortado = x entonces el volumen de la caja es:



$$V(x) = x(a - 2x)^2\ ,\ 0 < x < \frac{a}{2}$$

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x)$$

$$V'(x) = (a - 2x)(a - 6x) = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}\ ,\ x = \frac{a}{6}$$

$$V''(x) = -8a + 24x \Rightarrow V''(\frac{a}{6}) = -8a + 4a = -4a < 0$$

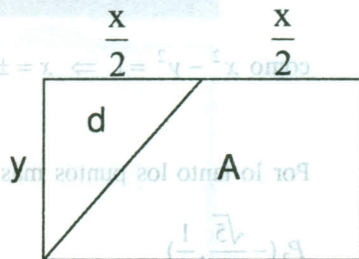
$\Rightarrow\ \exists$ máximo en $x = \frac{a}{6}$

Por lo tanto el lado del cuadrado cortado para obtener volumen máximo es $x = \frac{a}{6}$

④ Un rectángulo a de tener un área de 64 pulgadas cuadradas. Hallar sus dimensiones, de forma que la distancia desde una de sus esquinas al punto medio de un lado no adyacente sea mínima.

Solución

Datos del problema:



$A = xy = 64 \Rightarrow y = \dfrac{64}{x}$, $d = \sqrt{y^2 + \dfrac{x^2}{4}}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{4096}{x^2} + \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{16384 + x^4}}{2x}$ entonces

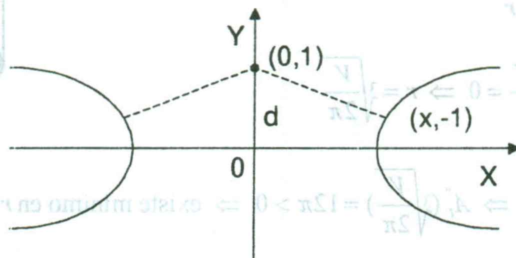
$f'(x) = \dfrac{x^4 - 16384}{2x^2\sqrt{16384 + x^4}} = 0 \Rightarrow x^4 - 16384 = 0$, de donde $x = \pm 8\sqrt[4]{2}$

Como $y = \dfrac{64}{x} \Rightarrow y = 4\sqrt[4]{2}\sqrt{2}$

Luego las dimensiones son $4\sqrt[4]{2}\sqrt{2}$ y $8\sqrt{2}$ pulgadas.

⑤ Hallar los puntos de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ más próximo al punto (0, 1)

Solución



Condición del problema $d = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

Como $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = y^2 + 1$

Entonces $f(y)=\sqrt{y^2+1+(y-1)^2}=\sqrt{2y^2-2y+2}$

$$f'(y)=\frac{2y-1}{\sqrt{2y^2-2y+2}}=0 \Rightarrow 2y-1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

como $x^2-y^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y^2+1} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Por lo tanto los puntos más cercanos a la hipérbola al punto (0, 1) son $P_1(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2})$ y $P_2(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2})$

(6) Si un recipiente cilíndrico de lámina (cerrado en ambos extremos) ha de tener V como volumen, encuéntrese las dimensiones que requieran la mínima cantidad de material.

Solución



Datos del problema: $V=\pi r^2 h$ de donde $h=\frac{V}{\pi r^2}$

$A_t=2\pi r^2+2\pi rh$ entonces $A_t=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$

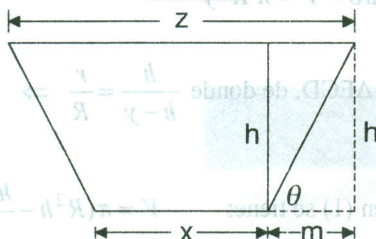
$$A_t(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

$$A_t'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=0 \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$A_t''(r)=4\pi+\frac{4V}{r^3} \Rightarrow A_t''(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})=12\pi>0 \Rightarrow$ existe mínimo en $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

(7) La sección de un canal de irrigación abierto ha de tener la forma de un trapezoide isósceles con lados de pendiente $\frac{4}{3}$. Si el área de la sección a de ser $52.674m^2$. ¿Qué dimensiones son las que hacen mínima la superficie sustentadora (el fondo y los lados)?

Solución



$\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}=\frac{h}{m} \Rightarrow m=\frac{3h}{4}$; z = x + 2m $\Rightarrow 52.674=(x+\frac{3}{4}h)h \Rightarrow x=\frac{52.674}{h}-\frac{3}{4}h$

Además se conoce por geometría que: s = (x+2y)L, donde $y=\sqrt{h^2+m^2} \Rightarrow y=\frac{5h}{4}$

$$s(h)=(\frac{52.674}{h}-\frac{3}{4}h+\frac{5h}{2})L \Rightarrow s(h)=(\frac{52.674}{h}+\frac{7h}{4})L$$

$$s'(h)=(-\frac{52.674}{h^2}-\frac{7}{4})L=0 \Rightarrow h^2=\frac{4(52.674)}{7} \Rightarrow h^2=30.0994 \Rightarrow h=5.5 \text{ mts.}$$

Como $y=\frac{5}{4}h \Rightarrow$ y = 6.875 mts

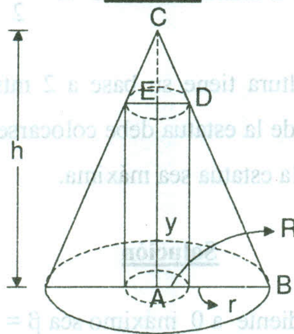
Como $x=\frac{52.674}{h}-\frac{3}{4}h \Rightarrow$ x = 5.45 mts.

Por lo tanto las dimensiones son: x = 5,45 mts. y = 6.87 mts. h = 5.5 mts.

(8) En un cono circular recto de radio r, se inscribe un cilindro circular recto. Hallar el radio R del cilindro para que:

a) Su volumen sea máximo **b)** Su área lateral sea máxima.

Solución



a) Volumen del cilindro = $V = \pi R^2 y$ ...(1)

Además ΔABC ≅ ΔECD, de donde $\frac{h}{h-y} = \frac{r}{R} \Rightarrow y = h - \frac{hR}{r}$ ...(2)

reemplazando (2) en (1) se tiene: $V = \pi(R^2 h - \frac{hR^3}{r})$

$$V(r) = \pi h(R^2 - \frac{hR^3}{r}) \Rightarrow V'(R) = \pi h(2R - \frac{3R^2}{r}) = 0 \text{ de donde } R = \frac{2r}{3}$$

$$V''(R) = \pi h(2 - \frac{6R}{r}) \Rightarrow V''(\frac{2r}{3}) = \pi h(2-4) = -2\pi h < 0$$

$\Rightarrow \exists$ máximo cuando $R = \frac{2r}{3}$

b) El área lateral del cilindro es: $A = 2\pi R y$

$$A(R) = 2\pi R(h - \frac{hR}{r}) = 2\pi h(R - \frac{R^2}{r})$$

$$A'(R) = 2\pi h(1 - \frac{2R}{r}) = 0 \Rightarrow R = \frac{r}{2}$$

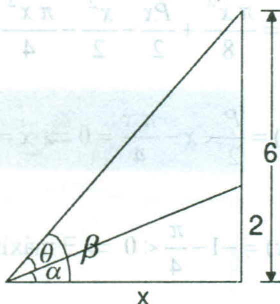
$$A''(R) = -\frac{4\pi h}{r} < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo cuando } R = \frac{r}{2}$$

(9) Una estatua de 6 mts. de altura tiene su base a 2 mts. arriba del nivel del ojo de un observador. A que distancia de la estatua debe colocarse el observador para que el ángulo subtendido desde su ojo por la estatua sea máxima.

Solución

Sea x la incógnita correspondiente a θ máximo sea β = θ + α, de donde θ = β - α

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}$$



además $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{x}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{x}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{6}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{12}{x^2}} = \frac{4x}{x^2 + 12}$$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{4x}{x^2 + 12} \Rightarrow \theta = arc.\operatorname{tg}(\frac{4x}{x^2 + 12})$, derivando:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{D_x(\frac{4x}{x^2 + 12})}{1 + \frac{16x^2}{(x^2 + 12)^2}} = \frac{\frac{4(x^2 + 12) - 4x(2x)}{(x^2 + 12)^2}}{\frac{(x^2 + 12)^2 + 16x^2}{(x^2 + 12)^2}} = \frac{48 - 4x^2}{x^4 + 40x^2 + 144}$$

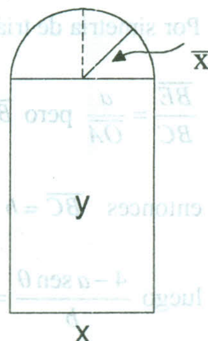
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{48 - 4x^2}{x^4 + 40x^2 + 144} = 0 \quad \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

Por lo tanto analizando para $x = 2\sqrt{3}$ se tiene que sea máximo.

(10) Una ventana tiene la forma rectangular con su parte superior en media circunferencia. Cuáles serán sus dimensiones para que penetre el máximo de luz para un perímetro dado.

Solución

De los datos del problema se tiene:



$P = \frac{\pi x}{2} + 2y + x =$ perímetro, $y = \frac{1}{2}(P - x - \frac{\pi x}{2})$

La cantidad total de luz correspondiente a la mayor superficie es:

$$A(x) = \frac{\pi x^2}{8} + \frac{x}{2}(P - x - \frac{\pi x}{2})$$

$$A(x)=\frac{\pi x^2}{8}+\frac{Px}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi x^2}{4}=\frac{Px}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi x^2}{8}$$

$$A'(x)=\frac{P}{2}-x-\frac{\pi x}{4}=0 \Rightarrow x=\frac{2P}{\pi+4}$$

$$A''(x)=-1-\frac{\pi}{4}<0 \Rightarrow \exists \text{ máximo en } x=\frac{2P}{\pi+4}$$

como $y=\frac{1}{2}(P-x-\frac{\pi x}{2})=\frac{1}{2}(P-\frac{2P}{\pi+4}-\frac{\pi}{2}(\frac{2P}{\pi+4}))=\frac{P}{\pi+4}$

Por lo tanto las dimensiones son: $x=\frac{2P}{\pi+4}$ y $y=\frac{P}{\pi+4}$

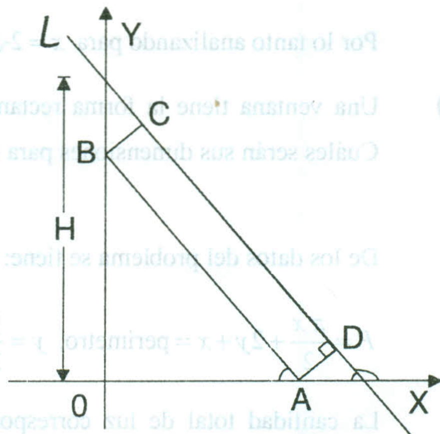
(11) Dada la recta L: x + 2y = 8, encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima con uno de sus lados sobre esta recta y cuyos otros dos vértices están en los semi ejes coordenadas positivos.

Solución

$mL=-\frac{1}{2}=\operatorname{tg}\alpha$, además $\theta = 180 - \alpha$,

entonces $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(180-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$

$\overline{OA}=a\cos\theta$, $\overline{OB}=a\operatorname{sen}\theta$

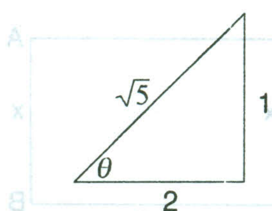


Por simetría de triángulos $\Delta BEC \cong \Delta OBA$

$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=\frac{a}{\overline{OA}}$ pero $\overline{BE}=4-a\operatorname{sen}\theta$

entonces $\overline{BC}=b$ y $\overline{OA}=a\cos\theta$

luego $\frac{4-a\operatorname{sen}\theta}{b}=\frac{a}{a\cos\theta} \Rightarrow$ b = cos θ(4-asenθ)



$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$b = \frac{2}{\sqrt{5}}(4 - \frac{a}{\sqrt{5}}) = \frac{8\sqrt{5} - 2a}{5}$$

área = $A = ab = \frac{8\sqrt{5}a - 2a^2}{5} = A(a)$ derivando tenemos

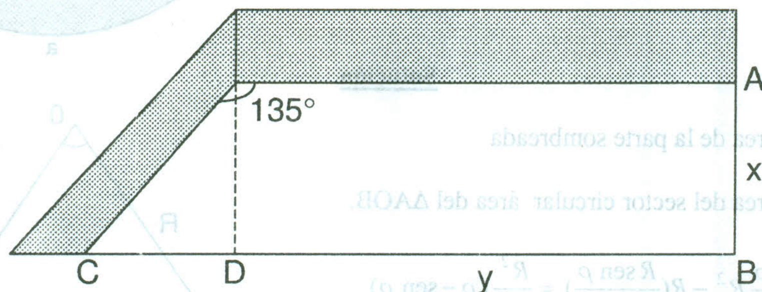
$$A'(a) = \frac{8\sqrt{5} - 4a}{5} = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

$$A''(a) = -\frac{4}{5} < 0 \Rightarrow \exists \text{ máximo en } a = 2\sqrt{5}$$

como $b = \frac{8\sqrt{5} - 2a}{5} = \frac{8\sqrt{5} - 4\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Luego las dimensiones del rectángulo son: $a = 2\sqrt{5}$ y $b = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

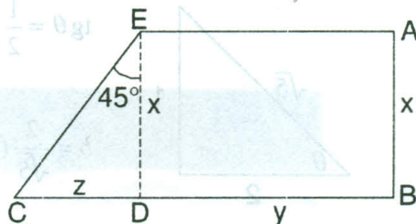
(12) Un río tiene un codo de 135° (ver figura) un granjero desea construir un corral bordeado por dos lados por el río y los otros dos por 1 Km. de valle ABC. Hallar las dimensiones del corral de área máxima.



Solución

Se tiene que $z = x$ por ser triángulo isósceles

De los datos del problema se tiene:



$\overline{AB}+\overline{BC}=1km.=2x+y$

de donde y = 1 – 2x.

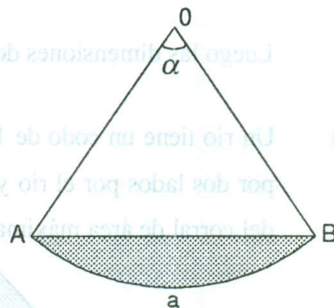
A = área total es $=xy+\frac{x^2}{2}=x(1-2x)+\frac{x^2}{2} \Rightarrow A(x)=x-\frac{3x^2}{2}$

$A'(x)=1-3x \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ número crítico

$A''(x)=-3 \Rightarrow A''(\frac{1}{3})<0 \Rightarrow \exists$ máximo en $x=\frac{1}{3}$, y como $y=1-2x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

por lo tanto las dimensiones son: $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de Km.

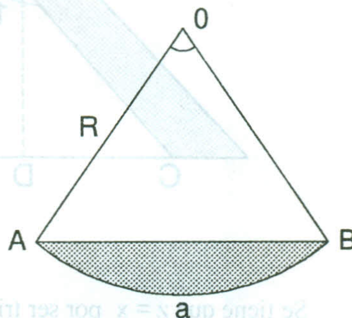
(13) Una hoja de lata de anchura "a" debe ser encarvada longitudinalmente en forma de canalón abierto (ver figura). ¿Qué ángulo central ρ debe tomarse para que el canalón tenga la mayor capacidad posible?



Solución

A = área de la parte sombreada

A = área del sector circular área del ΔAOB.



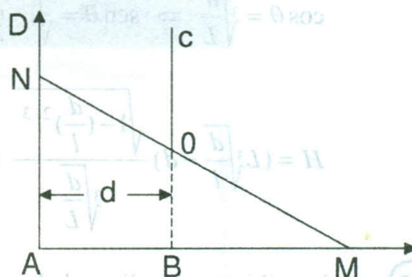
$A=\frac{\rho}{2}R^2-R(\frac{R\operatorname{sen}\rho}{2})=\frac{R^2}{2}(\rho-\operatorname{sen}\rho)$

$\frac{dA}{d\rho}=\frac{R^2}{2}(1-\cos\rho)=0 \Rightarrow \cos\rho=1 \Rightarrow \rho=0$

como $0 < \rho < \pi$, por lo tanto para obtener la mayor capacidad posible se tiene $\rho = \pi$.

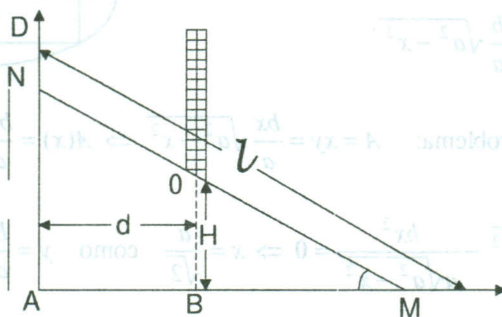
Es decir que la sección del canalón tiene la forma de semicircunferencia.

(14) Determinar la altura mínima $h = \overline{OB}$ que puede tener la puerta de una torre vertical ABCD, para que atravéz de ella, se pueda introducir en la torre, una barra rígida $\overline{MN}$, de longitud L, cuyo extremo M resbalará a lo largo de la línea horizontal $\overline{AB}$. La anchura de la torre es d < L (ver figura).



Solución

Haciendo rodar la barra por ambas paredes a una distancia "d", desde la pared vertical, la barra se levantará una longitud H del suelo. El problema nos pide, este máximo levantamiento y para esto se tiene:



Por semejanza de triángulos se tiene: $\Delta BOM \cong \Delta MAN$

$$\frac{L\cos\theta - d}{H} = \frac{L\cos\theta}{L\operatorname{sen}\theta}\text{, de donde } H = \frac{L\cos\theta - d}{c\operatorname{tg}\theta}$$

$H = (L\cos\theta - d)\operatorname{tg}\theta$ ahora derivando:

$$\frac{dH}{d\theta} = (L\cos\theta - d)\sec^2\theta + \operatorname{tg}\theta(-l\operatorname{sen}\theta) = 0$$

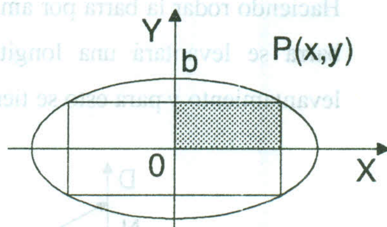
$$\frac{L\cos\theta-d}{\cos^2\theta}=\frac{L\,\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \cos^3\theta=\frac{d}{L}$$

$$\cos\theta=\sqrt[3]{\frac{d}{L}} \Rightarrow \text{sen}\,\theta=\sqrt{1-(\frac{d}{L})^{2/3}}$$

$$H=(L\sqrt[3]{\frac{d}{l}}-d)\frac{\sqrt{1-(\frac{d}{l})^{2/3}}}{\sqrt[3]{\frac{d}{L}}}$$ simplificando se tiene: $H=(\sqrt[3]{L^2}-\sqrt[3]{d^2})^{3/2}$

(15) Inscribir en una elipse dada, un rectángulo de la mayor área posible, que tenga los lados paralelos a los ejes de la propia elipse.

Solución



La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

de donde: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Condición del problema: $A=xy=\frac{bx}{a}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow A(x)=\frac{bx}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, derivando

$$\frac{dA}{dx}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{bx^2}{a\sqrt{a^2-x^2}}=0 \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{como} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow y=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

Luego las dimensiones del rectángulo son: $2x=\frac{2a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a$, $2y=\frac{2b}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}b.$

IV. PROBLEMA SOBRE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y DE ROLLE

(1) Verificar las condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle son satisfechas por la función dada en el intervalo indicado. Luego encontrar un valor adecuando para C que satisface la conclusión del teorema.

a) $f(x)=x^2-4x+3$, $[1, 3]$

Solución

i) La función f(x) es continua en [1, 3]

ii) Como $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow \exists \; f'(x) \quad \forall x$

iii) f(a) = f(b) = 0 puesto que f(-1) = 0 y f(3) = 0

ahora hallaremos un valor z ∈ <1, 3>, haciendo:

$f'(z) = 0$ para esto se tiene $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow f'(z) = 2z - 4 = 0 \Rightarrow z = 2$

b) $f(x) = x^3 - 16x$, [-4, 0]

Solución

i) La función f(x) es continua en [-4, 0]

ii) Como $f'(x) = 3x^2 - 16 \Rightarrow \exists \; f'(x), \forall x \quad \therefore$ f(x) es diferenciable en <-4,0>

iii) f(a) = f(b) = 0 puesto que f(-4) = 0 y f(0) = 0 ahora hallaremos un valor z ∈ <-4, 0>, haciendo f'(z) = 0

como $f'(x) = 3x^2 - 16 \Rightarrow f(z) = 3z^2 - 16 = 0$ de donde $z = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2;$ [1, 2]

Solución

i) La función f(x) es continua en [1, 2]

ii) Como $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 \Rightarrow \exists \; f'(x) \forall x \quad \therefore$ f es diferenciable en <1,2>

iii) f(a) = f(b) = 0 puesto f(1) = 0, f(2) = 0 ahora hallaremos un valor z ∈ <1, 2>, haciendo $f'(z) = 0$

como $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 \Rightarrow f'(z) = 3z^2 - 4z - 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}$

por lo tanto $\exists \; z = \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}$ en <1, 2> tal que $f'(z) = 0$.

(2) Verificar que la hipótesis del teorema del valor medio se satisface para la función dada en el intervalo indicado. Luego encontrar un valor adecuado z, que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

a) $f(x)=x^2+2x-1$, $[0, 1]$

Solución

Se tiene que f(x) es continua y diferenciable ∀ x y con esto satisface las condiciones del teorema. Ahora hallaremos un valor z en <0, 1>, haciendo

$$f'(z)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Rightarrow f(1)-f(0)=2-(-1)=3$$

como: $f'(x)=2x+2 \Rightarrow f'(z)=2z+2=3$, de donde $z=\frac{1}{2}\in <0,1>$

b) $f(x)=x^{2/3}$, $[0,1]$

Solución

Calculamos la derivada: $f'(x)=\frac{2}{3x^{1/3}}$ entonces f(x) es diferenciable en <-∞, 0> ∪ <0, +∞> y por lo tanto es continua en [0,1].

Ahora hallaremos un valor para z haciendo $f'(z)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(z)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$

como $f'(x)=\frac{2}{3x^{1/3}} \Rightarrow f'(z)=\frac{2}{3z^{1/3}}=1 \Rightarrow z^{1/3}=\frac{2}{3} \Rightarrow z=\frac{8}{27}\in$ <0, 1>

c) $f(x)=x-1+\frac{1}{x+1}$; $[\frac{3}{7},3]$

Solución

La función f(x) es continua en $[\frac{3}{7},3]$, y como $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow$ f(x) es diferenciable en <-∞, -1> ∪ <-1, +∞> en particular es diferenciable en $<\frac{3}{7},3>$

ahora hallaremos un valor $z\in <\frac{3}{7},3>$ haciendo

$$f'(z)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(\frac{3}{7})}{3-\frac{3}{7}}=\frac{\frac{9}{4}-\frac{9}{10}}{\frac{18}{7}}=\frac{33}{40} \quad \text{como } f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(z)=1-\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{33}{40}\Rightarrow (z+1)^2=\frac{40}{7}\Rightarrow z=-1\pm\sqrt{\frac{10}{7}}\Rightarrow z=-1+\sqrt{\frac{40}{7}}\in<\frac{3}{7},3>$$

(3) Verificar si el teorema del valor medio es aplicable a la función: $f(x)=\begin{cases}8-4x^2 & si\, x\le 1\\ 4x^{-2} & si\, x>1\end{cases}$

en el intervalo [0, 2] en caso afirmativo hallar el valor ó valores que lo verifican.

Solución

i) Analizamos la continuidad de la función f(x) en [0,2] para esto veremos si es continua en el punto sospechoso x = 1.

f(x) es continua en x = 1 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$$\exists \lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 8-4x^2=8-4=4$$

como $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ = f(1) = 4 $\Rightarrow$ f(x) es continua en x = 1.

por lo tanto f(x) es continua en [0, 2]

ii) Como $f'(x)=\begin{cases}-8x\ , & x\le 1\\ -\frac{8}{x^3}, & x>1\end{cases}$ y $f'(1)^-=f'(1)^+=-8 \Rightarrow$ f(x) es diferenciable en <0, 2> por lo tanto satisface las condiciones del teorema del valor medio, entonces $\exists$ z $\in$ <0, 2> y lo hallaremos haciendo

$$f'(x)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1-(8)}{2-0}=-\frac{7}{2}$$

como $f'(1)=-8 \Rightarrow$ z < 1 ó z > 1 pero $f'(x)=-8x$ para x ≤ 1

$$\Rightarrow \quad f'(z) = -8z = -\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{7}{16} \in \langle 0, 2\rangle \text{ además } f'(x) = -\frac{8}{x^3} \text{ para } x > 1$$

$$\Rightarrow \quad f'(z) = -\frac{8}{z^3} = -\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{\frac{16}{7}} \in \langle 0, 2\rangle$$

Luego los valores que satisfacen el teorema del valor medio son $\frac{7}{16}$ y $\sqrt[3]{\frac{16}{7}}$

④ Verificar si el teorema del valor medio es aplicable a la función $f(x) = \frac{2x-1}{3x-4}$ en el intervalo [1, 2], en caso afirmativo hallar el valor ó valores que lo verifican.

Solución

F(x) no es continua en $x = \frac{4}{3} \in [1,2]$, por lo tanto no es diferenciable en $\langle 1, 2\rangle$

Como f(1) = -1 y $f(2) = \frac{3}{2}$ entonces no existe $z \in \langle 1, 2\rangle$

Tal que $f'(z) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$

Como $f'(z) = \frac{5}{2}$ y $f'(x) = -\frac{5}{(3x-4)^2} \Rightarrow -\frac{5}{(3z-4)^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}i+4}{3}$

Por lo tanto no existe z real que $z \in \langle 1, 2\rangle$.

Luego no se cumple las condiciones del teorema del valor medio.

5.15 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Determinar los puntos críticos, intervalos donde la función es creciente y decreciente, los máximos y mínimos relativos.

① $f(x) = x^4 - 14x^2 - 24x + 1$ **Rpta.** máx. x = -1 y mín. x = -2,3

(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ **Rpta:** máx. x = 0 y mín. x = -2

(3) $f(x)=2-3x+x^3$ **Rpta.** máx. x = -1 y mín. x = 1

(4) $f(x)=1-(x-2)^{4/5}$ **Rpta.** máx. x = 2

(5) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ **Rpta.** máx. $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y mín. $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(6) $f(x)=x^2(1-x\sqrt{x})$ **Rpta.** máx. $x=2\sqrt[3]{\dfrac{2}{49}}$ y mín. x = 0

(7) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-23}{x-4}$ **Rpta.** máx. x = 3 y mín. x = 5

(8) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ **Rpta.** máx. x = 1 y mín. x = -1

(9) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ **Rpta.** mín. $x=\dfrac{1}{2}$

(10) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ **Rpta.** máx. x = 1 y mín. x = -1

(11) $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$ **Rpta.** máx. x = -1 y mín. x = 3

(12) $f(x)=\dfrac{1}{Ln(x^4+4x^3+30)}$ **Rpta.** máx. x = -3

(13) $f(x)=-x^2\sqrt{x^2+2}$ **Rpta.** máx. x = 0

(14) f(x) = x – Ln(1 – x) **Rpta.** mín. x = 0

(15) $f(x)=x-Ln(1+x^2)$ **Rpta.** No existe, crece.

(16) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$ **Rpta.** máx. x = 0 y mín. $x=\pm a$

(17) $f(x)=(x^2-2x)Lnx-\frac{3}{2}x^2+4x$ **Rpta.** máx. x = 1 y mín. x = e

(18) $f(x)=\frac{x}{x^2-6x-16}$ **Rpta.** es decreciente <∞,2>,<-2,8>,<8,+∞>

(19) f(x) = xLnx **Rpta.** mín. en $x=\frac{1}{e}$

(20) f(x) = arc.sen (1+x) **Rpta.** <-2, 0> crece.

(21) $f(x)=2e^{x^2-4x}$ **Rpta.** mín. en x = 2

(22) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ **Rpta.** mín. $x=\pm 1$ y máx. x = 0

(23) $f(x)=\frac{(x-2)(8--x)}{x^2}$ **Rpta.** máx. en x = 3.2

(24) f(x) = xarc.tgx **Rpta.** ∄ máx ni mín.

(25) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$ **Rpta.** máx. en $x=-2\sqrt{3}$; mín. en $x=2\sqrt{3}$

(26) $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$ **Rpta.** mín. x= 0.23, 1.43 y máx. x = 0

(27) $f(x)=xLn^2x$ **Rpta.** máx. en $x=\frac{1}{e^2}$ y mín. en x = 1

(28) $f(x)=\frac{2arc.\text{tg}\,x}{3}+\frac{1}{3}arc.\text{tg}(\frac{x}{1-x^2})$ **Rpta.** No existe máx. ni mín.

(29) $f(x)=\frac{16}{x(4-x^2)}$ **Rpta.** máx. en $x=\frac{-2}{\sqrt{3}}$ y mín. en $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

(30) $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$ **Rpta.** máx. en x = 0

II. Construir las gráficas de las funciones indicando, los puntos de discontinuidad, los puntos críticos, intervalos en donde es creciente y decreciente, los máximos y mínimos relativos los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad.

(1) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$

(2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$

(3) $f(x) = x^2(x+4)^3$

(4) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

(5) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

(6) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 + 3x^2 + 2$

(7) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

(8) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

(9) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

(10) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{4/3}$

(11) $f(x) = (x+2)\sqrt{-x}$

(12) $f = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$

(13) $f(x) = x - \ln(x+1)$

(14) $f(x) = Ln(x^2 + 1)$

(15) $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

(16) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

(17) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

(18) $f(x) = x + \dfrac{Lnx}{x}$

(19) $f(x) = \dfrac{2arc.\operatorname{tg} x}{3} + \dfrac{1}{3} arc.\operatorname{tg} \dfrac{x}{1 - x^2}$

(20) $f(x) = xe^{-x^2}$

(21) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$

(22) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$

(23) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(24) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$

(25) $f(x) = \dfrac{arc.\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

(26) $f(x) = arc.\operatorname{sen}(1 - \sqrt[3]{x^2})$

(27) $f(x)=x+\operatorname{sen}x$

(28) $f(x)=\cos x.\cos 2x$

(29) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}x+\cos x}$

(30) $f(x)=\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x$

(31) $f(x)=\cos x-\cos^2 x$

(32) $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$

(33) $f(x)=Ln(e+\dfrac{1}{x})$

(34) $f(x)=\dfrac{Ln\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

(35) $f(x)=Ln(x^2-1)+\dfrac{1}{x^2-1}$

(36) $f(x)=(x+1)Ln^2(x+1)$

(37) $f(x)=\dfrac{x}{Lnx}$

(38) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}Ln(\dfrac{x}{a})$

(39) $f(x)=\dfrac{Lnx}{\sqrt{x}}$

(40) $f(x)=(x^2+2)e^{-x^2}$

(41) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

(42) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

(43) $f(x)=\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-4)^2}$

(44) $f(x)=2x+2-3\sqrt[3]{(x+2)^2}$

(45) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$

(46) $f(x)=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$

(47) $f(x)=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$

(48) $f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

(49) $f(x)=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$

(50) $f(x)=\dfrac{x+4}{2}\sqrt[3]{x-4}$

(51) $f(x)=\dfrac{(x^2+3)}{\sqrt{x^2+1}}$

(52) $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$

(53) $f(x)=2x^4-4x^3$

(54) $f(x)=4x^5-5x^4$

(55) $f(x)=2(18x+6x^2-2x^3-54)^{1/3}$

(56) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

(57) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{(x-1)^2}$

(58) $f(x)=\text{arctg}(\ln x)$

(59) $f(x)=Ln(3x-x^2)$

(60) $f(x)=e^{-x}\cos x$

III.

(1) Si $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, determine a, b y c de manera que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en (1,2) y que la pendiente de inflexión ahí sea –2.

(2) Si $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, determine los valores de a, b, c, d y e de manera que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en (1, -1), tenga ahí su origen y sea simétrica respecto al eje y.

(3) Obtener a y b tales que la función definida por: $f(x)=x^3+ax^2+b$, tenga un extremo relativo en (2,3).

(4) Determine a, b y c tales que la función definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, tenga un valor máximo relativo de 7 en 1 y la gráfica y = f(x) pase por el punto (2, -2).

(5) Hallar a, b, c y d para $y=ax^3+bx^2+cx+d$, sea tangente al eje X en (2 ,0) y tenga punto de inflexión (0, 4). **Rpta.** $a=\frac{1}{4}$, b = 0, c = -3, d = 4

(6) Determinar los coeficientes a, b, c y d de tal forma que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un máximo en (-1, 10) y un punto de inflexión en (1,-6).

Rpta. a = 1, b = -3, c = -9, d = 5

(7) Determinar las constantes a y b de manera que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, tenga un máximo relativo en x = -1 y un mínimo relativo en x = 3. **Rpta.** a = -3, b = -9

(8) Determinar la constante a de modo que la función $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ tenga un mínimo en x = 3. **Rpta.** a = 16

(9) Determinar las constantes a y b de manera que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tenga un mínimo relativo en x = 4 y un punto de inflexión en x = 1. **Rpta.** a = -3 y b = -24

(10) Determinar la constante a de modo que la función $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ tenga un punto de inflexión en x = 1. **Rpta.** a = -1

(11) Sea $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+2x-2$

a) ¿Qué condiciones deben satisfacer a y b para que en x = 1 exista punto de inflexión?

Rpta. 3a + b = -6

b) ¿Existen a y b de modo que en x = 1 exista punto de inflexión con tangente horizontal en este punto? **Rpta.** a = -3, b = 0

(12) Si $f(x)=|x|^a|x-1|^b$, donde a y b son números racionales positivos, demuestre que f tiene un valor máximo relativo igual a la expresión: $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$

IV. PROBLEMAS SOBRE MAXIMOS Y MINIMOS

(1) Encontrar el área del mayor triángulo isósceles que tenga un perímetro de 18 pulgadas.

Rpta. $A=9\sqrt{3}\,u^2$

(2) Se debe construir una lata cilíndrica (con tapa) de manera que se gaste el menor material posible. Cuál debe ser la relación entre la altura y el radio de la base para que esto ocurra?

Rpta. h = 2r

(3) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por P(3, 4) y forma con el primer cuadrante un triángulo de área mínima. **Rpta.** 4x + 3y – 24 = 0

(4) Un rectángulo tiene dos de sus vértices sobre el eje x los otros dos están respectivamente sobre las rectas y = x, 4y + 5x = 20. Hallar el valor de Y para que el área del rectángulo sea máximo. **Rpta.** $\frac{10}{9}$

(5) Una hoja de papel tiene Acm^2 de material impreso, con márgenes superior e inferior de 4cm. y márgenes laterales de 2cm. Determinar cuales deben ser las dimensiones de la hoja para que se use la menor cantidad de papel. **Rpta.** $\frac{8+\sqrt{2}A}{2}$ Base y $8+\sqrt{2}A$ altura.

(6) Si los lados de un rectángulo son a y b, demostrar que el rectángulo más grande que puede construirse de manera que sus lados pasen por los vértices del rectángulo dada es un cuadrado de lado $a+\frac{b}{\sqrt{2}}$.

(7) Determinar la superficie lateral del cilindro recto que puede ser inscrito en un cono circular recto dado. **Rpta.** $A=\frac{ab\pi}{2}$.

(8) Un alambre de longitud L es cortado en dos partes, con una parte se forma un cuadrado y con la otra una circunferencia. De que modo debe ser cortado para que la suma de las áreas sea máxima? **Rpta.** $x=\frac{\pi L}{\pi+4}$ lado del cuadrado.

(9) Se quiere construir un jardín que tenga la forma de un sector circular con un perímetro de 30 mts. Hallar el jardín de mayor superficie. **Rpta.** $56.25mts^2$

(10) Se tiene una hoja rectangular de papel, de lados 8 y 15, se desea hacer con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determinar el lado de los cuadrados que deben ser cortados, afín de que el volumen sea el mayor posible. **Rpta.** $\frac{5}{3}$

(11) Un punto móvil P describe la curva $y=\frac{4}{x}$, x > 0. Determinar la distancia mínima de P al origen. **Rpta.** $2\sqrt{2}$

(12) Se necesita construir un embudo cónico cuya generatriz debe ser igual a 20 cm. Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible. **Rpta.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

(13) Si un paralelogramo y un triángulo tienen un vértice del paralelogramo está sobre los lados del triángulo dado. Probar que el área del mayor paralelogramo que se puede inscribir del modo descrito, es igual a la mitad del área del triángulo (se conoce la base y la altura del triángulo).

(14) Se quiere construir un jardín en forma de sector circular con un perímetro de 30 mts. Hallar el jardín de mayor superficie. **Rpta.** $A = 56.25mts^2$

(15) Hallar un punto sobre la parábola $y = 4 - x^2$, tal que la recta tangente en el segundo cuadrante, determine un triángulo de área mínima (con los ejes coordenados).

Rpta. $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

(16) Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área y con los lados paralelos a los ejes coordenados que puede inscribirse en la figura limitada por las dos parábolas $3y = 12 - x^2$, $6y = x^2 - 12$. **Rpta.** Base 4, altura 4.

(17) Hallar las dimensiones de un rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo de lados 8, 10, 12, tal que un lado del rectángulo está contenido en el lado del triángulo de lado 12. **Rpta.** Las dimensiones son $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ y 6.

(18) Debe construirse una lámina triangular isósceles y de 60cm. de perímetro de manera tal que al rotar sobre su lado común a los ángulos congruentes determine un sólido de volumen máximo. Cuáles deben ser las dimensiones de los lados de la lámina triangular?

Rpta. Las dimensiones son $\frac{45}{2}$ y 15

(19) Hallar la base y la altura de un triángulo isósceles de área mínima circunscrito a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y cuya base sea paralela al eje X. **Rpta.** Altura 3b, base $2\sqrt{3}$ a.

(20) Dados los puntos A(1,4) y B(3,0) en la elipse $2x^2 + y^2 = 18$, Hallar un tercer vértice C tal que el área del triángulo ABC sea máxima. **Rpta.** $(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$

(21) Un cuadrado de altura 1.4 mts. Cuelga de la pared de modo que su borde inferior está 1.8 mts. por encima del radio de la vista de un observador. A qué distancia de la pared debe colocarse el observador para que su posición sea la más ventajosa para contemplar el cuadro? (Angulo visual: el mayor posible). **Rpta.** 2.4 mts.

(22) Hallar el área del mayor rectángulo que tiene su base inferior en el eje X y con los vértices en la curva $y = 12 - x^2$ **Rpta.** $A = 32u^2$

(23) Si un punto de una elipse inscrito en un semicírculo está sobre el diámetro y tiene otros dos puntos sobre la semicircunferencia en posición simétrica. Demostrar que su área será un máximo igual a $\dfrac{2\pi r^2}{3\sqrt{3}}$ donde r es el radio del círculo.

(24) Un alambre de longitud L es cortado en dos secciones una para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Cómo debería cortarse el alambre

a) Para que la suma de las dos áreas sea máxima.

b) Para que la suma de las dos áreas sea mínima.

Rpta. **a)** Lado del cuadrado $= \dfrac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$ y Lado del triángulo $= \dfrac{3L}{9+4\sqrt{3}}$

b) Todo el cuadrado (área total máx.) $= \dfrac{L^2}{16}$

(25) Dado un sector circular de radio r; si el perímetro P mide 100 pies. ¿Qué valor del radio r producirá un área máxima? **Rpta.** r = 25

(26) Hallar la base superior de un trapecio isósceles de base 12m. y lados 5m. si su área es máxima. **Rpta.** $6 + \sqrt{86}$

(27) Hallar los puntos sobre la curva $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ que están:

a) más cercanas al origen. **b)** más alejadas del origen.

Rpta. **a)** $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ **b)** (1, 1) y (-1, 1)

(28) Un fabricante de cajas va ha producir cajas cerradas de volumen específico, cuya base es un rectángulo con longitud igual al triple del ancho. Encontrar las dimensiones más económicas. **Rpta.** La profundidad será la mitad de la longitud de la base.

(29) La resistencia de una viga rectangular es proporcional al ancho y al cuadrado de su profundidad. Encontrar las dimensiones de la viga más resistente que pueda ser cortada de un tronco, en forma de un cilindro recto circular de radio a.

Rpta. ancho $\frac{2}{\sqrt{3}}a$, profundidad $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$

(30) Un cono recto circular va a ser circunscrito en una esfera de radio conocido. Encontrar la razón de la altura al radio de la base del cono de volumen mínimo. **Rpta.** $2\sqrt{2}$

(31) Demostrar que el triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia es una triángulo equilátero.

(32) Un cono es cortado por un plano paralelo a su base. A qué distancia debe ser echo el corte, para que el cono recto de base en la sección determinada y de vértice en el centro del cono dado, tenga volumen máximo? **Rpta.** $\frac{1}{3}$ de la altura del cono.

(33) Una huerta rectangular ha de proyectarse al lado del solar de un vecino, y ha de tener una área de $10{,}800m^2$. Si el vecino paga la mitad de la cerca mediana. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la huerta para que el costo al cercarla sea para el dueño de la huerta sea mínimo?

(34) En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se inscribe un triángulo isósceles cuyo vértice es el punto (0, b). Hallar la ecuación de la base correspondiente al triángulo de área máxima.

Rpta. 2y + b = 0

(35) Un triángulo isósceles está circunscrito a un círculo de radio R. Demostrar que el triángulo de perímetro mínimo tiene por altura 3R.

(36) Un agricultor quiere construir y cercar un campo que tenga la forma de un sector circular. Si para cercarlo posee un alambre de 200m. de longitud. Calcular el radio que debe tener el sector para que el campo sea la más grande posible. **Rpta.** r = 50 m.

(37) Cada lado de un cuadrado tiene una longitud L. Demostrar que entre todos los cuadrados inscritos en el cuadrado dado, el de área mínimo tiene lados de longitud $\frac{L}{\sqrt{2}}$.

(38) Entre todos los cilindros circulares sector de área lateral dado "a". Demostrar que la menor esfera circunscrita tiene el radio R igual al radio r del cilindro multiplicado por $\sqrt{2}$.

(39) Tres ciudades están situadas en los vértices de un triángulo isósceles. Las ciudades B y C que distan entre sí 16 millas están situadas en la base, en tanto que A es el tercer vértice y a una distancia de 10 millas de la base. ¿A que distancia de A sobre la altura del triángulo, se debe ubicar una instalación de bombeo de manera que se emplee la menor longitud de cañerías para abastecer de agua a las tres ciudades? **Rpta.** $(10-\frac{8}{3}\sqrt{3})$ millas de A

(40) Un recipiente abierto está formado por un cilindro terminado por su parte inferior en una semiesfera; el espesor de sus paredes es constante. ¿Qué dimensiones deberá tener dicho recipiente para que, sin variar su capacidad, se gaste la menor cantidad de material?

Rpta. La altura de la parte cilíndrica de ser igual a cero, es decir el recipiente debe tener forma semi-esférica.

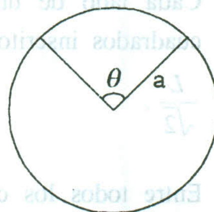
(41) Inscribir un rectángulo de la mayor área posible en el segmento de la parábola $y^2 = 2px$ cortado por el área x = 2a. **Rpta.** Los vértices deben estar en $(\frac{2a}{3}, \pm 2\sqrt{\frac{ap}{3}})$

(42) Hallar el área mínima del triángulo isósceles circunscrito a la elipse $b^2x^2 + a^2x^2 = a^2b^2$ cuyo lado desigual es paralelo al eje x. **Rpta.** ab $3\sqrt{3}$

(43) Si los lados de un rectángulo son a y b. Demostrar que el rectángulo más grande que puede construirse de manera que sus lados pasan por los vértices del rectángulo dado es un cuadrado de $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ de lado.

(44) Dado el volumen de un cilindro circular recto, hallar su altura y radio si la suma de las áreas de una de sus bases y de su superficie lateral es mínima. **Rpta.** b(altura)=r(radio)

(45) De una lámina circular de radio "a" se quiere recortar otra como la figura para hacer un cono circular recto. Si el cono debe tener Volumen máximo: Determinar el ángulo θ. **Rpta.** $\theta = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}}$ radianes



(46) Un hombre puede remar a 2mk/ hora y caminar 4km/hora. Si está a 3 km. De la playa y quiere llegar al punto Q que está a 4km. de P. Dónde tiene que desembarcar para que el tiempo sea mínimo? **Rpta.** $\sqrt{3}km.$ de P.

(47) Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en el rectángulo cuyas dimensiones son 10 y 15 cm, (los catetos). Dos lados del rectángulo están sobre los catetos del triángulo. **Rpta.** Las dimensiones son: 2.5 cm y 5 cm.

(48) Un jardín rectangular de 400 m^2 está rodeado por un camino de 2m. de ancho. ¿Que dimensiones debe tener el jardín para que el área total del jardín y el área del camino sea mínima.? **Rpta.** 20 x 20 (m).

(49) Se traza la tangente en un punto de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ de forma que el segmento de ella interceptado por los ejes coordenados sea mínimo. Demostrar que la longitud de dicho segmento es 9 unidades.

(50) Una persona está en un bote a 3 millas del punto más cercano a la playa y desea alcanzar en el menor tiempo posible una caseta de la playa, situada a una distancia de 5 millas en la perpendicular a la recta que una la posición del bote y el punto de la playa, suponiendo que puede caminar a razón de 5 millas por hora y remar a la velocidad de 4 millas por hora. Determinar el lugar donde debe descender a tierra. **Rpta.** A una milla de la caseta.

5.16. RAZON DE CAMBIO PROMEDIO Y RAZON DE CAMBIO CONSTANTE.-

Sea y una función de x y si x_1, x_2 son dos valores de x; donde y_1, y_2 son los correspondientes valores de y, entonces el cociente de las diferencias $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ le llamaremos razón de cambio de y con respecto a x en el intervalo (x_1, x_2). La razón de cambio promedio indica que y cambia en una cantidad $y_2 - y_1$ cuando x cambia de x_1 a x_2.

Si la razón de cambio no es constante a casi constante no es de tanto interés salvo como medio de comparación , pero si la razón de cambio promedio es la misma para todos los valores del intervalo (x_1, x_2), diremos que y está cambiando con respecto a x en una razón constante.

El valor del cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se llama razón de cambio de y con respecto a x. Por ejemplo, suponiendo que se está bombeando aceite, a razón constante en un tanque que contiene 10 litros a las 10.2' a.m. y 50 litros a las 10.12'a.m. se observa que el contenido está aumentando a 40 litros en 10', o sea 4 litros por minuto, por lo tanto en los 5' serán añadidos 5x4 = 20 litros más, en los siguientes 10' 40 más y así sucesivamente.

Este ejemplo expresaremos de un modo más formal: V = volumen de aceite en el tanque (función del tiempo) que se mide a partir de las 10 a.m. los valores de t son $t_1 = 2$ y $t_2 = 12$ y los correspondientes valores de V son $V_1 = 10$ y $V_2 = 50$ entonces por definición de razón de cambio promedio de V con respecto al tiempo en el intervalo (2, 12) es: $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{50 - 10}{12 - 2} = 4$ litros por minuto.

Puesto que la razón de cambio es constante.

5.17. FORMULA QUE RELACIONA DOS VARIABLES CUYA RAZON DE CAMBIO ES CONSTANTE.-

TEOREMA.- Si y es una función lineal de x, la razón de cambio de y con respecto a x es constante y viceversa.

Demostración

Como y es una función lineal de x entonces y = mx + b siendo m y b constante, sean x_1, x_2 dos valores cualquiera de x; y sea y_1, y_2 los correspondientes valores de y, entonces

$$\begin{cases} y_2 = mx_2 + b \\ y_1 = mx_1 + b \end{cases} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

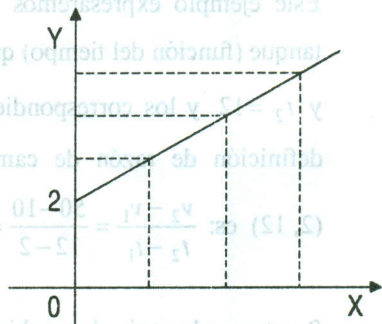
Lo cual demuestra que la razón de cambio de y con respecto a x es constante recíprocamente, si m es la razón de cambio de y con respecto a x donde x_1, y_1 son valores fijos correspondientes a x, y; y sean x, y; otro par de valores entonces por definición se tiene:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

que es una ecuación de primer grado y por lo tanto y es una función lineal.

Para el caso del ejemplo anterior t = 2, v = 10

V – 10 = 4(t – 2) $\Rightarrow$ V = 4t + 2



5.18 RAZON DE CAMBIO PROMEDIO.-

DEFINICIÓN.- Si y es función de x, la razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $(x_1, x_1 + \Delta x)$, es el valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x = x_1$

5.19 RAZONES INSTANTANEAS.-

DEFINICIÓN.- Si y es función de x, la razón de cambio instantáneo de y con respecto a x, cuando $x = x_1$ es el límite (si existe) de la razón de cambio promedio en el intervalo $(x_1, x_1 + \Delta x)$ cuando Δx se aproxima a cero.

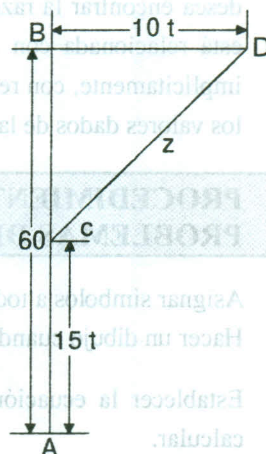
Expresado en otra forma se tiene: Si y = f(x), la función de cambio instantáneo de y con respecto a x, para x = a, es el valor de $\frac{dy}{dx}$ para x = a, es decir:

$$\text{Razón instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo.- A medio día un barco que navega hacia el norte está a 60 km. Al sur de otro barco que navega hacia el este. Si el primer barco navega a razón de 15 km/hora y el segundo barco a razón de 10km/h. Encontrar la velocidad con que estaría cambiando la distancia entre ellos.

a) a las 14 horas **b)** a las 15 horas.

Solución



Sean A y B las posiciones iniciales de los barcos y C y D las posiciones de t horas, entonces BD = 10t y CB = 60 – 15t, sea z la distancia entre ellos

$$z = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{(60-15t)^2 + 100t^2}$$

$$z = \sqrt{3600 - 1800t + 325t^2}$$

Para encontrar la razón a la cual está cambiando z se halla la derivada:

$\frac{dy}{dt} = \frac{325t - 900}{\sqrt{3600 - 1800t + 325t^2}}$ a las 14 horas t = 2, $\frac{dz}{dt} = \frac{-250}{\sqrt{130}} = -6.9$

quiere decir que los barcos se están aproximando uno a otro a razón de 6.9Km/h. cuando t= 3, $\frac{dz}{dt} = \sqrt{5} = 2.5$ quiere decir que los barcos se estarán separando a razón de 2.5Km/h.

5.20 VELOCIDAD Y ACELERACION RECTILINEA.-

DEFINICIÓN.- Si s = s(t) es la ecuación de la posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la velocidad del objeto en el instante t está dado por:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

DEFINICIÓN.- Si s = s(t) es la ecuación de la posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la aceleración del objeto en el instante t está dado por:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

5.21 RAZONES DE CAMBIO RELACIONADOS.-

Frecuentemente se conoce la razón de cambio de una variable con respecto al tiempo, y se desea encontrar la razón de cambio con respecto al tiempo de una segunda variable que está relacionada con la primera, dichos problemas se resuelven fácilmente, derivando implícitamente, con respecto al tiempo, la ecuación que liga las variables, y sustituyen de los valores dados de las mismas.

5.22 PROCEDIMIENTO ACONSEJADO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE VARIABLES RELACIONADAS.-

① Asignar símbolos a todas las cantidades, tanto a las conocidas como a las incógnitas. Hacer un dibujo cuando resulta factible.

② Establecer la ecuación que liga las variables tanto conocidas como las que se van a calcular.

③ Derivar implícitamente por la regla de la cadena ambos miembros de la ecuación respecto al tiempo t.

④ Sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y de sus razones de cambio, despejando entonces la razón de cambio pedida.

5.23 PROBLEMAS DESARROLLADOS.-

① Un globo está siendo inflado en tal forma que su volumen aumenta a razón de $5m^2$ */ min.* ¿A qué rapidez aumenta el diámetro cuando éste tiene 12m?

Solución

Datos del problema: V = Volumen del globo esférico $= \frac{4\pi r}{3}$

D = 2r = 12 ⇒ r = 6

$$\frac{dD}{dt} = 2\frac{dr}{dt} = ? \quad y \quad \frac{dV}{dt} = 5m^3 / min.$$

como $V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

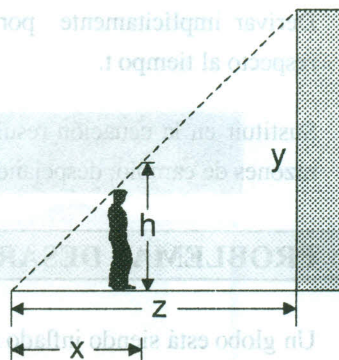
ahora reemplazando sus valores se tiene: $5 = 4\pi(6)^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0.011m / min.$

$$\therefore \frac{dD}{dt} = 2(0.011)m / min. = 0.022m / min.$$

② Un hombre de 1.8m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1.5m/seg. Si hay una lámpara sobre el suelo a 15m. del edificio. ¿Con qué rapidez se acorta la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9m. del mismo?

Solución

Datos del problema: $\frac{dx}{dt} = 1.5m/seg$



z = 15 mts. y h = 1.8 mts.

$\frac{dy}{dt} = ?$ cuando x = 9m.

Ahora por semejanza de triángulos.

$\frac{x}{z} = \frac{h}{y} \Rightarrow xy = zh = 15(1.8)m^2$ entonces $xy = 27m^2$, derivando implícitamente

$x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dt} = 0$ reemplazando tenemos $x\frac{dy}{dt} + \frac{27}{x}\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow 9\frac{dy}{dt} + \frac{27}{9}(1.5) = 0$

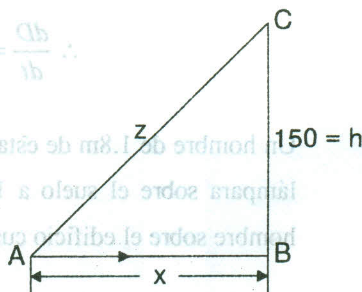
$9\frac{dy}{dt} + 4.5 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -0.5$

la sombra se acorta con una rapidez de $\frac{dy}{dt} = 0.5\ m/seg.$

(3) Un muchacho lanza una cometa a una altura de 150m. sabiendo que la cometa se aleja del muchacho a una velocidad de 20m/seg. Hallar, la velocidad a la que suelta el hilo cuando la cometa se encuentra a una distancia de 250 metros del muchacho.

Solución

Datos del problema: H = 150m. z = 250m.



$\frac{dx}{dt} = 20m/seg.$ y $\frac{dz}{dt} = ?$

En el ΔABC, por pitágoras

Se tiene: $z = \sqrt{x^2 + 22500}$ derivando implícitamente con respecto a t.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+22500}} \Rightarrow \text{reemplazando valores se tiene}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^2+22500}}.\frac{dx}{dt}, \text{ donde } x=\sqrt{z^2-150^2}$$

para $z=250 \Rightarrow x=\sqrt{62500-22500}=200$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{200}{\sqrt{40000+22500}}(20)=\frac{4000}{\sqrt{62500}}=\frac{4000}{250}=16 \qquad \therefore \frac{dz}{dt}=16m/seg.$$

(4) Dentro de un tanque cónico está entrando agua a razón constante de $3m^3/seg$.El radio del cono es de 5m. y su altura de 4m. encontrar:

a) La velocidad con que asciende la superficie libre de agua.

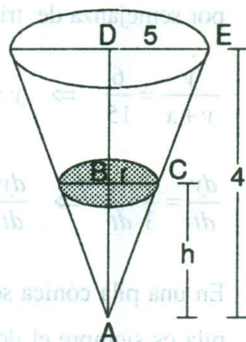
b) La razón de cambio (0 variaciones) respecto al tiempo de la velocidad de subida cuando la profundidad del agua es de 2m. (considere el vértice del cono hacia abajo).

Solución

Datos del problema: $\frac{dV}{dt}=3m^3/seg.$

$\forall$ t = (está aumentando).; H = 4 r = 5

a) El volumen del cono: $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$



por semejanza del triángulo ΔABC ≅ ΔADE

$$\frac{r}{h}=\frac{5}{4} \Rightarrow r=\frac{5h}{4} \text{ entonces } V=\frac{25\pi}{48}h^3$$

derivando implícitamente con respecto a t.

$$\frac{dV}{dt}=\frac{75\pi}{48}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 3=\frac{75\pi}{48}(2)^2\frac{dh}{dt}$$

$\frac{dh}{dt}=\frac{12}{25\pi}\,m/seg.$ cuando h = 2.

b) Ahora calcularemos $\frac{d}{dt}(\frac{dh}{dt})=\frac{d^2h}{dt^2}$, cuando h = 2m

$$\text{como } 3=\frac{dV}{dt}=\frac{75}{48}\pi h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 3=\frac{25}{16}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{48}{25\pi h^2} \Rightarrow \frac{d^2h}{dt^2}=-\frac{96}{25\pi h^3}\cdot\frac{dh}{dt}=-\frac{96}{(25\pi)(8)}\cdot(\frac{12}{25\pi})$$

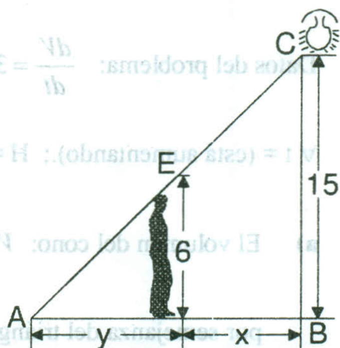
$$\frac{d^2h}{dt^2}=-(\frac{12}{25\pi})^2\,m/seg.$$

(5) Una lampara está a 15 pies sobre una recta horizontal. Si un hombre de 6 pies de altura camina alejándose de la luz a razón de 5 pies/seg. ¿Con qué rapidez se alarga su sombra?

Solución

Datos del problema: h = 15 pies

$\frac{dx}{dt}=5$pies/seg.



por semejanza de triángulos: $\Delta ADE \cong \Delta ABC$

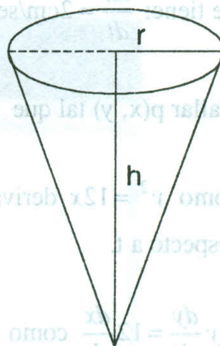
$\frac{y}{y+x}=\frac{6}{15} \Rightarrow y=\frac{2x}{3}$ derivando se tiene:

$\frac{dy}{dt}=\frac{2}{3}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{2}{3}(5)=\frac{10}{3}$ pies/seg.

(6) En una pila cónica se está dejando caer arena a razón de $10\,pies^3/min$. Si la altura de la pila es siempre el doble del radio de la base. ¿En que razón aumenta la altura cuando la pila tiene 8 pies de altura?

Solución

Datos del problema: $\frac{dV}{dt} = 10\text{pies}^3/\text{min}$.



h = 2r, Volumen de la pila cónica $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

implícitamente con respecto a t.

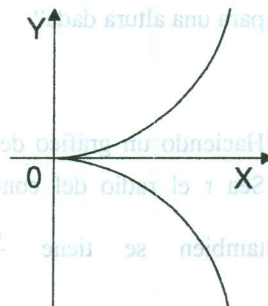
$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2 \frac{dh}{dt}$ reemplazando cuando h = 8

$10 = \frac{64\pi}{4}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{8\pi}$ pies/min.

(7) Un punto se mueve sobre la parte superior de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ de tal manera que hace que su abscisa aumente 5 unidades por segundo cuando x = 4. ¿Con qué rapidez cambia la ordenada?

Solución

Datos del problema: $\frac{dx}{dt} = 5\text{u/seg.}$ y $\frac{dy}{dt} = ?$



como $y^2 = x^3$ derivando implícitamente con respecto al tiempo t

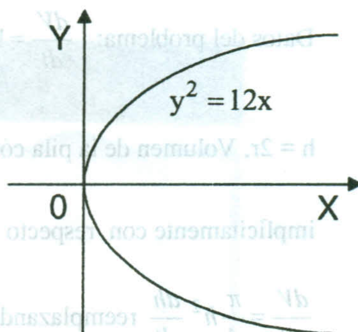
$2y\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$, ahora para x = 4, y = 8 y $\frac{dx}{dt} = 5$

al reemplazar en la ecuación se tiene: $2(8)\frac{dy}{dt} = 3(4)^2(5) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 15$ pies/seg.

(8) Un punto se mueve la parábola $y^2 = 12x$, de manera que la abscisa aumenta uniformemente 2 cm/seg. En qué punto aumenta la abscisa y la ordenada a la misma razón?

Solución

Se tiene: $\frac{dx}{dt} = 2cm/seg$



Hallar p(x, y) tal que $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

como $y^2 = 12x$ derivando implícitamente con respecto a t.

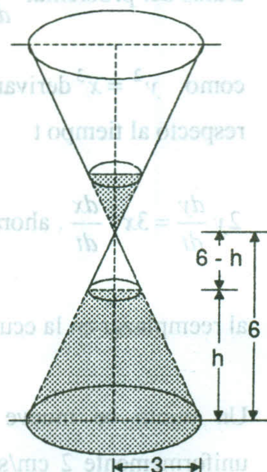
$2y\frac{dy}{dt} = 12\frac{dx}{dt}$ como $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$\Rightarrow 2\frac{dx}{dt} = 12\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$ de donde $x = 3$ $\therefore$ P(3, 6)

(9) Se tiene un reloj de arena de 3 cm. de radio y 6cm. de altura. Se pasa la arena a un solo lado y se voltea para que la arena comience a fluir a razón de $2cm^3/seg$. Suponga que la arena en la parte inferior forma un tronco de cono. Cuál es la velocidad de aumento de h para una altura dada?

Solución

Haciendo un gráfico de los datos del problema: Sea r el radio del cono como indica la figura también se tiene $\frac{dV}{dt} = 2cm^3.seg.$ Ahora mediante la regla de la cadena: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}.\frac{dh}{dt}$, para calcular $\frac{dh}{dt}$ es necesario hallar una función que relacione V y h, y esto se obtiene por la fórmula de la diferencia de los dos volúmenes de conos.



$$V\frac{1}{3}\pi(3)^2 6-\frac{1}{3}(\pi)r^2(6-h) \Rightarrow V=18\pi-\frac{\pi r^2}{3}(6-h)$$

ahora por semejanza de triángulos se tiene: $\frac{r}{3}=\frac{6-h}{6} \Rightarrow r=\frac{6-h}{2}$

$$V=18\pi-\frac{\pi}{3}(\frac{6-h}{2})^2(6-h)=18\pi-\frac{\pi}{12}(6-h)^3$$

$$\frac{dV}{dh}=0+\frac{\pi}{4}(6-h)^2=\frac{\pi}{4}(6-h)^2 \text{ como: } \frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}.\frac{dh}{dt} \Rightarrow 2=\frac{\pi}{4}(6-h)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{8}{\pi(6-h)^2} \text{ cm/seg.}$$

(10) Un jugador golpea una bola de billar, haciéndola moverse en línea recta. Si "s" cm. es la distancia de la bola desde su posición inicial a los t seg. entonces $s=100t^2+100t$, si la bola da en una banda que se encuentra a 39 cm. de su posición inicial. ¿A qué velocidad pega en la banda?

Solución

Como $s=100t^2+100t$ por datos del problema s = 39

$$\Rightarrow\ 100t^2+100t=39 \Rightarrow t_1=0.3,\ t_2=-1.3$$

el valor $t_2=-1.3$ por ser negativo no es para nuestro problema.

Además se conoce $V=\frac{ds}{dt}=200t+100$

V(t) = 200t + 100 ⇒ V(0.3) = 60 + 100 = 160

(11) Si una pelota es empujada hacia abajo en un cierto plano inclinado de manera que tenga una velocidad inicial de 24 pies/seg. Entonces $s=24t+10t^2$, donde s pies es la distancia de la pelota desde el punto inicial a los t seg. y el sentido positivo es hacia abajo del plano inclinado.

a) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota a los t_1 seg.?

b) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar a los 48 pies/seg.?

Solución

Como $V_0 = 24$ pies/seg. velocidad inicial, además:

$s(t) = 24t + 10t^2 \Rightarrow V(t) = s'(t) = 24 + 20t$ por lo tanto la velocidad instantánea de la pelota a los t_1 seg. será: $(20t_1 + 24)$pies/seg. según el problema se tiene:

$$20t + 24 = 48 \Rightarrow t = \frac{6}{5}seg. = 1.2seg.$$

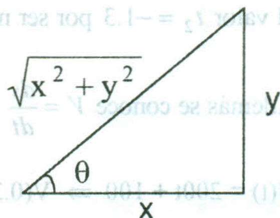
por lo tanto la velocidad tarda $\frac{6}{5}seg.$ en llegar a los 48 pies/seg.

Rpta: **a)** $(20t_1 + 24)$pies/seg. **b)** $\frac{6}{5}seg. = 1.2seg.$

(12) En un instante dado la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es de 10 pies. Y está aumentando a razón de 1 pie/min. Y el otro cateto es de 12 pies y esta disminuyendo a razón de dos pies/min. Hallar la razón de cambio respecto al tiempo del ángulo agudo opuesto al cateto que en ese instante mide 12 pies.

Solución

Datos del problema: para x = 10, y = 12



$$\frac{dx}{dt} = 1pie/min. \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = -2pies/min.$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = arc.\operatorname{tg}(\frac{y}{x})$$

derivando implícitamente: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})/x^2}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}$

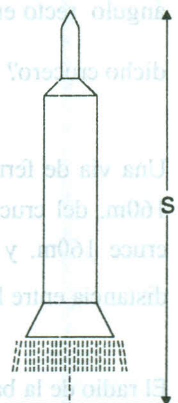
reemplazando se tiene: $\frac{d\theta}{dt}=\frac{10(-2)-12(1)}{100+144}=\frac{-32}{244}=-\frac{8}{61}$ $\therefore\ \frac{d\theta}{dt}=-\frac{8}{61}$ pies/min.

(13) Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y está a Sp sobre el suelo, t seg. después de ser encendido. Donde $s=560t-16t^2$ y la dirección positiva hacia arriba. Encontrar:

a) La velocidad del cohete 2seg. después de haber sido encendido.

b) Cuánto tardará en alcanzar m altura máxima.

Solución



La ecuación del movimiento es: $S(t)=560t-16t^2$

La velocidad del cohete, $t_1 seg.$ después de haber sido encendido será: $V(t_1)=S'(t_1)$

como $S(t)=560t-16t^2$ entonces: $S'(t)=560-32t$

$$\therefore V(t_1)=560-32t_1$$

a) V(2) = 560 – 64 = 496 seg.

b) Como $V(t_1)=0$, es para que alcance su altura máxima crece.

0 = 560 – 32 t ⇒ t = 17.5 seg.

5.24 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

(1) Un depósito de agua, en forma de un cono invertido, es vaciado a razón de $6m^3/min.$ La altura del cono es de 24m. y el radio de su base es de 12m. Calcule la rapidez con la que el nivel de agua desciende cuando el agua tiene 10m. de profundidad.

Rpta. $\frac{dh}{dt}=0.76m/min.$

(2) Cierta cantidad de aceite fluye hacia el interior de un depósito en forma de cono invertido a razón de $3\pi\ m^3 / min.$ Si el depósito tiene un radio de 2.5m. en su parte superior y una profundidad de 10m. ¿Qué tan rápido cambia dicha profundidad cuando tiene 8m?

Rpta. $\frac{dh}{dt} = 0.75m / min.$

(3) Un automóvil que se desplaza a razón de 30 pies/seg. se aproxima a un crucero, cuando el auto está a 120 pies de la intersección, un camión que viaja a razón de 40 pies/seg. cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 2 seg. después de que el camión pasa dicho crucero? **Rpta.** $\frac{ds}{dt} = 14$ pies/seg.

(4) Una vía de ferrocarril cruza una carretera bajo un ángulo de 60°. Una locomotora dista 160m. del cruce y se aleja de él a la velocidad de 100km/hora, un automóvil dista del cruce 160m. y se acerca a él a la velocidad de 50km/hora. ¿A que razón se altera la distancia entre los dos? **Rpta.** Aumenta 25 km/hora ó $25\sqrt{3}km / h.$

(5) El radio de la base de cierto cono aumenta a razón de 3cm. por hora y la altura disminuye a razón de 4cm por hora. Calcule como varía el área total del cono cuando el radio mide 7cm. y la altura 24 cm. **Rpta.** Aumenta $96\pi\ cm^2 / h$

(6) Un aeroplano que vuela en dirección norte a 640 millas por hora pasa sobre cierta ciudad a mediodía; un segundo aeroplano que va a dirección oeste a 600 millas por hora está verticalmente sobre la misma ciudad 15 minutos más tarde, si los aeroplanos están volando a la misma altura, ¿con qué rapidez se estarán separando a la 1.15 p.m.?

Rpta. 872 millas por hora.

(7) Un tendedor de alambres trepa a un poste telefónico a razón de 2.5 pies por segundo, mientras su jefe está sentado a la sombra de un árbol vecino observando. Si el terreno es llano y el jefe está a 36 pies de la base del poste. ¿Cuántos segundos tiene que trepar el tendedor de alambres para que la distancia entre él y el jefe crezca a razón de un pie por segundo? **Rpta.** 6.2847 segundos.

(8) Un objeto que se lanza verticalmente hacia abajo desde la azotea de un edificio, con una velocidad inicial de V_0 pies/seg. Viaja aproximadamente según la ecuación $S = V_0 t + 16t^2$ pies en t segundos. Si toca el suelo a los 2.5seg. con una velocidad de 110 pies/seg. ¿Cuál es su altura del edificio? **Rpta.** 175 pies.

(9) Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada en una casa. Si la base de la escalera se separa de la pared de la casa a razón de 2 pies por segundo. ¿A qué velocidad está bajando el extremo superior cuando la base de la escalera está a

a) 7 pies de la pared? **b)** 15 pies de la pared? **c)** 24 pies de la pared?

Rpta. a) $-\frac{7}{12}$ pies/seg. **b)** $-\frac{3}{2}$ pies/seg. **c)** $-\frac{48}{7}$ pies/seg.

(10) En una planta de arena y grama, la arena está cayendo de una cinta transformadora formando una pila cónica a razón de $10 pies^3 / min$. El diámetro de la base del cono es aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué razón está cambiando la altura de la pila cuando tiene 15 pies de altura? **Rpta.** $\frac{8}{405\pi}$ pies/min.

(11) La arista de un cubo se expande a razón de 3cm/seg. ¿A qué velocidad cambia el volumen cuando cada arista tiene:

a) 1cm. **b)** 10cm.

Rpta. a) $9cm^3 / seg.$ **b)** $900cm3 / seg.$

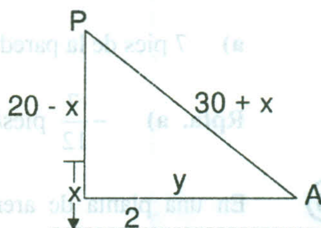
(12) Al caer una gota esférica de lluvia, alcanza una capa de aire más seco en los niveles más bajos de la atmósfera y comienza a evaporarse. Si esta evaporación se produce a una velocidad proporcional al área de la superficie ($s = 4\pi r^2$) de la gota, probar que el radio se contrae a la velocidad constante.

(13) Un avión vuela a 31,680 pies de altura, pasando la trayectoria de vuelo exactamente sobre una antena de radar. El radar detecta el avión y calcula que la distancia s al avión cambia a razón de 4 millas/min. Cuando tal distancia es de 10 millas, calcular la velocidad del avión en millas por hora. **Rpta.** 300 millas/hora.

(14) Un barco A navega hacia el sur a una velocidad de 16 millas por hora, y otro B, situado 32 millas al sur de A, lo hace al este con una velocidad de 12 millas por hora. Hallar la velocidad a la que dichos barcos se aproximan o separan al cabo de una hora de haber iniciado el movimiento. **Rpta.** Se aproxima a razón de 5.6 millas/hora

(15) En que punto de la parábola $y^2 = 18x$, la ordenada crece dos veces más deprisa que la abscisa? **Rpta.** $(\frac{9}{8},\frac{9}{2})$

(16) Un peso W está unido a una cuerda de 50 metros de longitud que pasa por una polea P situada a una altura de 20 metros con respecto al suelo. El otro extremo de la Cuerda, se encuentra unido a un vehículo en el punto A, situado a una altura de 2 metros como indica la figura, sabiendo que el vehículo se mueve a una velocidad de 9 metros por segundo, calcular la velocidad a la que se eleva el cuerpo cuando se halle a una altura de 6 metros. **Rpta.** $\frac{dx}{dt} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$m/seg.



(17) Un tren que sale a las 11 horas de la mañana se dirige hacia el este a una velocidad de 45 kilómetros por hora, mientras que otro, que sale al medio día desde la misma estación, se dirige hacia el sur a una velocidad de 60 kilómetros por hora. Hallar la velocidad a que se separan ambos trenes a las tres de la tarde. **Rpta.** $150\frac{\sqrt{2}}{2}$ Km/hora

(18) Un hombre en un muelle tira de una soga atada al nivel del agua a una bola a razón 50 pies/min. Si las manos del hombre están a 16 pies sobre el nivel del agua. ¿Con qué rapidez se acerca el bote al muelle cuando la cantidad de soga suelta es de 20 pies?

Rpta. Se aproxima a razón de $\frac{250}{3}$ pies/min.

(19) Se bombea aire a un globo, de modo que su volumen se incrementa en $200cm^3 / seg$. Despreciando la comprensión del aire. ¿A qué ritmo crece el radio cuando el diámetro llega a 30cm? **Rpta.** $\frac{2}{9\pi} cm / seg$.

(20) Huyendo de un perro una ardilla trepa por un árbol, corre a 12m/seg. y la ardilla a 6 m/seg. ¿Cuál será el cambio de distancia relativa entre los dos cuando el perro está a 12m. del árbol y la ardilla ha trepado 5 metros? **Rpta.** -8.77m/seg.

(21) Un cometa que vuela a 100mts. de altura es empujado horizontalmente por el viento a una velocidad de 4m/seg. Si la cuerda se va soltando desde un punto fijo. ¿A qué velocidad se aleja el cometa en el instante en que se han soltado 125m. de la cuerda? **Rpta.** 2.4 m/seg.

(22) Una partícula se mueve a lo largo de la curva $3y = x^3 + 2$. Encuentre los puntos sobre la curva en los cuales la ordenada está cambiando 9 veces más rápido que la abscisa.

Rpta. $(3, \frac{29}{3})$ y $(-3, -\frac{25}{3})$

(23) Un cono recto circular va a ser inscrito en una esfera de radio conocido. Encontrar la razón de la altura al radio del cono de volumen máximo. **Rpta.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(24) En lo alto de un farol brilla una luz a 20 pies del suelo, una mujer con una estatura de 5 pies se aleja caminando desde el farol. Hallar la razón en que aumenta su sombra si se aleja a razón de: **a)** 4 pies/seg. **b)** 3 pies/seg.

Rpta. **a)** 4/3 pies/seg. **b)** 1 pie/seg.

(25) Un avión vuela paralelo al suelo a una altura de 2km y a una velocidad de 4.5 km./min. Si el aparato vuela directamente sobre la estatua de la libertad. ¿Con qué intensidad cambia la distancia según una línea visual entre el aparato y la estatua, a los 20 segundos posteriores? **Rpta.** 2.7 Km./min.

(26) Cuando un péndulo con longitud de 10cm. ha oscilado de modo que θ es el ángulo en radianes formado por el péndulo y la vertical, entonces sí h(θ) cm. es la altura del extremo del péndulo sobre su posición más baja, $h(\theta) = 20\,\text{sen}^2(\theta/2)$. Determinar la rapidez de variación de h(θ) con respecto a θ cuando:

a) $\theta = \frac{\pi}{3}$ **b)** $\theta = \frac{\pi}{2}$

Rpta. **a)** $5\sqrt{3}$ **b)** 10

(27) Una piedra es arrojada a un estanque tranquilo, una serie de anillos circulares concéntricos se extienden por el estanque y el radio de la región perturbada aumenta a razón de 16 cm/seg. ¿Con qué rapidez aumenta dicha área cuándo el radio es de 4 cm?

Rpta. $128\pi\ cm^2/seg$.

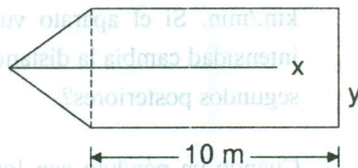
(28) Un avión vuela con velocidad constante a una altura de 10 000 pies en una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado el observador advierte que el ángulo de elevación del aeroplano es $\pi/3$ radianes, y aumenta a razón de $\frac{1}{60}$ rad/seg. Determine la velocidad del avión. **Rpta.** $\frac{200}{9}$ pies/seg.

(29) El lado de un triángulo equilátero mide a cms; si aumenta a razón de k cm/hora. ¿A razón de cuántos centímetros cuadrados por hora aumenta el área?

Rpta. $\frac{ak}{2}\sqrt{3}cm^2/hora$.

(30) Una escalera de 20m. descansa sobre una pared, la parte inferior de la escalera es empujada horizontalmente a la velocidad de 2m/seg. ¿Cuál es la velocidad del extremo superior? **Rpta.** $-\frac{2}{\sqrt{3}}m/seg$.

(31) A un recipiente como el que se muestra en la figura, entra agua a la velocidad constante de $1\ m^3/min$ ¿con qué velocidad sube el nivel del agua cuando la profundidad es de un metro?



Rpta. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{10}m/min.$

(32) A un recipiente semiesférico de radio 10m. entra agua a la velocidad constante de $4\ m^3/min.$ ¿Con qué velocidad sube el agua cuando su profundidad es 5m?

Rpta. $\frac{4}{75\pi}m/min.$

(33) Un cohete se lanza formando un ángulo de 30° con la horizontal a la velocidad v = (80 + 40t) m/seg. siendo t el tiempo (seg.) después del lanzamiento. Si 20 segundos después del lanzamiento el sol está directamente encima de él, hallar la velocidad con que se desplaza su sombra sobre la horizontal. **Rpta.** $440\sqrt{3}m/seg.$

(34) Un avión vuela horizontalmente a la velocidad de 100 m/seg. y a una altura de 1000m., volando en la dirección de un observador que está en tierra. ¿Con qué velocidad se acerca al avión el observador cuando la distancia entre los dos es de 2000m? **Rpta.** $50\sqrt{3}$ m/seg

(35) Un avión vuela a 1000m. de altura a la velocidad de 500 m/seg. y comienza aterrizar formando su ruta de descenso un ángulo de 30° con la pista y disminuyendo su velocidad a la razón de 20 m/seg. Si el sol está directamente sobre el avión. ¿Con qué velocidad se desplaza la sombra 2 segundos después de comenzar a aterrizar? **Rpta.** $230\sqrt{3}m/seg.$

(36) Se apoyan los puntos de un compás sobre una mesa, los brazos del mismo son de 50 cm. de longitud. Si la parte superior del compás desciende a 1cm/seg. ¿Cómo varía la distancia entre las puntas cuando están a 60 cm.? **Rpta.** $\frac{8}{3}m/seg.$

(37) Para gases ideales se sabe que PV = constante, siendo P la presión del gas y V el volumen del recipiente que lo contiene. ¿Cómo varía la presión de un gas conteniendo en un recipiente que disminuye su volumen a la razón de $10cm^3/seg$?. Cuando $V = 500cm^3$ y $P = 15kg/cm^2$. **Rpta.** $\frac{3}{10}kg/cm^2$

(38) Un helicóptero deja una base, elevándose verticalmente a una velocidad de 15 pies/seg. al mismo tiempo que despega un helicóptero, un observador parte desde un punto situado a 100 pies de la base y se mueve en línea recta, alejándose de la base a la velocidad de 80 pies/seg. ¿Con qué velocidad crece el ángulo de elevación del helicóptero respecto al observador cuando este último esté:

a) a 400 pies de la base? **b)** a 600 pies de la base?

Rpta. **a)** $\frac{1500}{400^2+(\frac{225}{4})^2}rad/seg.$ **b)** $\frac{1500}{400^2+(\frac{375}{4})^2}rad/seg.$

(39) Una torre está al final de una calle, un hombre va en un automóvil hacia la torre a razón de 50 m/seg. La torre tiene 500m . de altura. ¿Con qué rapidez crece el ángulo subtendido por la torre y el ojo del hombre cuando éste se encuentra a 1000m. de la torre?

Rpta. 0.02 rad/seg.

(40) Una partícula se mueve sobre la curva $y^2 = 4kx$ con velocidad constante v y alejándose del origen. Hallar la velocidad con que se mueve las proyecciones de la posición de la partícula sobre los ejes OX y OY. **Rpta.** $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{x}{x+k}}v$, $\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{k}{x+k}}v$

5.25 APLICACIÓN A LA ECONOMIA.-

Las razones de cambio en el campo de la economía, no se miden con respecto al tiempo; por ejemplo los economistas se refieren al beneficio marginal, ingreso marginal y costo marginal, como las razones de cambio del beneficio, ingreso y costo respecto al número de unidades producidas ó vendidas.

La ecuación que relaciona estas tres cantidades es: P(x) = R(x) – C(x)

donde: P(x)= beneficio total, R(x) = ingreso total, C(x) = Costo total.

Ahora la derivada de cada una de estas da los marginales términos usados en Economía.

$\frac{dP}{dx}$ = beneficio marginal, $\frac{dR}{dx}$ = ingreso marginal, $\frac{dC}{dx}$ = costo marginal

O = S(P) función de oferta ; D = f(P) función de demanda.

OBSERVACION

Los problemas planteados son problemas de máximos y mínimos.

Para estudiar el efecto de los niveles de producción en el costo, Los Economistas usan la función de costo medio $\bar{c}(x)$ definida por $\bar{c}(x) = \frac{c(x)}{x}$ donde c(x) función de costo total.

ELASTICIDAD

La elasticidad de una función y = f(x) en el punto x se define como la tasa de cambio proporcional de y con respecto a x y denotaremos por: $M = \dfrac{E_y}{E_x}$ y es definido por:

$$M = \frac{Ey}{Ex} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

La elasticidad es un concepto importante en la teoría económica y se aplica en el estudio de la demanda, la oferta, el costo y la productividad.

a) **INGRESO NACIONAL CONSUMO, NACIONAL Y AHORRO**

Llamaremos función de consumo a la relación entre el ingreso nacional (total) disponible y el consumo nacional (total).

La función de consumo se caracteriza porque a medida que aumenta (o disminuye) el ingreso, el consumo aumenta (o disminuye) lo cual se da en menor intensidad y es la llamada "propensión marginal al consumo" que significa que es mayor que cero y menor que uno, donde la propensión marginal es la tasa de cambio del consumo con respecto al cambio en el ingreso disponible. Si c = f(x) es la función de consumo, donde c representa al consumo nacional y x el ingreso nacional entonces la propensión nacional es:

$$\frac{dc}{dx} = f'(x)$$

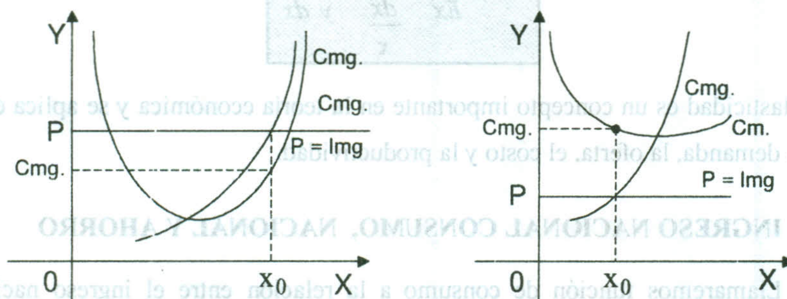
En el análisis teórico elemental del ingreso nacional se supone que el ingreso disponible es igual al consumo c más el ahorro s lo cual expresaremos x = c + s, de donde la propensión marginal al ahorro es:

$$\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}$$

b) EQUILIBRIO ECONOMICO

El objetivo principal de toda empresa es maximizar su utilidad total (o lucro total), o minimizar pérdida.

El punto de utilidad máxima es el punto de equilibrio y ocurre cuando el ingreso marginal (I. mag) es igual al costo marginal (c. mag).



En las gráficas mostradas en ambos casos x_0 es la cantidad de equilibrio.

Si u(x) = ganancia o utilidad total, entonces escribiremos U(x) = I(x) – C(x).

Ahora nuestro objetivo es obtener la cantidad de x que maximice la utilidad u(x).

La cantidad de equilibrio de la empresa es el valor de x que maximiza U(x) y el punto de equilibrio es $P(x_0, u(x_0))$ donde x_0 es la cantidad de equilibrio.

Para obtener la utilidad máxima debe tenerse que $\frac{dU(x)}{dx} = 0$ y $\frac{d^2U(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0} < 0$

OBSERVACION

En el punto de equilibrio, el ingreso marginal debe ser igual al costo marginal.

Es decir: como U(x) = I(x) – C(x) entonces

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{dI(x)}{dx} - \frac{dC(x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI(x)}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \qquad \therefore \operatorname{Im} g = Cmg$$

OBSERVACION

En el caso especial de competición pura, se tiene que: I = Px luego P = Img

Esto quiere decir que existe utilidad máxima sí Cmg = P

5.26 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

(1) Un fabricante de televisores desea vender un promedio de 1000 televisores al mes a $50,000. El fabricante piensa que puede vender 100 televisores adicionales al mes por cada $ 2,000 de reducción en el precio. ¿Cuál es el precio que produce el mayor ingreso?

Solución

Sea x el nuevo precio del televisor que produce el mayor ingreso, donde:

I = Ingreso = (precio del televisor)(número de televisores vendidos).

El número de televisores que se desea vender es 1000 más 100 televisores por cada $ 2000 de reducción sobre $50000.

El precio rebajado es el precio original menos el precio nuevo x es decir: 50000 – x.

La cantidad de reducción de $2000 es: $\frac{50000-x}{2000}$.

Luego el número de televisores, excedentes de los 1000 vendidos será:

$$100(\frac{50000-x}{2000})=\frac{50000-x}{20}$$

el número de total de televisores vendidos: $1000+100(\frac{50000-x}{2000})$

entonces: $I(x)=x(100+\frac{50000-x}{20})=\frac{70000x-x^2}{20}$ ahora derivando

$$I'(x)=\frac{70000x-2x}{20}=0 \Rightarrow x=35,000$$

$I''(x)=\frac{1}{10} \Rightarrow I''(35000)<0$ entonces se tiene un máximo en x = 35000

Por lo tanto el precio de venta por televisor es de $35000.

(2) Una compañía de transporte, con una tarifa de $20, transporta 8000 pasajeros por día, al considerar un aumento de la tarifa, la compañía determina que perderá 800 pasajeros por cada $5 de aumento en estas condiciones. ¿Cuál debe ser el aumento para que el ingreso sea máximo?

Solución

Sea x el número de aumentos de $5 en la tarifa entonces 20 + 5x es la tarifa resultante y el número de pasajeros será 8000 – 800x donde el ingreso es:

I(x) = (20+5x)(8000-800x) entonces $I(x)=4000(40+6x-x^2)$, derivando

$I'(x)=4000(6-2x)=0$ para el número crítico, de donde: $6-2x=0 \Rightarrow x=3$

$I''(x)=-8000 \Rightarrow I(x)<0\ \forall\ x$

Luego x = 3 se tiene máximo. El aumento en el pasaje debe ser de 3 x 5 = 15

Y el nuevo valor del pasaje es $35.

(3) El número de dólares del precio total de la manufactura de x relojes en cierta fábrica está dada por: $C(x)=1500+30x+\frac{20}{x}$, Encontrar:

a) La función del costo marginal

b) El costo marginal cuando x = 40 y

c) El costo de la manufactura del cuadragésimo primer reloj.

Solución

Como la función costo total C(x) es dado: $C(x)=1500+30x+\frac{20}{x}$ entonces

a) La función costo marginal = $C'(x) = 30 - \dfrac{20}{x^2}$

b) El costo marginal cuando x = 40 es: $C'(40) = 30 - \dfrac{20}{1600} = \$29.29$

c) Costo de manufactura del 41avo. del reloj es $C(41) - C(40) = \$29.95$.

(4) Supóngase que un líquido se produce por cierto proceso químico y que la función del costo total C(x) está dado por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$, donde C(x) \$ es el costo total de la producción de x galones del líquido. Encontrar:

a) El costo marginal cuando se produce 16 galones y

b) El número de galones producidos cuando el costo marginal es de 40 centavos por galón.

Solución

C(x) = La función del costo total para producir x galones: $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$

a) Costo marginal: $CM = C'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, el costo marginal cuando x = 16 galones

$$CM = C'(16) = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2} = 0/5\$/\,galón.$$

b) número de galones cuando el CM. es 0.40 cent/gal

$$\$0.40 = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = \frac{4}{(0.40)^2} = 25 \text{ galones} \qquad \therefore x = 25 \text{ galones.}$$

(5) Suponiendo que la función precio está dado por P(x) = 24 – 8x y la función costo por $C(x) = 4x + 10^8$ supóngase además que el gobierno grava las ventas con un impuesto de t% por cada unidad.

Determinar en términos de t, la cantidad de producción que maximiza la utilidad.

Determinar también el valor de t que maximiza la renta del gobierno por concepto de impuesto.

Solución

La función utilidad = U(x) = I(x) – C(x) donde I(p) = xP(x) = ingreso = $40x-8x^2$

$C(x)=4x+10^8+tx=$ costo total $\therefore U(x)=40x-8x^2-4x-10^8-tx$

$U'(x)=40-16x-4-t=0 \Rightarrow x=\frac{36-t}{16}$ unidades (en millones)

Renta del gobierno es $=I_g(t)=xt=(\frac{36-t}{16})t$

$I_g(t)=\frac{36t-t^2}{16} \Rightarrow I_g'(t)=\frac{36-2t}{16}=0$ $\therefore$ t = 18%

(6) Si la ley de la demanda es $P=\frac{a}{x}-c$. Demuéstrese que el ingreso total disminuirá cuando la producción aumenta, siendo el ingreso marginal una constante negativa.

Solución

Como la demanda es: $P=\frac{a}{x}-c$ entonces I(x) = xP = a – cx por lo tanto, si x aumenta, el término cx aumenta y su diferencia con "a" disminuirá además $\text{Im}g=\frac{dI(x)}{dx}=-c$ constante negativa.

(7) Si la función de costo total es $C(x)=0.1x^2+5x+200$. Determinar el costo promedio y costo marginal.

Solución

Como la función costo total $C(x)=0.1x^2+5x+200$

$\bar{c}(x)=\frac{C(x)}{x}=$ función costo promedio; entonces $\overline{C}(x)=0.1x+5+\frac{200}{x}$

$\frac{dC(x)}{dx}=$ costo marginal = 0.2x + 5.

(8) El número de dólares del costo total de la producción de x unidades de una mercancía es $C(x) = x^2 + 4x + 8$. Encontrar la ecuación que defina.

a) El costo promedio.

b) El costo marginal y costo promedio marginal.

c) Encontrar el mínimo absoluto del costo unitario promedio.

d) Trazar las curvas del costo total, del costo promedio y del costo marginal en el mismo sistema de coordenadas verificar que los costos promedios y marginales son iguales cuando el costo promedio tiene un valor mínimo.

Solución

La función del costo total por manufactura x artículos es: $C(x) = x^2 + 4x + 8$.

a) El costo promedio por definición es: $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ es decir: $\overline{C}(x) = x + 4 + \dfrac{8}{x}$

b) El costo marginal: $Cmg(x) = C'(x) = 2x + 4$ y el costo marginal promedio es: $\overline{C}'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^2}$

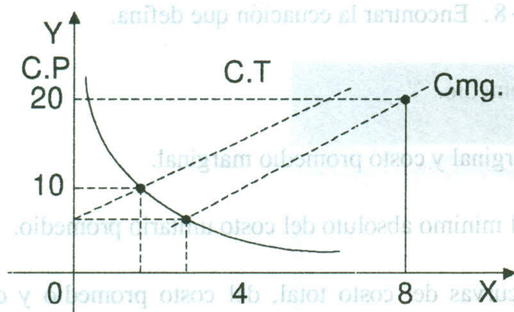
c) El mínimo absoluto del costo unitario promedio se obtiene haciendo $\overline{C}'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ es decir que $x = 2\sqrt{2}$ es el número crítico de $\overline{C}(x)$

$\overline{C}''(x) = \dfrac{16}{x^3}$ de donde $\overline{C}''(2\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow \overline{C}(x)$ tiene mínimo relativo en $x = 2\sqrt{2}$

$$\overline{C}(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 4 + \frac{8}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} + 4 = \$9.64$$

además se tiene que $\overline{C}(x) = x + 4 + \dfrac{8}{x}$ es continua en <0,+∞>. Luego como $x = 2\sqrt{2}$. Entonces $\overline{C}(2\sqrt{2}) = \$9.64$ es un valor mínimo absoluto del costo unitario.

d) Las gráficas son:



(9) Una empresa tiene una producción de x toneladas de cierto artículo con un costo variable total dado por $C(x) = ax^3 - bx^2 + cx$. Demostrar que la curva de costo medio es una parábola, hallar la producción que corresponde al costo medio mínimo y el valor del costo medio respectivo.

Solución

El costo medio $= Cme = \dfrac{C(x)}{x} = ax^2 - bx + c$ completando cuadrados se tiene:

$$Cme(x) = a(x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}) = a(x - \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

de donde $Cme + \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - \dfrac{b}{2a})^2$ ecuación que representa una parábola, con vértice en $(\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a})$, ahora veremos el Cme(x) mínimo $\dfrac{Cme(x)}{dx} = 2ax - b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{b}{2a}$

$$\frac{d^2 Cme(x)}{dx^2} = 2a > 0 \quad \forall x \;\Rightarrow\; x = \frac{b}{2a}$$

Será la producción que corresponde al Cme(x) mínimo.

El valor del costo medio mínimo será: $Cme(\dfrac{b}{2a}) = a(\dfrac{b}{2a})^2 - b(\dfrac{b}{2a}) + c = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

(10) La curva del costo total del producto ó artículo está dado por $y = 15x - 8x^2 + 2x^3$, de donde y representa el costo total y x representa la cantidad producida. Suponga que las condiciones del mercado indican que deberán producirse entre 3 y 10 unidades (esto es $3 < x < 10$), Determine la cantidad en este intervalo para lo cual el costo medio ó promedio es mínimo.

Solución

$$\text{Costo medio} = \bar{y} = \bar{C}(x) = \frac{y}{x} = 15 - 8x + 2x^2$$

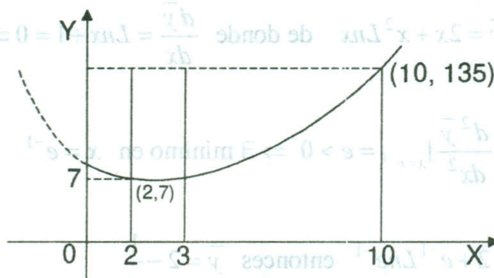
$$\frac{d\bar{y}}{dx} = -8 + 4x = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ número crítico}$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} = 4, \forall x \Rightarrow \frac{d^2\bar{y}}{dx^2}|_{x=2} = 4 > 0 \Rightarrow \exists \text{ mínimo en } x = 2 \text{ pero 2 no está en el intervalo}$$

$3 \le x \le 10$; si: $x = 3$, $\bar{y} = 9$ y $x = 10$, $\bar{y} = 135$

por lo tanto en el intervalo $3 \le x \le 10$, el valor mínimo de $\bar{y}$ ocurre cuando x = 3 y el valor máximo en x = 10 en ninguno de estos puntos $\frac{dy}{dx}$ es igual a cero.

Luego entre 3 y 10 artículos, el costo promedio es mínimo para 3 unidades.



(11) Para cada una de las siguientes funciones de costo promedio obtenga el valor mínimo del costo promedio mínimo, y demuestre que dicho costo promedio mínimo, el costo marginal y el costo promedio son iguales.

a) $\bar{y} = \bar{C}(x) = 25 - 8x + x^2$

Solución

Como $\overline{y}=\frac{y}{x} \Rightarrow y=x\overline{y}=C(x)=$ costo total

$y=C(x)=25x-8x^2+x^3$

$\frac{d\overline{y}}{dx}=-8+2x=0 \Rightarrow$ x = 4 número crítico

$\frac{d^2\overline{y}}{dx^2}=2 \Rightarrow \frac{d^2\overline{y}}{dx^2}|_{x=4}=2>0 \Rightarrow \exists$ mínimo en x = 4

$\overline{y}=C(4)=25-32+16=9,$ **...(1)**

$Cmg(x)=C'(x)=25-16x+3x^2 \Rightarrow C'(4)=25-64+48=9$ **...(2)**

de (1) y (2) $\therefore \overline{y}=C'(x)$

b) $\overline{y}=2+x\ln x$

Solución

$y=C(x)=x\overline{y}=2x+x^2Lnx$ de donde $\frac{d\overline{y}}{dx}=Lnx+1=0 \Rightarrow x=e^{-1}$

$\frac{d^2\overline{y}}{dx^2}=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d^2\overline{y}}{dx^2}|_{x=e^{-1}}=e>0 \Rightarrow \exists$ mínimo en $x=e^{-1}$

$\overline{y}=\overline{C}(e^{-1})=2+e^{-1}Lne^{-1}$ entonces $\overline{y}=2-\frac{1}{e}$

Cmg(x)=2 + 2xLnx + x reemplazando $Cmg(\frac{1}{e})=2+\frac{2}{e}Ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=2-\frac{2}{e}+\frac{1}{e}=2-\frac{1}{e}$

$$\therefore \overline{Y}=Cmg(\frac{1}{e}).$$

(12) El costo total de producir x artículos por semana es de: $(ax^2 + bx + c)$ pesos, el precio (en pesos) al que cada artículo puede venderse es de $P = (\beta - \alpha x^2)$. Demostrar que la producción total para la ganancia G es: $x = \dfrac{\sqrt{a^2 + 3\alpha(\beta - b)} - a}{3\alpha}$

Solución

Ingreso total $I(x) = xP = x\beta - \alpha x^3$

Utilidad ó ganancia = U(x) = I(x) – C(x)

$U(x) = x\beta - \alpha x^3 - (ax^2 + bx + c)$ derivando $U'(x) = \beta - 3\alpha x^2 - 2ax - b = 0$

$3\alpha x^2 + 2ax + b - \beta = 0$ resolviendo:

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(3\alpha)(b - \beta)}}{6\alpha} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 - 3\alpha b + 3\alpha\beta}}{6\alpha}$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 3\alpha(\beta - b)}}{3\alpha} \Rightarrow x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 3\alpha(\beta - b)}}{3\alpha}$$

(13) Un fabricante de radios averigua que puede vender x instrumentos por semana a P pesos cada uno, siendo 5x = 375 – 3P. El costo de la producción es $(500 + 15x + \frac{x^2}{5})$ pesos. Demostrar que se obtiene la máxima ganancia cuando la producción es alrededor de 30 instrumentos por semana.

Solución

Ingreso total = I(x) = por la venta de número de instrumentos: I(x) = xP

Costo total $= c(x) = 500 + 15x + \dfrac{x^2}{5}$

Ganancia ó utilidad = u(x) = I(x) – c(x) **...(1)**

Pero $5x = 375 - 3P \Rightarrow P = \dfrac{375 - 5x}{3}$

Luego $\left.\begin{array}{l} I(x) = xP = \dfrac{375x - x^2}{3} \\ c(x) = 500 + 15x + \dfrac{x^2}{5} \end{array}\right\}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1) se tiene: $u(x) = \dfrac{375x - 5x^2}{3} - (500 + 15x + \dfrac{x^2}{5})$, derivando

$$u'(x)\frac{375 - 10x}{3} - 15 - \frac{2x}{5} = \frac{1875 - 50x - 225 - 6x}{15} = 0$$

$1650 - 56x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1650}{56} = 29.46$ valor crítico

$u''(x) = -\dfrac{56}{15} \Rightarrow u''(29.46) = -\dfrac{56}{15} < 0 \Rightarrow \exists$ máximo en $x = 29.46$

La máxima ganancia se obtiene al producir alrededor de 30 instrumentos por semana.

(14) Si el problema 13 se supone que la relación entre x y P es $x = 100 - 20\sqrt{\dfrac{P}{5}}$. Demostrar que la producción que corresponde a una ganancia máxima es la de unos 25 instrumentos por semana.

Solución

I(x) = ingreso total = Xp ; c(x) = costo total = $500 + 15x + \dfrac{x^2}{5}$

como $x = 100 - 20\sqrt{\dfrac{P}{5}} \Rightarrow 20\sqrt{\dfrac{P}{5}} = 100 - x$

$$\frac{P}{5} = (\frac{100 - x}{20})^2 \Rightarrow P = \frac{(100 - x)^2}{80}$$

$$I(x) = xP = \frac{x(100 - x)^2}{80}$$

U(x) = I(x) – c(x) reemplazando se tiene:

$$U(x)=\frac{x(100-x)^2}{80}-500-15x-\frac{x^2}{5}$$ derivando se tiene

$$U'(x)=\frac{(100-x)^2}{8}-\frac{x(100-x)}{40}-15-\frac{2x}{5}=\frac{100-x}{80}(100-x-2x)-\frac{75+2x}{5}$$

$$=\frac{100-x}{80}(100-3x)-\frac{75+2x}{5}=\frac{(100-x)(100-3x)-16(75+2x)}{80}$$

$$U'(x)=\frac{3x^2-432+8800}{80}=0 \Rightarrow x=25,\ x=\frac{256}{3}$$

$$U''(x)=\frac{6x-432}{80} \Rightarrow U''(25)=-\frac{141}{40}<0$$

en x = 25, por lo tanto la máxima ganancia se obtiene al producir 25 instrumentos.

(15) Esta semana en una fábrica se produjeron 50 unidades de cierta mercancía y la cantidad de producción aumenta a razón de 2 unidades por semana. Si C(x) dólares es el costo de producción de x unidades donde: $C(x)=0.08x^3-x^2+10x+48$, calcule la rapidez actual a la que el costo de producción aumenta.

Solución

Sea x = número de mercancía

$\frac{dx}{dc}=2$ unid/semana

$\frac{dc}{dt}=$ rapidez actual en la que el costo de producción aumenta.

Como $c(x)=0.08x^3-x^2+10x+48$ derivando se tiene:

$$\frac{dc(x)}{dt}=0.24x^2\frac{dx}{dt}-2x\frac{dx}{dt}+10\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dc(50)}{dt}=0.24(50)^2(2)-2(50)(2)+10(2)=0.48(50)^2-4(50)+20=1020$$

$$D_t c(50)=1020$$

El costo aumenta a razón de 1020 por semana.

(16) En cierto mercado, la demanda por una clase especial de cereal para el desayuno está indicada por la ecuación de la demanda: Px + 25P = 4000, donde P centavos es el precio de una caja y x miles de cajas es la cantidad semanal demandada. Si el precio actual de dicho cereal es de 80 centavos por caja y ese precio aumenta a razón de 0.2 centavos semanales, calcule la razón de cambio de la demanda.

Solución

Datos: $\frac{dP}{dt}=0.2$ centavos /semana ; $\frac{dx}{dt}=?$ para P = 80

como Px + 25P = 4000 $\Rightarrow x=\frac{4000-25P}{P}$

$$x=\frac{4000}{P}-25 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{4000}{2}\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{4000}{(80)^2}(0.2)=-\frac{800}{(80)(80)}=-\frac{10}{80}=-\frac{1}{8}=-0.125$$

La demanda disminuye a razón de 0.125 miles de cajas por semana.

(17) La ecuación de la oferta de cierta mercancía es: $x=1000\sqrt{3P^2+20P}$ donde cada mes se surten x unidades cuando P dólares es el precio por unidad. Calcule la razón de cambio en el suministro si el precio actual es de \$20 por unidad y está aumentando a razón de \$0.50 por mes.

Solución

Datos: $\frac{dP}{dt}=0.5$ \$/mes ; $\frac{dx}{dt}=?$ cuando P = \$20

$x=1000\sqrt{3P^2+20P}$ se surten x unidades cuando p \$ es el precio por unidad

Ahora calculamos la derivada implícita.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1000(3P+10)}{\sqrt{3P^2+20P}}\frac{dP}{dt} \quad \text{cuando} \quad P=20$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1000(70)}{\sqrt{1200+400}}(0.5)=\frac{70000}{40}(0.5)=875$$

El suministro aumenta a razón de 875 unidades por mes.

(18) Suponga que "y" es el número de trabajadores en la fuerza laboral necesaria para producir x unidades de cierta mercancía y, $x=4y^2$. Si la producción de esta mercancía, este año, es de 250,000 unidades y la producción aumenta a razón de 18000 unidades anuales. ¿Cuál es la razón actual a la que se debe incrementar dicha fuerza laboral?

Solución

Datos: x = 250,000 unidades ; $\frac{dx}{dt}=18{,}000$ unidades anuales ; $\frac{dy}{dt}=?$

como $x=4y^2$, cuando x = 250,000, y = 250 ahora derivando implícitamente la ecuación $x=y^2$ con respecto al tiempo.

$\frac{dx}{dt}=8y\frac{dy}{dt}$ reemplazando los datos $18000=8(250)\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{18000}{8(250)}=9$

$\frac{dy}{dt}=9$ trabajadores anuales.

5.27 PROBLEMAS PROPUESTOS.-

(1) Un monopolista determina que si c(x) centavos es el costo total de la producción de x unidades de cierta mercancía, entonces c(x) = 25x + 20000, la ecuación de la demanda es x + 50P = 5000, donde son demandas x unidades cada semana, cuando el precio unitario es de P centavos, si se desea maximizar la utilidad semanal encontrar:

a) El número de unidades que deben producirse cada semana.

b) El precio de cada unidad.

Rpta. **a)** x = 1875 unidades **b)** P = $62.5

(2) La ecuación de la demanda de cierta mercancía es $P=(x-8)^2$ y la función del costo total está dada por $C(x)=18x-x^2$ donde c(x) dólares es el costo total cuando se compra x unidades.

a) Determinar los valores permisibles de x.

b) Encontrar las funciones del ingreso marginal y del costo marginal.

c) Encontrar el valor de x que rinde la máxima utilidad.

d) Trazar las gráficas de las funciones del ingreso marginal y del costo en el mismo sistema de coordenadas.

Rpta. **a)** $x \in [0, 8]$ **b)** $I'(x)=(x-8)(3x-8)$, $c'(x)=18-2x$

c) $x = 1.89$

(3) La ecuación de la demanda para cierta mercancía es $Px^2-9P-18=0$ donde P dólares es el precio por unidad cuando 100x unidades son solicitadas. Encontrar:

a) La función del precio. **b)** La función del ingreso total.

c) La función del ingreso marginal.

d) Encontrar el ingreso total máximo absoluto.

Rpta. **a)** $\frac{18}{9+x^2}$ **b)** $\frac{1800x}{9+x^2}$ **c)** $\frac{100(9-x^2)}{(9+x^2)^2}$ **d)** I(3) = 300

(4) Un campo rectangular que tiene un área de $2700m^2$, será cerrado con una barda y se empleará una barda adicional para dividir el campo por la mitad. Si el costo de la barda central es de \$ 2 por metro lineal y el de la barda a lo largo de los lados es de \$ 3 por metro lineal encontrar las dimensiones del campo que haga que el costo de la barda sea mínima.

Rpta. Las dimensiones del campo que hacen que el costo mínimo son: 45 de ancho por 60 de largo.

(5) Un fabricante puede tener una utilidad de \$20 en cada artículo si se producen semanalmente no más de 800 artículos. La utilidad decrece a 2 centavos por artículo que sobre pasa los 800. ¿Cuántos artículos deben fabricarse a la semana para obtener la utilidad máxima? **Rpta.** 900 artículos.

(6) Un fabricante puede producir grabadoras de cassette a un costo de \$20 cada una. Calcular que si las vende a x pesos cada una podrá vender aproximadamente 120 – x grabadoras de cassette al mes. Determinar el precio de venta x que producirá la mayor utilidad para el fabricante. **Rpta.** \$ 70 cada una.

(7) Para cada una de las siguientes funciones de costo total, evalúe el costo marginal y determine el comportamiento del costo marginal (sí es creciente ó decreciente)

a) $y = 1000x - 180x^2 + 3x^3$ **b)** $y = 220 + 55x - 2x^3 + x^4$

(8) Determinar el comportamiento de las funciones de costo promedio y marginal (creciente o decreciente) para cada una de las siguientes funciones de costo total.

a) $y = \sqrt{x+25}$, $0 \le x \le 10$ **b)** $y = 9x + 5xe^{-2x}$

Rpta. **a)** $0 \le x \le 10$ creciente el costo promedio y marginal

b) El costo marginal es decreciente para $x < 1$ y creciente para $x > 1$, el costo promedio siempre es creciente.

(9) La función de ingreso total de la empresa Compañía Manufacturera de Muebles Coloniales se expresa mediante la ecuación $I(x) = 24x - 3x^2$, en la que I(x) es el ingreso y x es la cantidad vendida.

a) ¿Cuál es el ingreso máximo que la compañía puede esperar suponiendo que la ecuación anterior es válida?

b) ¿Cuál es la ecuación correspondiente a la función de ingreso marginal de esta compañía?

(10) La compañía ANTO S.A. fabrica gabinetes para aparatos de televisión, y el costo total de producir cierto modelo está representando por la ecuación: $y = 4x - x^2 + 2x^3$, en donde y representa el costo total y x representa la cantidad producida (su valor numérico son millares de unidades). El departamento de ventas ha indicado que la producción x debe estar entre 2 y 6. ¿En que cantidad es mínimo el costo marginal?

Rpta. En el intervalo $2 \leq x \leq 6$, CM. es mínimo en x = 2

(11) Un fabricante puede producir para camas de agua a un costo de $10 cada uno, calcula que si los vende a x pesos cada uno podrá vender aproximadamente 50 – x marcos al mes.

a) Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio de venta x y represente gráficamente esta función de utilidad.

b) Use el cálculo para determinar el precio de venta que ha de elevar al máximo la utilidad del fabricante.

Rpta. **a)** P(x) = (x-10) (50-x)

b) Precio óptimo de venta $30 utilidad máxima $370

(12) El costo total de una firma que manufactura x bicicletas es $c(x) = \frac{x^3}{12} - 5x^2 + 170x + 300$.

a) ¿A qué nivel de producción decrece el costo marginal?

b) ¿A qué nivel de producción crece el costo marginal?

c) ¿Cuál es el mínimo costo marginal?

Rpta. **a)** $0 \leq x \leq 20$ **b)** $x > 20$ **c)** $c'(20) = 70$

(13) Un fabricante de accesorios eléctricos tienen unos costos de producción diarios de $c = 800 - 10x + \frac{x^2}{4}$. ¿Cuántos accesorios x se habrían de producir cada día para minimizar los costos? **Rpta.** 20

(14) Un fabricante de radios cobra $90 por unidad cuando el costo medio de producción por unidad es de $60, para seguir, sin embargo, mayores pedidos de los distribuidores, el fabricante reducirá el precio en $0.10 por unidad pedida a partir de las 100 primeras. Hallar el menor pedido que podría admitir el fabricante para obtener beneficio máximo.

Rpta. 200

(15) Una empresa que fabrica y vende escritorios trabaja en competición perfecta y puede vender a un precio de $200 el escritorio, todos los escritorios que produce si x escritorios se produce y se vende cada semana y c(x) dólares es el costo total de la producción semanal, entonces $c(x) = x^2 + 4x + 3000$. Determine cuántos escritorios deberán fabricarse por semana para que la empresa obtenga la mayor utilidad total por semana. ¿Cuál es dicha utilidad total máxima por semana? **Rpta.** 80, $ 3400

(16) Suponga que en una situación de monopolio la ecuación de la demanda de cierto artículo es $P = 6 - \frac{1}{5}\sqrt{x-100}$, donde P dólares es el precio por artículo cuando se demanda x artículos y $x \in [100, 1000]$. Si c(x) dólares es el costo total de la producción de x artículos, entonces: c(x) = 2x + 100

a) Encuentre las funciones del ingreso marginal y del costo marginal.

b) Calcule el valor de x que arroje la máxima utilidad.

Rpta. **a)** $\operatorname{Im} g(x) = 6 - \frac{1}{5}\sqrt{x-100} - \frac{x}{10\sqrt{x-100}}$; Cmg(x) = 2

b) 200 ó 100

(17) En competencia perfecta, una firma puede vender a un precio de 100 dólares por unidad todo lo que produce de una cierta mercancía. Si a diario se produce x unidades, el número de dólares del costo total de la producción diaria, es $x^2 + 20x + 700$. Hallar el número de unidades que deben producirse diariamente para que la firma obtenga la máxima utilidad total diaria. **Rpta.** La mayor utilidad diaria es cuando se produce 40 unidades por día.

(18) Un fabricante en la producción de cierto artículo, ha descubierto que la demanda del artículo viene representando por $x=\dfrac{2500}{P^2}$ suponiendo que el ingreso total I(x) está por I(x) = xP que el costo de producción x artículos está dado por: c(x) = 0.5x + 500, hallar el precio por unidad que dé un beneficio máximo. **Rpta.** \$1.00

(19) La función de demanda de un cierto artículo está dado por $P=(16-x)^{1/2}.0\le x\le 16$, calcular para que precio y cantidad el ingreso es máximo. **Rpta.** $P=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{32}{3}$

(20) Un cierto artículo tiene una función de demanda dada por $P=100-\dfrac{x^2}{2}$ y la función de costo total es C(x) = 40x + 375.

a) Qué precio da el beneficio máximo?

b) Cuál es el costo medio por unidad si se produce para obtener el beneficio máximo?

Rpta. **a)** \$80.00 **b)** \$99.29

5.28 LA REGLA DE L'HOSPITAL.-

Para calcular límites de funciones que asumen formas indeterminadas, se debe tener en cuenta las siguientes formas indeterminadas.

a) 1era. De La Forma $\dfrac{0}{0}$

Consideremos dos funciones derivables f y g en un intervalo abierto I, excepto posiblemente en a ∈ I. Suponiendo que ∀ x ≠ a en I, $g'(x)\neq 0$ y si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \ldots(1)$$

OBSERVACION

i) En el caso que $f'(a)=0$, $g'(a)=0$ se aplica la expresión (1) al cociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es decir:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

ii) En algunos casos puede ocurrir que sea necesario repetir el procedimiento varias veces.

iii) Si a = ∞, la sustitución de $x=\frac{1}{z}$ el problema se reduce a evaluar el límite cuando z →0 esto es:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-f'(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}}{-g'(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

b) De La Forma $\frac{\infty}{\infty}$

Para determinar él $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando él $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, es suficiente aplicar la regla establecida en (1).

c) De La Forma 0.∞

Para determinar él $\lim\limits_{x\to a}f(x).g(x)$ cuando $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, a la función f(x). g(x) se expone dé tal manera que adopte una de las formas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ es decir:

$$\lim_{x\to a}f(x).g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$ ó también $$\lim_{x\to a}f(x).g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Luego se aplica la regla establecida en (1)

d) De La Forma ∞ - ∞

Para determinar él $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ cuando: $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, la función f(x) – g(x) se expresa en la forma siguiente:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)=\ln[e^{\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))}]=\ln[\frac{e^{-\lim_{x\to a} g(x)}}{e^{-\lim_{x\to a} f(x)}}]$$

y de esta manera cuando x → a, toma la forma $\frac{0}{0}$ luego se aplica la forma establecida en (1)

e) De la forma 0^0, ∞^0, 1^∞

Para determinar el $\lim_{x\to a}(f(x)^{g(x)})$ que toma la forma: 0^0, ∞^0, 1^∞, cuando x → a, se debe tener en cuenta que $f(x)^{g(x)}=e^{g(x).Ln(f(x))}$.

5.29 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

① $\lim_{x\to 1}\frac{Lnx}{x-1}$

Solución

$$\lim_{x\to 1}\frac{Lnx}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1 \qquad \therefore \lim_{x\to 1}\frac{Lnx}{x-1}=1$$

② $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$

Solución

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n} \qquad \therefore \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}=\frac{1}{n}$$

③ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2 \qquad \therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}=2$$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

Solución

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x Ln(a) - b^x Ln(b)}{1} = Lna - Lnb \qquad \therefore \lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = Ln\frac{a}{b}$$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} x^n \operatorname{sen}\frac{a}{x}$, n >0

Solución

$$\lim_{x \to \infty} x^n \operatorname{sen}\frac{a}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{a^n \operatorname{sen} z}{z^n}, \text{ donde } \quad z = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{z} \quad \text{cuando } x \to \infty,\ z \to 0$$

$$\lim_{x \to \infty} x^n \operatorname{sen}\frac{a}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{a^n \operatorname{sen} z}{z^n} = \lim_{z \to 0} \frac{a^n \cos z}{nz^{n-1}} = \frac{a^n}{0} = \infty$$

(6) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{2 - x}$

Solución

$$\lim_{x \to 2} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = -\pi$$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$

Solución

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{1 + 0}{0} = \infty$$

(8) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2}$

Solución

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{nx^{n-1}}{1} = n2^{n-1}$$

(9) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{Ln(\text{sen}\, x)}{(\pi-2x)^2}$

Solución

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{Ln(\text{sen}\, x)}{(\pi-2x)^2} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{c\,\text{tg}\, x}{-4(\pi-2x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\cos ec^2 x}{8} = -\frac{1}{8}$$

(10) $\lim_{x\to\infty} (\pi - 2arc.\text{tg}\, x)Lnx$

Solución

$$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2arc.\text{tg}\, x)Lnx = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2arc.\text{tg}\, x}{\frac{1}{Lnx}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{1+x^2}}{-\frac{1}{xLn^2 x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2xLn^2 x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2Ln^2 x + 4}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

(11) $\lim_{x\to 0} xLn(\text{sen}\, x)$

Solución

$$\lim_{x\to 0} xLn(\text{sen}\, x) = \lim_{x\to 0} \frac{Ln(\text{sen}\, x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{c\,\text{tg}\, x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos ec^2 x}{\frac{2}{x^3}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2\,\text{sen}^2 x} = -\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2\,\text{sen}\, 2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{3x}{2\cos 2x} = \frac{0}{2} = 0$$

(12) $\lim_{x\to 0} x^{\text{sen}\, x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0} x^{\text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} e^{\text{sen}\, x.Lnx} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}\, x.Lnx} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\text{sen}\, x}{1/Lnx}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} -\frac{\cos x}{1/xLn^2 x}} = e^{-\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} x^{\text{sen}\, x} = 1$$

(13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

Solución

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2a^{1/2}}{3a^{2/3}}=\frac{2}{3a^{1/6}}$$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1$$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln\cos x}{x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}(-\operatorname{tg} x)=0$$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{\beta e^{\beta x}-\cos\beta x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{\beta e^{\beta x}-\cos\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}-\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{\beta e^{\beta x}-\beta\operatorname{sen}\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$$

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arc.\operatorname{tg} x}{x^3}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-arc.\operatorname{tg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}$$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\operatorname{sen} bx}}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\operatorname{sen} bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{2\sqrt{x}}e^{a\sqrt{x}}}{\frac{b\cos bx}{2\sqrt{\operatorname{sen} bx}}}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\,\frac{e^{a\sqrt{x}}\sqrt{\operatorname{sen} bx}}{\cos bx.\sqrt{x}}$$

$$=\frac{a}{b}.\lim_{x\to 0}\frac{e^{a\sqrt{x}}}{\cos bx}.\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{sen} bx}}{\sqrt{x}}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{\operatorname{sen} bx}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{b\sqrt{x}\cos bx}{\sqrt{\operatorname{sen} bx}}$$

$$=a\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\frac{b\operatorname{sen} bx}{bx}}}=\frac{a}{\sqrt{b}}$$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\lim\frac{a^x Lna-b^x Lnb}{c^x Lnc-d^x Lnd}=\frac{Lna-Lnb}{Lnc-Lnd}=\frac{Ln(\frac{a}{d})}{Ln(\frac{c}{d})}$$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Lnx}{Ln(\operatorname{sen} x)}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{Lnx}{Ln(\operatorname{sen} x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x}=1$$

5.30 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Hallar los límites siguientes aplicando la Regla de L'Hospital.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$ **Rpta.** $-\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arc.\operatorname{tg}x}{Ln(1+\frac{1}{x})}$ **Rpta.** 2

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ **Rpta.** $\frac{m}{n}a^{m-n}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$ **Rpta.** -2

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen}x.\cos x}$ **Rpta.** 2

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}$ **Rpta.** 2

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$ **Rpta.** 1

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)^4-4x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+x^4}{6\operatorname{sen}x-6x+x^3}$ **Rpta.** 16

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{Ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{c\operatorname{tg}\pi x}$ **Rpta.** -2

(10) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{Lnx})$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(11) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x.Lnx-a}{Ln(e^x-e^a)}$ **Rpta.** cos a

(12) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{Lnx}-\frac{x}{Lnx})$ **Rpta.** -1

(13) $\lim_{x\to 0} x^x$ **Rpta.** 1

(14) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x})^{\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** 1

(15) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3+x^2-7x-15}{x^3-5x^2+8x-6}$ **Rpta.** 26/5

(16) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x+2\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x}{\cos x-\cos^2 x}$ **Rpta.** 4

(17) $\lim_{x\to 0} \frac{m\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} mx}{x(\cos x-\cos mx)}$ **Rpta.** $\frac{m}{3}$

(18) $\lim_{x\to 0} xLn(\operatorname{sen} x)$ **Rpta.** 0

(19) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+snx-1}{Ln(1+x)}$ **Rpta.** 2

(20) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x+Lnx}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ **Rpta.** -1

(21) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\operatorname{sen} x}$ **Rpta.** 2

(22) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha+x)-\operatorname{sen}(\alpha-x)}{\cos(\alpha+x)-\cos(\alpha-x)}$ **Rpta.** -ctgα

(23) $\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)e^x+x+2}{(e^x-1)^3}$ **Rpta.** $\frac{1}{6}$

(24) $\lim_{x\to 0} \frac{\pi}{x}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ **Rpta.** $\frac{\pi}{2}$

(25) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{\operatorname{sen}^2}-\frac{1}{1-\cos x}$ **Rpta.** $\frac{1}{2}$

(26) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{1}{1-x}}$ **Rpta.** e^{-1}

(27) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(Lnx)^{2/3} + (1-x^2)^{3/4}}{\operatorname{sen}^{2/3}(x-1)}$ **Rpta.** 1

(28) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ **Rpta.** 1

(29) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + Ln(1 - x/e)}{\operatorname{tg} x - x}$ **Rpta.** ∞

(30) $\lim\limits_{x \to 1} (\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})})$ **Rpta.** $\dfrac{1}{12}$

5.31 FUNCIONES HIPERBOLICAS.-

A las funciones trigonométricas a veces se llaman funciones circulares debido a la estrecha relación que tiene con él circulo $x^2 + y^2 = 1$.

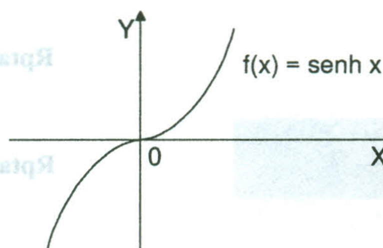
En la misma forma ciertas combinaciones de las exponenciales e^x, e^{-x} se relaciona con la hipérbola que son:

Seno hiperbólico, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica cotangente hiperbólica , secante hiperbólica, cosecante hiperbólica y que denotaremos por: Senh, Cosh, Tgh, Ctgh, Sech, cosech. respectivamente. Ahora daremos las definiciones de cada una de estas funciones hiperbólicas.

a) DEFINICION.- La función seno hiperbólico f : R → R, se define de la forma siguiente:

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

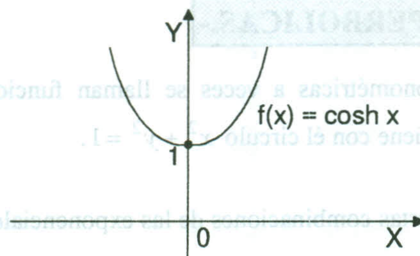
donde $D_f = <-\infty, +\infty>$ y $R_f = <-\infty, +\infty>$. Su gráfica es:



b) DEFINICION.- La función coseno hiperbólica f: R → R, se define de la forma siguiente:

$$f(x)=\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

donde $D_f=<-\infty,+\infty>$ y $R_f=<-\infty,+\infty>$. Su gráfica es:



A la gráfica del coseno hiperbólico se le llama "cateriana"

La cual adopta la forma de un cable flexible y uniforme que cuelga de dos puntos fijos.

OBSERVACIÓN.- Las funciones Senh x y Cosh x no son independientes pues, de las dos funciones se tiene:

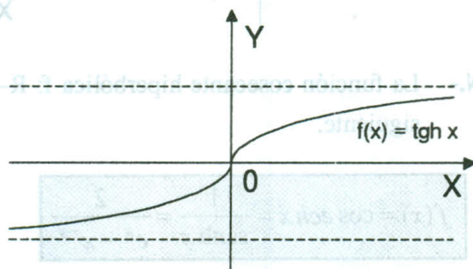
$$\begin{cases}\operatorname{senh} x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\\[2ex] Cosh\ x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{senh}^{2} x=\dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\[2ex] Cosh^{2}x\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\end{cases}, \text{de donde, } \cosh^{2}x-\operatorname{senh}^{2}x=1$$

además de: $\begin{cases} \text{senh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \\ Cosh\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = \text{senh } x + \cosh x \\ \\ e^{-x} = \cosh x.\text{senh } x \end{cases}$

c) **DEFINICIÓN.-** La función tangente hiperbólica f: R →R se define de la forma siguiente:

$$f(x) = \text{tgh } x = \frac{\text{senh } x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

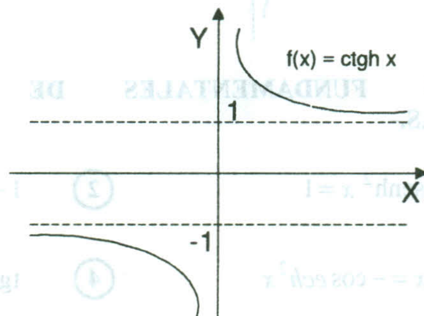
donde $D_f = <-\infty,+\infty>$ y $R_f = <-1,1>$. Su gráfico es:



d) **DEFINICIÓN.-** La función cotangente hiperbólica f: R →R se define de la forma siguiente:

$$f(x) = c\text{tgh } x = \frac{\cosh x}{\text{senh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

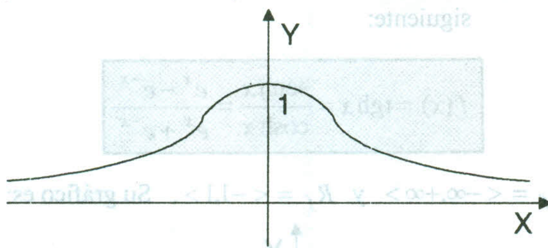
donde $D_f = <-\infty,0> U <0,+\infty>$ y $R_f = <-\infty,-1> U <1,+\infty>$. Su gráfica es:



e) DEFINICIÓN.- La función secante hiperbólica f: R→R define de la forma siguiente:

$$f(x) = \sec hx = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

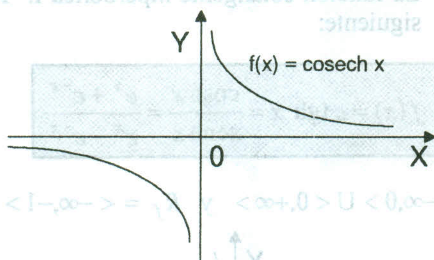
donde $D_f = <-\infty,+\infty>$ y $R_f = <0,1]$. Su gráfica es:



f) DEFINICIÓN.- La función cosecante hiperbólica f: R→R, se define de la forma siguiente.

$$f(x) = \cos echx = \frac{1}{\text{senh}\, x} = \frac{2}{e^x - x^{-x}}$$

donde $D_f = <-\infty,0> \cup <0,+\infty>$ y $R_f = <-\infty,0> \cup <0,+\infty>$. Su gráfica es:



g) IDENTIDADES FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS.-

① $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$ ② $1 - \text{tgh}^2 x = \sec h^2 x$

③ $1 - c\,\text{tgh}^2 x = -\cos ech^2 x$ ④ $\text{tgh}\; x = \dfrac{1}{c\,\text{tgh}\, x}$

(5) $\operatorname{senh} 2x = 2\operatorname{senh} x \cosh x$ (6) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

(7) $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x.\cosh y \pm \cosh x . \operatorname{senh} y$

(8) $\cosh(x \pm y) = \cosh x . \cosh y \pm \operatorname{senh} x.\operatorname{senh} y$

(9) $\operatorname{tgh}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x.\operatorname{tgh} y}$

(10) $\operatorname{senh} A + \operatorname{senh} B = 2\operatorname{senh}(\dfrac{A+B}{2}).\cosh(\dfrac{A-B}{2})$

(11) $\cosh A + \cosh B = 2\cosh(\dfrac{A+B}{2}).\cosh(\dfrac{A-B}{2})$

(12) $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$, $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN:

(1) Demostrar que: $\operatorname{tg}(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Solución

Como $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$\operatorname{tgh}(\ln x) = \frac{e^{2Lnx}-1}{e^{2Lnx}+1} = \frac{e^{Lnx^2}-1}{e^{Lnx^2}+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad \therefore \ \operatorname{tgh}(\ln x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

NOTA.- Se ha aplicado las siguientes propiedades

(1) $e^{Lna} = a$ (2) $k \ln a = \ln a^k$

(2) Demostrar que: $\dfrac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x} = e^{2x}$

Solución

Como $\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, al reemplazar se tiene

$$\frac{1+\text{tgh } x}{1-\text{tgh } x}=\frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}=\frac{\frac{e^{2x}+1+e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{\frac{e^{2x}+1-e^{2x}+1}{e^{2x}+1}}=\frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}}{\frac{2}{e^{2x}+1}}=\frac{2e^{2x}}{2}=e^{2x} \qquad \therefore \frac{1+\text{tgh } x}{1-\text{tgh } x}=e^{2x}$$

(3) Demostrar que: $(\text{senh } x+\cosh x)^n=\cosh n\,x+\text{senh } n\,x$

Solución

$$\begin{cases} \text{senh } x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \\ Cosh\ x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cosh x+\text{senh } x=e^{x}$$

$$(\cosh x+\text{senh } x)^n=e^{nx} \qquad \textbf{...(1)}$$

$$\begin{cases} \text{senh } (nx)=\dfrac{e^{nx}-e^{-nx}}{2} \\ \cosh\ (nx)=\dfrac{e^{nx}+e^{-nx}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cosh (nx)+\text{senh } (nx)=e^{nx} \qquad \textbf{...(2)}$$

Luego comparando (1) y (2) se tiene que: $(\cosh x+\text{senh } x)^n=\cosh nx+\text{senh } nx$

(4) Demostrar que: tgh(-x) = -tghx

Solución

$$\text{tgh}(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{e^{-x}+e^{-(-x)}}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=-\text{tgh}\,x \qquad \therefore \ \text{tgh(-x) = -tgh x.}$$

(5) Calcular el valor de x si: $\text{tgh}(\ln x)=-\dfrac{1}{4}$

Solución

$\text{tgh}(\ln x)=\dfrac{e^{\ln x}-e^{-\ln x}}{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}=-\dfrac{1}{4}$, aplicando las propiedades $e^{\ln a}=a$ se tiene:

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1}=-\frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2-4=-x^2-1 \Rightarrow 5x^2=3$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ de donde } x=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

(6) Calcular el valor de x si senh (ln 2x) = cosh (ln x)

Solución

senh (ln 2x) = cosh (ln x) por definición se tiene:

$$\frac{e^{\ln 2x}-e^{-\ln 2x}}{2}=\frac{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}{2} \text{ de donde } 2x-\frac{1}{2x}=x+\frac{1}{x} \text{ simplificando}$$

$$4x^2-1=2x^2+2 \Rightarrow 2x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ por lo tanto } x=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

5.32 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Demostrar las identidades siguientes:

(1) cosh (x ± y) = cosh x. cosh y ± senh x. senh y

(2) senh (x ± y) = senh x. cosh y ± cosh x. senh y

(3) $\text{tgh}(x\pm y)=\dfrac{\text{tgh } x\pm \text{tgh } y}{1\pm \text{tgh}\, x.\text{tgh}\, y}$

(4) $\text{sen } A+\text{senh } B=2\,\text{senh}(\dfrac{A+B}{2})\cosh(\dfrac{A-B}{2})$

(5) $\cosh A+\cosh B=2\cosh(\dfrac{A+B}{2})\cosh(\dfrac{A-B}{2})$

(6) $\text{tgh}(\dfrac{x-y}{2})=\dfrac{\text{senh}\, x-\text{senh}\, y}{\cosh x+\cosh y}$

(7) sech (-x) = sechx

(8) cosech(-x) = -cosech x

(9) $\operatorname{senh}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\cosh x-1}{2}}$

(10) $\cosh\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\cosh x+1}{2}}$

II. Demostrar que:

(1) $\operatorname{tgh} x=\frac{\operatorname{senh}2x}{\cosh 2x+1}$

(2) $\frac{\cosh 2x+\cosh 4y}{\operatorname{senh}2x+\operatorname{senh}4y}=c\operatorname{tgh}(x+2y)$

(3) $\operatorname{senh}^2 x-\operatorname{senh}^2 y=\operatorname{senh}(x+y)\operatorname{senh}(x-y)$

(4) $\operatorname{senh}3x=3\operatorname{senh}x+4\operatorname{senh}^3 x$

(5) $\cosh 3x=4\cosh^3 x-3\cosh x$

5.33 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS.-

Mediante la regla de la derivada de la función exponencial se puede deducir las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas.

Sea u una función de x diferenciable, entonces

(1) Si $y=\operatorname{senh} u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\cosh u.\frac{du}{dx}$

(2) Si $y=\cosh u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\operatorname{senh} u.\frac{du}{dx}$

(3) Si $y=\operatorname{tgh} u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sec h^2 u.\frac{du}{dx}$

(4) Si $y=\operatorname{ctgh} u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\cos ech^2 u\frac{du}{dx}$

(5) Si $y=\operatorname{sech} u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\sec h\ u.\operatorname{tgh} u.\frac{du}{dx}$

(6) Si $y=\operatorname{cosech} u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\cos\sec\ u.c\operatorname{tgh} u.\frac{du}{dx}$

Ejemplo.- Hallar la derivada de las siguientes funciones

(1) $f(x) = \ln(\operatorname{senh} x^3)$

Solución

$$f(x) = \ln(\operatorname{senh} x^3) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\operatorname{senh} x^3)'}{\operatorname{senh}\ x^3} = \frac{\cosh x^3 (x^3)'}{\operatorname{senh}\ x^3} = c\operatorname{tgh} x^3 . 3x^2$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 c\operatorname{tgh} x^3$$

(2) $f(x) = \sec h^2 x + 3\cos ech^2 x$

Solución

$$f(x) = \sec h^2 x + 2\cos ec\, h^2 x \Rightarrow f'(x) = 2\sec h\, x.(\operatorname{senh} x) + 6\cos ech\, x.(\cos ech\, x)'$$

$$= -2\sec h^2 x.\operatorname{tgh} x - 6\cos ech^2 x.c\operatorname{tgh} x$$

(3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{senh} x}{\operatorname{senh} x - \operatorname{tgh} x}}$

Solución

$$\frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{senh} x}{\operatorname{senh} x - \operatorname{tgh} x} = \frac{\operatorname{senh} x(1+\cosh x)}{\operatorname{senh} x(\cosh x - 1)} = \frac{1+\cosh x}{\cosh x - 1} = \frac{2\cosh^2 \frac{x}{2}}{2\operatorname{senh}^2 \frac{x}{2}} = c\operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{senh} x}{\operatorname{senh} x - \operatorname{tgh} x}} = \sqrt{c\operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} = c\operatorname{tgh}\frac{x}{2}$$

$$f'(x) = -\cos ech^2 \frac{x}{2}.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos ech^2 \frac{x}{2}$$

(4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\cosh^2 x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cosh^2 x}}.\operatorname{senh}^2 x$

Solución

Simplificando $\forall$ x $\neq$ 0 se tiene:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cosh^2 x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cosh^2 x}}.\operatorname{senh}^2 x=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cosh^2 x})^2}{2-1-\cosh^2 x}.\operatorname{senh}^2 x$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cosh^2 x})^2}{1-\cosh^2 x}\operatorname{senh}^2 x=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cosh^2 x})^2}{\operatorname{senh}^2 x}.\operatorname{senh}^2 x$$

$f(x)=-(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cosh^2 x})^2$, derivando se tiene.

$$f'(x)=-2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cosh^2 x})(0+\frac{\operatorname{senh} x\cosh x}{\sqrt{1+\cosh^2 x}})$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{-(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cosh^2 x})\operatorname{senh} 2x}{\sqrt{1+\cosh^2 x}}$$

Ejemplo.- Usando derivación implícita; hallar $y'=\frac{dy}{dx}$

① y = senh(x – y)

Solución

$$y=\operatorname{senh}(x-y)\ \Rightarrow\ y'=\cosh(x-y).(1-y')$$

$$\Rightarrow\ y'+\cosh(x-y)y'=\cosh(x-y)$$

$$\Rightarrow\ [1+\cosh(x-y)]y'=\cosh(x-y)\qquad\qquad \therefore\ y'=\frac{\cosh(x-y)}{1+\cosh(x-y)}$$

② $y=\operatorname{senh}(\cosh(x^2+y^2))$

Solución

$$y'=\cosh(\cosh(x^2+y^2)).(\cosh(x^2+y^2))'$$

$$y'=\cosh(\cosh(x^2+y^2)).\operatorname{senh}(x^2+y^2).(2x+2y.y')$$

$$y'-2y\cosh(\cosh(x^2+y^2)).\operatorname{senh}(x^2+y^2).y'$$

$$=2x\cosh(\cosh(x^2+y^2))\operatorname{senh}(x^2+y^2)$$

$$[1-2y\cosh(\cosh(x^2+y^2))\operatorname{senh}(x^2+y^2)]y' = 2x\cosh(\cosh(x^2+y^2))\operatorname{senh}(x^2+y^2)$$

$$\therefore\ y' = \frac{2x\cosh(\cosh(x^2+y^2))senh(x^2+y^2)}{1-2y\cosh(\cosh(x^2+y^2))senh(x^2+y^2)}$$

(3) $f(x) = x^{\operatorname{senh} x}$

Solución

Tomando logaritmo a ambos miembros se tiene:

$Ln(f(x)) = Lnx^{\operatorname{senh} x} = \operatorname{senh} x.Lnx$ aplicando derivación implícita.

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cosh x.Lnx + \operatorname{senh} x.\frac{1}{x}$ entonces $f'(x) = f(x)(\cosh x, Lnx + \frac{\operatorname{senh} x}{x})$

$$\therefore f'(x) = (\cosh x.Lnx + \frac{\operatorname{senh} x}{x})x^{\operatorname{senh} x}$$

(4) $\sqrt{\frac{y+\operatorname{senh} x}{y-\operatorname{senh} x}} + \sqrt{\frac{y-\operatorname{senh} x}{y+\operatorname{senh} x}} = \sqrt{5}$

Solución

Elevando el cuadrado a ambos miembros de la igualdad

$[\sqrt{\frac{y+\operatorname{senh} x}{y-\operatorname{senh} x}} + \sqrt{\frac{y-\operatorname{senh} x}{y+\operatorname{senh} x}}]^2 = (\sqrt{5})^2$

$\frac{y+\operatorname{senh} x}{y-\operatorname{senh} x} + \frac{y-\operatorname{senh} x}{y+\operatorname{senh} x} + 2 = 5$ simplificando se tiene $\frac{y+\operatorname{senh} x}{y-\operatorname{senh} x} + \frac{y-\operatorname{senh} x}{y+\operatorname{senh} x} = 3$

$(y+\operatorname{senh} x)^2 + (y-\operatorname{senh} x)^2 = 3(y^2-\operatorname{senh}^2 x)$

$2y^2 + 2\operatorname{senh}^2 x = 3y^2 - 3\operatorname{senh}^2 x$ simplificando

$y^2 = 5\operatorname{senh}^2 x$ derivando implícitamente $2yy' = 10\operatorname{senh} x\cosh x$ despejando y'

$y' = \frac{5\operatorname{senh} x\cosh x}{y} = \frac{5\operatorname{senh} 2x}{2y}$ $\therefore\ y' = \frac{5\operatorname{senh} 2x}{2y}$

5.34 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Hallar la derivada de las siguientes funciones

(1) $f(x)=\operatorname{senh}(\frac{x^2-1}{x^2-2})$

(2) $f(x)=\operatorname{senh}(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2})$

(3) $f(x)=\cosh(\frac{x^2-10x+9}{x^2+10x+9})$

(4) $f(x)=(\frac{2}{\cosh^4 x}+\frac{3}{\cosh^2 x})\operatorname{senh} x$

(5) $f(x)=\frac{\operatorname{senh} x.\cosh x}{\sqrt{a\cosh^2+b\sec h^2 x}}$

(6) $f(x)=\operatorname{tgh}(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2})$

(7) $f(x)=\operatorname{tg}(\frac{x^2}{x-1})$

(8) $f(x)=\operatorname{tgh}(x-\sqrt[3]{x^3+26})$

(9) $f(x)=\operatorname{tgh}(\frac{x^2-18x+32}{x^2+18x+32})$

(10) $f(x)=\ln(\cosh x)+\frac{1}{2\cosh^2 x}$

(11) $f(x)=\frac{\cosh x}{\operatorname{senh}^2}-Ln(c\operatorname{tgh}(\frac{x}{2}))$

(12) $f(x)=\frac{a+b\operatorname{tgh}(x/2)}{a-b\operatorname{tgh}(x/2)}$

(13) $f(x)=\ln[arc\sec(\frac{1}{\cos(\operatorname{tgh}\sqrt{x+\sqrt{x}})})]$

(14) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tgh} x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{tgh} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{tgh} x})$

(15) $f(x)=\frac{\cos echx+c\operatorname{tgh} x}{\cos echx-c\operatorname{tgh} x}$

(16) $f(x)=arc.\operatorname{tg}(\operatorname{senh} x^2)$

(17) $f(x)=arc.\operatorname{sen}(\operatorname{tgh} x^2)$

(18) $f(x)=\ln(c\operatorname{tgh} 3x-\cos ech3x)$

(19) $f(x)=c\operatorname{tgh}(\frac{x^2+7x+10}{x^2-7x+10})$

(20) $f(x)=\sec h(\frac{x+1}{x^2+x+1})$

II. Usando derivación implícita hallar $y' = \dfrac{dy}{dx}$

(1) $ctg(xy) + xy = 0$

(2) $\cosh(x + y) = y \,\text{senh}\, x$

(3) $\text{tgh}\, y = 3x^2 + \text{tgh}(x + y)$

(4) $y = \text{sen}(\cosh(x^2 + y^2))$

OBSERVACIÓN.- Por medio de las derivadas de las funciones hiperbólicas y la regla de L'Hospital se puede establecer las propiedades siguientes:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \text{senh}\, x = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \cosh x = 1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{senh}\, x}{x} = 1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tgh}\, x}{x} = 1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \text{senh}\, x}{x} = 0$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cosh x}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$

Ejemplo.- Calcular el límite de las siguientes funciones

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cosh(2x)}{1 - \cosh 7x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cosh 2x}{1 - \cosh 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{senh}\, 2x}{-7\,\text{senh}\, 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cosh 2x}{49\cosh 7x} = \frac{4}{49}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{senh}\, 9x - \text{senh}\, 5x}{x\cosh x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{senh}\, 9x - \text{senh}\, 5x}{x\cosh x} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cosh 9x - 5\cosh 5x}{\cosh x + x\,\text{senh}\, x} = \frac{9-5}{1+0} = 4$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \text{senh}\, 4x}{x + \text{senh}\, 5x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{senh}\, 4x}{x + \text{senh}\, 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 4\cosh 4x}{1 + 5\cosh 5x} = \frac{1-4}{1+5} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

④ $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{senh}(\pi-x)}{x(\pi-x)}$

Solución

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{senh}(\pi-x)}{x(\pi-x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\cosh(\pi-x)}{\pi-2x}=\frac{-1}{\pi-2\pi}=\frac{1}{\pi}$$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cosh a\,x}{2}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh a\,x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\operatorname{senh} a\,x}{2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-a^2\cosh\,a\,x}{2}=-\frac{a^2}{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular los límites que se indican

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} 15x}{x}$ **Rpta.** 15

② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$ **Rpta.** $\frac{3}{5}$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{\cosh x}--\cosh x}{2}$ **Rpta.** $-\frac{3}{4}$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{senh}\,x)}{\operatorname{sen}^7(\operatorname{senh}\,2x)}$ **Rpta.** $\frac{1}{8}$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\operatorname{senh}^2 x}-\frac{1}{\cosh\,x-1}\right)$ **Rpta.** $-\frac{1}{2}$

⑥ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{senh}(1-x)}{\sqrt{x}-1}$ **Rpta.** -2

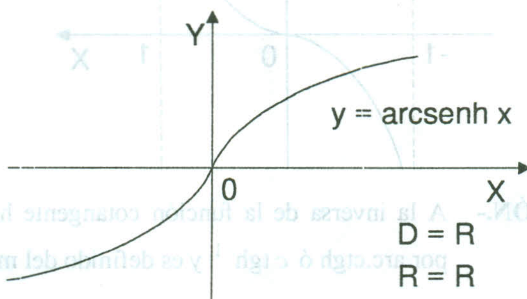
5.35 FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS.-

Las funciones hiperbólicas senh x, tgh x, ctgh x y cosech x son inyectivas en todo su dominio por lo tanto tiene inversas, y las funciones hiperbólicas cosh x, senh x no son inyectivas, pero si restringimos su dominio en el intervalo [0,+∞>, en éste intervalo las funciones cosh x, sech x son inyectivas por lo tanto se puede determinar su inversa. Ahora definiremos la inversa de cada una de estas funciones.

a) DEFINICIÓN.- A la inversa de la función seno hiperbólico denotaremos por arc.senh ó senh^{-1} y es definida del modo siguiente:

$$y = \text{arc.senh}\, x \Leftrightarrow x = \text{senh}\, y$$

de donde $\begin{cases} \text{senh}(arc.\text{senh}\, x) = x \\ arc.\text{senh}(\text{senh}\, y) = y \end{cases}$. Su gráfica es:

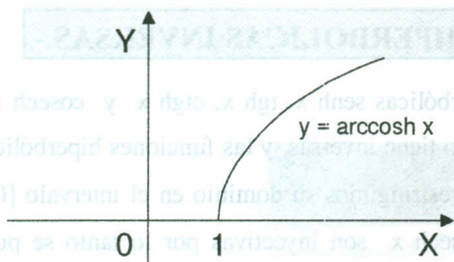


b) DEFINICIÓN.- A la inversa de la función coseno hiperbólico denotaremos por arc.cosh ó $\cosh^{-1}$ y es definido del modo siguiente:

$$y = \text{arc.cosh}x \Leftrightarrow x = \cosh y, \quad y \geq 0$$

donde su dominio es [1,+∞> y el rango es [0,+∞>

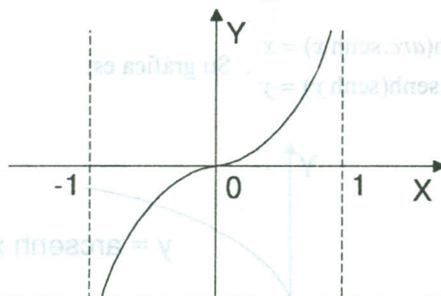
además $\begin{cases} \cosh(arc.\cosh x) = x, x \geq 1 \\ arc.\cosh(\cosh y) = y, y \geq 0 \end{cases}$. Su gráfica es:



c) DEFINICIÓN.- A la función inversa de la tangente hiperbólica denotaremos por arc.tgh ó tgh^{-1} y es definida del modo siguiente.

$$y = \text{arc.tgh}x \Leftrightarrow x = \text{tgh}\, y$$

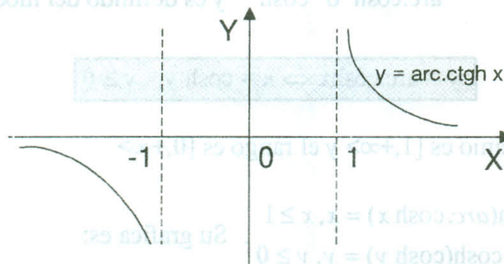
Donde su dominio es <-1, 1> y su rango es R. Su gráfica es:



d) DEFINICIÓN.- A la inversa de la función cotangente hiperbólica denotaremos por arc.ctgh ó $c\,\text{tgh}^{-1}$ y es definido del modo siguiente.

$$y = \text{arc.ctgh}\, x \;,\; x = \text{ctgh}\, y$$

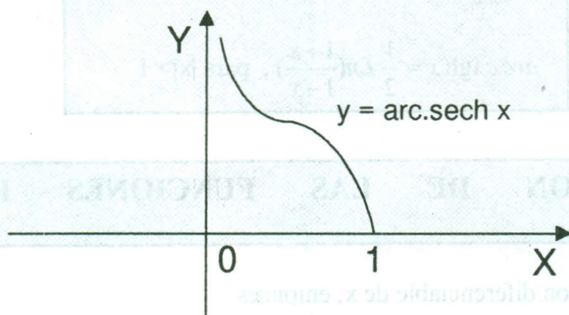
Donde su dominio es $<-\infty, -1> \cup <1, +\infty>$ y el rango $R - \{0\}$. Su gráfica es:



e) **DEFINICIÓN.-** A la inversa de la función secante hiperbólica denotaremos por arc.sech ó $\sec h^{-1}$ y es definida del modo siguiente:

$$y = \text{arc.sech } x \Leftrightarrow x = \text{sech } y$$

donde su dominio es <0, 1] y el rango [0, +∞>. Su gráfico es:

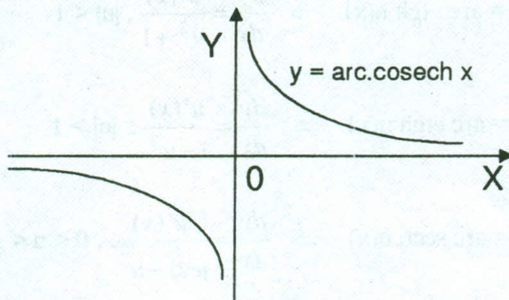


f) **DEFINICIÓN.-** A la inversa de la función cosecante hiperbólica denotaremos por arc.cosech x ó $\cos ech^{-1}$ y es definida del modo siguiente

$$y = \text{arc.cosech } x \Leftrightarrow x = \text{cosech } y$$

Donde su dominio es <-∞ ,0> U <0, +∞> y el rango <-∞, 0> U <0, +∞>.

Su gráfico es:



OBSERVACION.- También a las funciones hiperbólicas inversas se puede expresar en términos de logaritmo natural.

$$arc.\text{senh}\, x = Ln(x+\sqrt{x^2+1})\ ,\ \forall\ x \in R$$

$$arc.\cosh x = Ln(x+\sqrt{x^2+1})\ ,\ \text{para } x \geq 1$$

$$arc.\text{tgh}\, x = \frac{1}{2}Ln(\frac{1+x}{1-x})\ ,\ \text{para } |x| < 1$$

$$arc.c\,\text{tgh}\, x = \frac{1}{2}Ln(\frac{1+x}{1-x})\ ,\ \text{para } |x| > 1$$

5.36 DERIVACION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS.-

Sea u una función diferenciable de x, entonces

① $y = \text{arc.senh } u(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2+1}}$

② $y = \text{arc.cosh } u(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2-1}}, u > 1$

③ $y = \text{arc . tgh } u(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'(x)}{u^2+1}, |u| < 1$

④ $y = \text{arc.ctgh } u(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'(x)}{1-u^2}, |u| > 1$

⑤ $y = \text{arc.sech } u(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'(x)}{u\sqrt{1-u^2}}, 0 < u < 1$

⑥ $y = \text{arc.cosech } u(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'(x)}{|u|\sqrt{1+u^2}},\ u \neq 0$

Ejemplo.- Calcular la derivada de las siguientes funciones

(1) $f(x) = x^2 \text{ arccos } hx^2$

Solución

$$f'(x) = 2x arc.\cosh x^2 + x^2 \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}} \qquad \therefore f'(x) = 2x\ arc.\cosh x^2 + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$$

(2) $f(x) = Ln(\frac{x-1}{x+1})^{1/6} + \frac{\sqrt{2}}{3} arc.\text{tgh}(\frac{x}{\sqrt{2}})$

Solución

Aplicando propiedades de logaritmo se tiene: $f(x) = \frac{1}{6} Ln(\frac{x-1}{x+1}) + \frac{\sqrt{2}}{3} arc.\text{tgh}(\frac{x}{\sqrt{2}})$

$$f'(x) = \frac{1}{6}[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}] + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{6}(\frac{2}{x^2-1}) + \frac{2}{3(2x^2)} = \frac{1}{3(x^2-1)} - \frac{2}{3(x^2-2)}$$

$$\therefore \quad f'(x) = -\frac{x^2}{3(x^4-3x^2+2)}$$

(3) $f(x) = arc.\text{senh}\, e^x + arc.\text{tgh}(\frac{1}{x})$

Solución

Aplicando la regla de derivación se tiene:

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} - \frac{1}{x^2-1} \qquad \therefore \ f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} - \frac{1}{x^2-1}$$

(4) f(x) = arc.senh (Lnx) + Ln(arc.tgh x)

Solución

Aplicando la regla de la derivación se tiene

$$f'(x)=\frac{(Lnx)'}{\sqrt{Ln2x+1}}+\frac{(arc.\text{tgh}\,x)'}{arc.\text{tgh}\,x}=\frac{1}{\sqrt{Ln^2x+1}}+\frac{(x)'}{(1-x^2)arc.\text{tgh}\,x}$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{Ln^2x+1}}+\frac{1}{(1-x^2)arc.\text{tgh}\ x}$$

5.37 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Hallar $f'(x)$ si f(x) es dado por:

① $f(x)=\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\,3x)$

② $f(x)=\text{arccos}\,h(\cos ecx)$

③ $f(x)=arc.\text{tgh}(\cos\ e^x)$

④ $f(x)=Ln\sqrt{x^2+1}-x\ arc.\text{tgh}\,x$

⑤ $f(x)=\text{arcsen}\,h(\text{tg}\,x)$

⑥ $f(x)=xarc.\text{senh}\ x-\sqrt{1+x^2}$

⑦ $f(x)=\text{arctg}(\text{senh}x)-\text{arcsec}(\cosh x)$

⑧ $f(x)=\text{arcsen}\,h(\ln x)+\ln(\text{arctg}\,hx)$

⑨ $f(x)=arc.\text{senh}\ e^x+arc.\text{tgh}\frac{1}{x}$

⑩ $f(x)=3a^2\ \text{arctg}\,h\sqrt{\frac{x}{x+a}}-(3a+3x)\sqrt{ax-x^2}$, a > 0

II. Hallar $\frac{dy}{dx}$ donde

① arc.tg x = arc.tgh y

② $y^2+x\cosh y+\text{senh}^2\ x=30$

③ arc.senx = sech y

④ $\cosh^2 x-\cosh^2 y=1$

⑤ arc.tgh x + x arc.cosh y = arc.senh (x+y)

⑥ $\text{arctg}\,h(x+y)=\frac{1}{3}[\text{arctg}\,h\ \ x+\text{arctg}\,h\ \ y]$

(7) $y = \operatorname{arctg} h\frac{2}{x} + \operatorname{arctg} h\frac{x}{2}$

(8) $y = \operatorname{arctg} h(\frac{3+\operatorname{sen} x}{4-5\cos x})$

(9) $y = xe^{-x} \operatorname{arccos} h(1-x)$

(10) $y = \operatorname{arctg} h(\frac{x}{a}) + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, a>0

III.

(1) La gráfica de la ecuación: $x = a.arc.\operatorname{senh}\sqrt{\frac{a^2}{y^2}-1} - \sqrt{a^2-y^2}$ se denomina tractriz.

Demuestre que la pendiente en la curva en cualquier puesto (x, y) es $\frac{-y}{\sqrt{a-y^2}}$

(2) Sea P(cosh a, sen a). Demostrar que la recta tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en su vértice (1, 0) intercepta a la recta OP en el punto (1, tgh a)

(3) Dadas las funciones definidas por:

$f(x) = 4 - arc.\operatorname{tg}(\frac{x}{1+x^2}) + arc.\operatorname{tg}\frac{1}{2}$ y R(x) = 4 + arc.senh (x+2)

g(x) = – 2 + tgh(x – 1) y $h(x) = arc.\operatorname{tgh}(\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4}) - \frac{1}{2}Ln(\frac{4}{5}) - 2$

Hallar el área del rectángulo, tal que el primer vértice en el punto de inflexión de g(x), el segundo vértice en el punto máximo relativo de f(x), el tercer vértice en el punto extremo relativo de h(x), y el cuarto vértice en el punto de inflexión R(x). **Rpta.** $18u^2$

(4) Dadas las funciones definidas por f(x) = arc.tg(x + 6) – 1, $g(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2} - 1$, h(x) = 2 – arc $\operatorname{tgh}(\frac{x^2+x+9}{x^2-x+9}) + \frac{1}{2}Ln\ 6$ y la curva dada por la ecuación paramétricas

$x = \frac{6t}{1-t^3}$, $y = \frac{6t^2}{1-t^3}$, t ≠ 1. Hallar el área del trapecio isósceles con base paralela al eje x, tal que el primer vértice A es el punto de inflexión de f(x), el segundo vértice B punto máximo relativo de h(x), el tercer vértice c es un punto que está sobre la asíntota oblicua de la curva y el cuarto vértice D está sobre ésta asíntota y es punto extremo relativo de g(x). **Rpta.** A(-6,-1), B(-3,2), C(0,2), D(3,-1), $área = 18u^2$

(5) Sea L la recta tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en el punto A(cosh u, sen u). Demostrar que L corta el eje X en el punto (sech u, 0) y el eje Y en (0, -cosech u).

(6) Dadas las funciones f y g definidas por $f(x) = 4 + arc.\text{tg}(\frac{x}{1+x^2}) - arc.\text{tg}\frac{1}{2}$ y $g(x) = -3 + arc.\text{tgh}(\frac{x^2+10x+9}{x^2-10x+9}) - \frac{1}{2}Ln\frac{3}{5}$. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son: El punto (1, -3), el segundo vértice es un extremo relativo de g(x) y el tercer vértice es el máximo relativo de f(x). **Rpta.** $A = 14u^2$

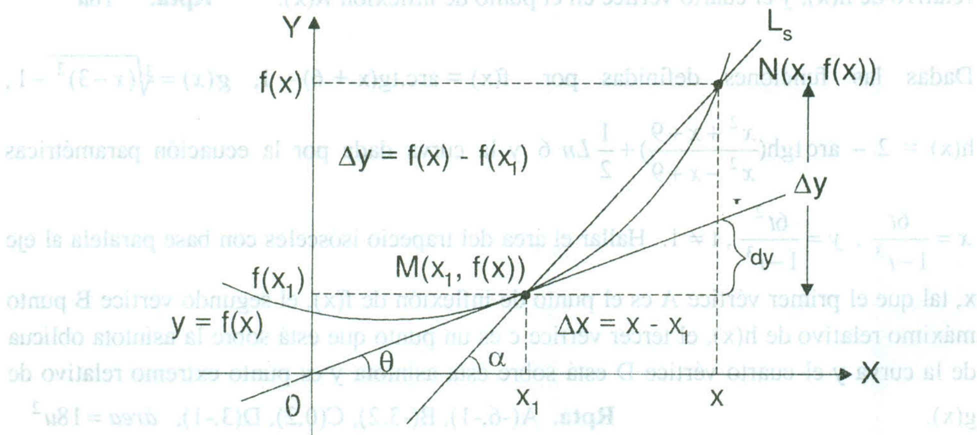
5.38 DIFERENCIALES.-

Consideremos una función f: R → R, MN el arco de la gráfica de la función y = f(x); $\overline{MT}$ es la tangente a la curva en el punto $M(x_1, f(x_1))$

Sea $\Delta x = x - x_1$, al cual llamaremos incremento del argumento x en el segmento $[x_1, x]$

$\Delta y = f(x) - f(x_1)$, pero como $x = x_1 + \Delta x$, entonces:

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, el cual llamaremos incremento del argumento de la función y = f(x) en el segmento $[x_1, x]$ la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\,\alpha$, representa el coeficiente angular de la recta L_s.



Además $mL_s = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ y la pendiente de la recta tangente L_t en el punto $M(x_1, f(x_1))$ es:

$$mL_t = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_1} = f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

a) DEFINICIÓN.- La diferencial de x, es un incremento cualquiera de la variable independiente x es decir:

$$dx = \Delta x$$

b) DEFINICIÓN.- La función de la diferencial f (ó variable dependiente y) en un punto x_1 es igual al producto de la derivada de f en x_1 por la diferencial de x es decir: $dy = d(f(x_1)) = f'(x_1)dx$

$$dy = f'(x_1)dx$$

c) FÓRMULAS PARA DIFERENCIALES.-

Consideremos dos funciones de x; u = f(x), v = g(x) y c constante, entonces:

①	$dc = 0$	②	$d(cu) = cdu$
③	$d(u \mp v) = du \mp dv$	④	$d(uv) = udv + vdu$
⑤	$d(\dfrac{u}{v}) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$		

Ejemplo.- Hallar la diferencial dy de las siguientes funciones

① y = x Lnx-x

Solución

$dy = y'dx = (\ln x + 1 - 1)dx = \ln x.dx$ $\therefore$ dy = ln x.dx

② $y = arc.\operatorname{tg}\dfrac{x}{a}$

Solución

$$dy = y'dx = \frac{(\frac{x}{a})'}{1+(\frac{x}{a})^2}dx = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}dx = \frac{a}{a^2+x^2}dx \qquad \therefore dy = \frac{a}{x^2+a^2}dx$$

Ejemplo.- Hallar dy si $x^2+2xy-y^2=a^2$

Solución

Como $dy = y'dx$ entonces calculando y' se tiene:

$$x^2+2xy-y^2=a^2 \Rightarrow y' = -\frac{x+y}{x-y}$$

$$dy = y'dx = -\frac{x+y}{x-y}dx \qquad \therefore dy = -\frac{x+y}{x-y}dx$$

5.39 DIFERENCIALES COMO UNA APROXIMACION.-

Se conoce que dx = Δx, es decir que la diferencial de la variable independiente x coincide con su incremento además tenemos que:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x), \quad dy = f'(c)dx$$

se observa en el gráfico que el incremento de la función no es igual a la diferencial de la variable dependiente, es decir que son aproximadamente iguales. $\Delta y \cong dy$, de donde

$$f(x+\Delta x)-f(x) \cong f'(x)dx,$$

$$\boxed{f(x+\Delta x) \cong f(x)+f'(x)\Delta x}$$

Para calcular el error introducido cuando se utiliza dy para aproximar Δy, cuando Δx es suficientemente pequeño se tiene:

$$\boxed{E = \Delta y - dy}$$

A $\frac{dy}{f(x_1)}$ se le conoce con el nombre de error relativo

A $\frac{dy}{f(x_1)}100\%$ se le llama error porcentual.

Es decir: $\frac{dy}{f(x_1)} = \text{error relativo}$

$$\frac{dy}{f(x_1)}100\% = \text{Error relativo porcentual}$$

5.40 DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR.-

Sea f: R→R una función tal que y = f(x) a la diferencial de f se ha definido por

$$dy = f'(x)dx$$

ahora calcularemos la diferencial de segundo orden de f

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = [f''(x)dx + f'(x)(dx)']dx = (f''(x)dx + 0)dx$$

$$= (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2$$

puesto que $(dx)' = 0$, debido a que dx es independiente de x entonces:

$$d^2y = f''(x)(dx)^2$$

en forma análoga se tiene para: $d^3y = f'''(x)(dx)^3$

Luego en general se tiene que: Sí y = f(x) entonces: $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$

EJEMPLO DE APLICACIÓN

(1) Calcular dy sí $y = (3x^2 - 2x + 1)^3$

Solución

$$y = (3x^2 - 2x + 1)^3 \Rightarrow dy = 3(3x^2 - 2x + 1)(6x - 2)dx$$

$$\therefore dy = 6(3x^2 - 2x + 1)(3x - 1)dx$$

(2) Si $y = 4x^2 - 3x + 1$, encontrar $\Delta y,\ dy,\ \Delta y - dy$ para cualquier x y Δx

Solución

Como $y = f(x) = 4x^2 - 3x + 1$, entonces:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 - (4x^2 - 3x + 1)$$

$$= 4x + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - 4x^2 + 3x - 1 = 8x\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2$$

$$\therefore \Delta y = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2$$

también: $dy = f'(x)dx = (8x - 3)\Delta x$ $\qquad \therefore\ dy = (8x - 3)\Delta x$

calculando $\Delta y - dy = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2 - (8x - 3)\Delta x = 4(\Delta x)^2$

(3) Hallar Δy, dy y $E = \Delta y - dy$ si $f(x) = x^2 + 5x$, $x_1 = -1$, $\Delta x = 0.02$

Solución

Se conoce que $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

$$\Delta y = f(-1 + 0.02) - f(-1) = f(-0.98) - f(-1) = (-0.98)^2 + 5(-0.98) - (1 - 5)$$

$$= 0.9604 - 4.90 + 4 = -3.9396 + 4 = 0.0604.$$

además $dy = f'(x)dx \Rightarrow dy = f'(-1).(0.02) = (-2+5).(0.02) = 3(0.02) = 0.06$

$$\therefore\ dy = 0.06$$

$E = \Delta y - dy = 0.0604 - 0.06 = 0.0004.$

(4) Usando diferenciales calcular el valor de f(3.002). Sí $f(x)=x^3+2x^2-x+1$

Solución

Se sabe que: $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$

Luego $f(3+0.002)\approx f(3)+f'(3)(0.002)$

$f(x)=x^3+2x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+4x-1$

$$f'(3)=27+12-1=38$$

$$f(3)=27+18-3+1=43$$

$f(3.002)\approx 43+38(0.002)=43.076$ $\therefore$ $f(3.002)\approx 43.076$

(5) Usando diferenciales usar el valor aproximado de $\sqrt[3]{28}$

Solución

Sea f la función definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}$

De donde x = 27 y Δx = 1 reemplazando se tiene: $f(27+1)\approx f(27)+f'(27).(1)$

$$\begin{cases} f(c)=\sqrt[3]{x} \\ f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(27)=3\sqrt{27}=3 \\ f'(27)=\dfrac{1}{27}=0.037 \end{cases}$$

$f(28)\approx f(27+f'(27)\Delta x \Rightarrow f(28)\approx 3+(0.037)(1)=3.037$

$\therefore f(28)\approx f(27)+f'(27)(1)=3.037$ $\therefore f(28)\approx 3.037$

(6) Hallar el valor aproximado de $E=\sqrt{81.6\sqrt{81.6}}$ mediante diferenciales.

Solución

Definiendo la función $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$ donde x = 81, Δx = 0.6

Como $E = f(81+0.6) \approx f(81) + f'(81)(0.6)$

$$E = f(81.6) \approx f(81) + f'(81)(0.6)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}} \\ f'(x) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f(81) = \sqrt{81\sqrt{81}} = 27 \\ f'(81) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{81}} = \dfrac{1}{4} = 0.25 \end{array}$$

$E = f(81.6) \approx 27 + (0.25)(0.6)$ $\qquad \therefore \sqrt{81.6\sqrt{81.6}} \approx 27.15$

(7) Hallar un valor aproximado mediante diferenciales de $\left(\dfrac{5(-1.91)-4(-1.91)^3+2}{(1.91)^2-0.91}\right)^{2/3}$

Solución

Definamos la función f por: $\qquad f(x) = \left(\dfrac{-5x+4x^3+2}{x^2-x+1}\right)^{2/3}$

donde $x = 2$ y $\Delta x = -0.09$, puesto que

$$\left(\frac{5(-1.91)-4(-1.91)^3+2}{(1.91)^2-0.91}\right)^{2/3} = \left(\frac{5(-1.91)+4(-1.91)^3+2}{(1.91)^2-0.91}\right)^{2/3}$$

como $\qquad f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

$$f(2+(-0.09)) \cong f(2) + f'(2).(-0.09)$$

$f(x) = \left(\dfrac{-5x+4x^3+2}{x^2-x+1}\right)^{2/3}$ derivando se tiene:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2-x+1}{4x^3-5x+2}\right)^{1/3}\left(\frac{4x^4-8x^3+17x^2-4x-3}{(x^2-x+1)^2}\right)$$

$$f(2) = \left(\frac{-10+32+2}{4-2+1}\right)^{2/3} = \left(\frac{24}{3}\right)^{2/3} = (8)^{2/3} = 4$$

$$f'(2) = \frac{2}{3}\left(\frac{4-2+1}{32-10+2}\right)^{1/3} = \left(\frac{64-64+68-8-3}{(4-2+1)^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{19}{3}\right) = \frac{19}{9}$$

como $f(1.91) \approx f(2) + f'(2).(-0.09)$

$$\left(\frac{5(-1.91) - 4(-1.91)^3 + 2}{(1.91)^2 - 0.91}\right)^{2/3} \approx 4 + \frac{19}{9}(-0.09) = 3.81.$$

(8) Calcular aproximadamente el valor de sen 59° si: Sen 60° = 0.86603 y cos 60° = 0.5, mediante diferenciales.

Solución

Sea f(x) = senx , donde x = 60° y Δx = -1°

Como $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ entonces $f(60° + (-1°)) \approx f(60°) + f'(60°)(-1°)$

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x \\ f'(x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & f(60°) = \operatorname{sen} 60° = 0.86603 \\ & f'(60°) = \cos 60° = 0.5 \end{aligned}$$

además por trigonometría se tiene: $\frac{s}{180} = \frac{R}{\Pi} \Rightarrow R = \frac{\Pi s}{180}$

$$x = 60° = \frac{\Pi}{3},\ \Delta x = -1° = \frac{\Pi}{180}(-1) = -\frac{\Pi}{180} = -0.01745$$

como $f(59°) \approx f(60°) + f'(60°)(-1°)$

sen 59° ≈ 0.86603 + (0.5)(-0.01745) ∴ sen 59° ≈ 0.857305

(9) Hallar aproximadamente la variación experimentada por el volumen de un cubo de arista x cuando esta se incrementa en 1%

Solución

Sabemos que: $v = x^3 \Rightarrow dv = 3x^2 dx$

como dx = 1%x = 0.01x reemplazando se tiene: $dv = 3x^2(0.01x) = 0.03x^3 cm^3$

(10) Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta desde 5 a 5.06 centímetros. Hallar el valor aproximado del incremento del área.

Solución

Como el radio aumenta de 5cm a 5.06cm entonces

5.06 = 5 + 0.06, de donde r = 5 y dr = 0.06.

además: $A = \Pi r^2$ diferenciando dA = 2Πr dr reemplazando

dA = 2Π(5)(0.06) = 0.6π de donde $dA = 1.88cm^2$

(11) Una bola de hielo de 10cm de radio, se derrite hasta que su radio adquiera el valor de 9.8cm. Hallar aproximadamente, la disminución que experimenta su volumen.

Solución

Por dato del problema r = 10cm, dr = 0.2 cm

Además $v = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ diferenciando $dv = 4\pi r^2 dr = 4\pi(100)(0.2) = 80\pi\ cm^3$

$$\therefore\ dv = 80\pi\ cm^3$$

(12) Un cilindro circular recto tiene 10 cm de altura, si el radio cambia de 2 a 2.06 cm, calcular el cambio aproximado correspondiente al volumen del cilindro y hallar el error porcentual de cambio en el volumen.

Solución

El volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h$ donde h = 10cm, r = 2 cm y dr = 0.06cm

como $V = \pi r^2 h \Rightarrow$ dV = 2π rh dr

$dV = 2\pi(10)2(0.06) = 2.4\pi$ por lo tanto $dv = 2.4\pi\ cm^3$

el error porcentual es: $\dfrac{dV}{v}100\% = \dfrac{2.4\pi}{40\pi}x100\% = 6\%$

(13) Demostrar que si se comete un error al medir el diámetro de una esfera, el error relativo del volumen de la esfera es tres veces el error relativo del radio.

Solución

El volumen de la esfera $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Calculando $\frac{dv}{v} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4\pi r^3}{3}} = 3\frac{dr}{r}$ $\therefore \frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r}$

5.41 EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I. Calcular dy sí

(1) $y = x^2\sqrt{2x+3}$

(2) y = ctg 2x. cosec2x

(3) $y = \frac{3x}{x^2+2}$

(4) $y = \frac{2+\cos x}{2-\operatorname{sen} x}$

(5) $y = \operatorname{tg}^2 x.\operatorname{sen}^2 x$

(6) $y = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$

(7) $y = \frac{x+1}{2x-1}$

(8) $y = x\sqrt{1-x^2}$

(9) $y = 4x^3 + 5x^2 + 1$

(10) $y = 3x^2 + 2\sqrt{x}$

(11) $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

(12) $y = \frac{3ax}{(x^2+1)^2}$

II. Hallar Δy, dy y E = Δy − dy sí

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 3$, $x_1 = 2$, Δx = 0.01

(2) $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x_1 = 0$, Δx = 0.1

(3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_1 = 4$, Δx = 0.01

(4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x_1=1$, $\Delta x=0.3$

III. Usando diferenciales, calcular el valor que se indica.

(1) $f(x)=x^3+2x^2-x+1$, f(3.002)

(2) $f(x)=x^4+5x^2-4$, f(-2.97)

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+2x}}{x}$, f(2.024)

(4) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$, f(0.1)

(5) $f(x)=x^{31}+2x^{32}+3x^5+2x^2+x+3$, f(0.00009)

(6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2+1}$, f(1.91)

IV. Calcular el valor aproximado de

(1) $\sqrt{35.5}$

(2) $\sqrt[3]{7.45}$

(3) $\sqrt{37.5}$

(4) $\sqrt[3]{0.00098}$

(5) $\sqrt{0.042}$

(6) $\sqrt[3]{0.009}$

(7) $\sqrt{82}+\sqrt[4]{82}$

(8) $\sqrt[3]{63}$

(9) $\sqrt[4]{83}$

(10) $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$

(11) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

(12) $\sqrt{50}$

(13) $\sqrt[3]{128}$ **Rpta.** 5.04

(14) $E=[(3.01)^2+(4.0)^2+(12.08)^2]^{1/2}$

(15) $\sqrt[4]{630}$

(16) $\sqrt{\dfrac{(2.037)^2-3}{(2.037)^2+5}}$ **Rpta.** 0.355

(17) $\frac{1}{\sqrt[5]{31}}$ **Rpta.** 0.5032

(18) $\sqrt[10]{0.999}$ **Rpta.** 0.9999

(19) $\sqrt[3]{122}$ **Rpta.** 4.96

(20) $k = \frac{7+[5+(2.99)^2]^{1/5}}{[270-(2.99)^3]^{2/5}}$ **Rpta.** 0.99918

V.

(1) Se encontrará con un posible error de 0.01 pulg. Que la medida de la arista de un cubo es 15 pulg. Usando diferenciales encontrar el error aproximado al calcular con esta medida.

a) El volumen **b)** El área de una de las caras

Rpta. **a)** $dV = 6.75 pu\lg^3$ **b)** $dA = 0.3 pu\lg^2$

(2) La altura de un cono recto circular es el doble del radio de la base. Al medir se encontró que la altura es de 12 pulg. Con un posible error de 0.005 pulg. Encontrar el error aproximado en el volumen calculado del cono. **Rpta.** $dV = 0.18\pi\ pu\lg^3$

(3) Un tanque cilíndrico abierto tiene una capa de 1/8 pulg. de espesor. Si el radio interior es de 6 pulg. y la altura es de 10 pulg, encontrar usando diferenciales, la cantidad aproximada de pintura que se necesita. **Rpta.** $dV = \frac{15\pi}{8} pu\lg^3$.

(4) La medida de la arista de un cubo de 15cm, con un error posible de 0.01cm. Empleando las diferenciales, halle el error aproximado al evaluar.

a) el volumen **b)** el área de una de las caras

Rpta. **a)** $6.75cm^3$ **b)** $0.3cm^2$

(5) Un tanque cilíndrico tendrá un revestimiento de 2cm de espesor. Si la radio interior tiene 6m y la altura es de 10m, calcule mediante las diferenciales la cantidad aproximada de material de revestimiento que se usará. **Rpta.** $\frac{12}{5}\pi\, m^3$

(6) Una quemadura en la piel de una persona tiene la forma de una circunferencia tal que si r centímetros es el radio de A cm^2 es el área de la lesión, entonces $A = \pi r^2$. Use la diferencial para determinar la disminución aproximada en el área de la quemadura cuando el radio decrece de 1cm a 0.8cm. **Rpta.** $0.4\pi\, cm^2$

(7) Un tumor situado en el cuerpo de una persona tiene una forma esférica tal que si r centímetros es el radio y V cm^3 es el volumen del tumor, entonces $v = \frac{4\pi}{3} r^3$ utilice la diferencial para hallar el crecimiento aproximado en el volumen del tumor cuando el radio aumenta de 15cm a 1.cm. **Rpta.** $0.9\pi\, cm^3$.

(8) La medida de la resistencia eléctrica de un alambre es proporcional a la medida de su longitud e inversamente proporcional a la medida de su diámetro. Suponga que la resistencia de un alambre de longitud dada se calcula a partir de una medición del diámetro con un error posible del 2%. Encuentre el posible error porcentual en el valor calculado de la resistencia. **Rpta.** 4%

(9) El error posible en la medición del volumen de un gas es de $0.1 pie^3$ y el error permitido en la presión es de $0.001 cldr / pie^2$. Halle el tamaño del recipiente más pequeño con el cual es válida la ley de Boye.

(10) Una caja metálica de forma cúbica de $64 pu\lg^3$ de volumen interior, tiene por caras, planchas de ¼ pulgadas de espesor. Si el costo de metal a emplearse es de 8 dólares por $pu\lg^3$ aplicando las diferenciales hallar el costo aproximado del metal que se empleará en la construcción de la caja. **Rpta.** 96 dólares

(11) El diámetro de una esfera de 9cm, al medirlo se introduce un posible error de $\pm$ 0.05cm ¿Cuál es el error porcentual posible en el cálculo del volumen?

(12) Se mide el diámetro de una esfera y con el resultado se calcula el valor de su volumen, si el máximo error posible al medir el diámetro es 0.02cm y el error máximo aceptable al calcular el volumen es de $3cm^3$ ¿cuál es el diámetro aproximado de la esfera más grande a la que puede aplicarse estas condiciones? **Rpta.** $10\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ cm.

(13) Si el radio de la base de un cono circular recto es la mitad de su altura y si el radio de la base mide 2 cm. con un posible error de 0.01, aproximar el error posible cometido al calcular el volumen. **Rpta.** $\Delta V = 0.80\Pi$

(14) Un contratista acuerda pintar ambos lados de 1,000 rótulos redondos, cada uno de los cuales tiene un radio de 3m. Al recibir los rótulos, se descubre que el radio tiene 1cm más. Emplee las diferenciales para calcular el aumento porcentual aproximado de pintura que se necesitará. **Rpta.** 2.77% de aumento.

BIBLIOGRAFIA

(1) Calculus Volumen I por: Tom M. Apóstol

(2) Análisis Matemático por: Protter Morrey

(3) Análisis Matemático Tomo I por: L. D. Kudriavtsev

(4) Cálculo con Geometría por: Louis Leithold

(5) Cálculo y Geometría Analítica por: Larson – Hostetle

(6) Análisis Matemático Volumen I por: Hasser – Lasalle – Sullivan

(7) Cálculo de una y Varias Variables con Geometría Analítica por: Saturnino L. Sales, Einar Hile

(8) Cálculo con Geometría por: Edwin J. Purcell

(9) Cálculo y Geometría Analítica por: Sherman K. Stein

(10) Matemática Superior para Ingeniería por: C. R. Wylie J. R.

(11) Matemática Superior para matemáticos, físicos e ingenieros Volumen I por: R. Rothe

(12) Cálculo Avanzado por: Murray R. Spiegel

(13) Cálculo Diferencial e Integral por: Banach

(14) Cálculo Infinitesimal por: Smith – Longly y Wilson

(15) Cálculo con Geometría Analítica por: John B. Fraleich

(16) Análisis Matemático por: M. N. Bentebol, J. Margalef

(17) Ejercicios y problemas de matemática superior Tomo I por: P. Danko Popov.

(18) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático por: B. Demidovich.

(19) Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático por: G. N, Berman

(20) Cálculo Diferencial e Integral Tomo I, II por: N. Piskunov

(21) 5000 problemas de Análisis Matemático por: B. P. Demidovich

(22) Análisis de una Variable Real por: Celso Martínez, Carracedo, Miguel A. Sanz Alix

(23) Cálculo Diferencial e integral por: Granville–Smith – Langley

(24) Cálculo con Geometría Analítica por: R.E. Johnson – F.L. Kiokemeister – E.S. Wolk.

(25) Cálculo por: James Stewart

(26) Calculus Tomo I, II por: Michel Spivak

(27) Problemas de las Matemáticas Superiores I, II por: V. Bolgov, A. Karakulin, R.

(28) Cálculo Diferencial e Integral por: Yu Takeuchi

(29) Cálculo Infinitesimal con Geometría Analítica por: G.B. Thomas

(30) Principios de Análisis Matemático por: E. LINÉS.

(31) Calculo con Geometría Analítica por: EDWARDA y PENNEY

(32) Calculo de una Variable por: FINNEY – DEMANA – WAITS – KENNEDY

(33) Calculo de una Variable por: CLAUDIO PITA RUIZ

(34) Calculo I por: ALVARO PINZON

PEDIDOS AL POR MAYOR Y MENOR

AV. GERARDO UNGER N° 247 OF. 202
Urbanización Ingeniería (Frente a la UNI)
Teléfono: 3888564 -

LIMA – PERU

IMPRESO EN:

EDITORIAL SERVIVIOS GRAFICOS J.J

OBRAS DEL AUTOR

- Matemática Básica para estudiantes de Ciencias e Ingeniería
- Análisis Matemático I para estudiantes de Ciencias é Ingeniería
- Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencias é Ingeniería
- Análisis Matemático III para estudiantes de Ciencias é Ingeniería
- Análisis Matemático IV para estudiantes de Ciencias é Ingeniería
- Transformada de Laplace
- Sucesiones y Series Infinitas
- Geometría Analítica Plana
- Vectores, Matrices y sus Aplicaciones
- Algebra Lineal
- Rectas, Planos y Superficies
- Números Complejos y Polinomios
- Variable Compleja
- Solucionario de Makarenko (Ecuaciones Diferenciales)
- Solucionario de Análisis Matemático I por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático II por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático III por Deminovich
- Solucionario de Análisis Matemático III por G. Berman
- Solucionario de Leithold 2da. Parte
- Solucionario de Matemática para Administración y Economía por Weber

Pre - Universitario:

- Trigonometria Plana
- Algebra